

03

Анизотропия распространения пространственной поверхностной волны в феррожидкости при воздействии горизонтального магнитного поля

© В.М. Коровин

Научно-исследовательский институт механики Московского государственного университета им. М.В. Ломоносова,
119192 Москва, Россия
e-mail: verazhan@yandex.ru

Поступило в Редакцию 16 октября 2023 г.
В окончательной редакции 4 марта 2024 г.
Принято к публикации 1 апреля 2024 г.

В линейной постановке аналитически решена задача о распространении пространственной волны по свободной поверхности феррожидкости при воздействии однородного горизонтального магнитного поля. Получена формула зависимости магнитной восприимчивости феррожидкости от модуля вектора магнитного поля. Учтены сила тяжести, магнитная сила и поверхностное натяжение. Предположено, что длина волны мала по сравнению с толщиной слоя феррожидкости. Изучено влияние угла, образуемого волновым вектором с вектором магнитного поля, на фазовую и групповую скорости волны.

Ключевые слова: поверхностная волна, дисперсионное соотношение, фазовая скорость, групповая скорость, критерий подобия.

DOI: 10.61011/JTF.2024.05.57810.263-23

Введение

В [1] изложены результаты многочисленных исследований пространственных линейных волн на свободной поверхности обычной жидкости. Применительно к электропроводной жидкости в [2] теоретически показано наличие анизотропии распространения поверхностной волны. Для исследования анизотропии предложена методика проведения экспериментов с использованием ртути.

Явление анизотропии распространения поверхностной волны в электропроводной жидкости возникает в случае, когда сквозь жидкость проходит подведенный от источника питания горизонтальный электрический ток постоянной плотности и приложено однородное горизонтальное магнитное поле, а создаваемая ими сила Лоренца направлена вниз. Анизотропия распространения волны порождается возмущением силы Лоренца, вызываемым изменением формы свободной поверхности. Исследование этого явления с учетом магнитного поля, индуцируемого протекающим сквозь жидкость электрическим током, проведено в [3].

Основопологающую роль в развитии феррогидродинамики имеет работа [4]. В ней, в частности, записано дисперсионное соотношение для пространственных внутренних волн на поверхности раздела однородных феррожидкостей разных плотностей, заполняющих область между горизонтальными пластинами при наличии однородного горизонтального магнитного поля. Это дисперсионное соотношение после упрощения использовано ниже для сравнения с дисперсионным соотношением, полученным в настоящей работе. На базе упрощенного

дисперсионного соотношения найдена фазовая скорость волны.

Для описания явлений в феррожидкостях широко используются уравнения, приведенные в [5,6].

В [7] рассмотрены пространственные волны на поверхности несжимаемой жидкости, которая может неоднородно и изотропно намагничиваться во внешнем магнитном поле. Жидкость занимает нижнее полупространство. Считается, что в рассматриваемой жидкости, намагниченной внешним полем, за счет ее свойств, как „жидкого магнита“, индуцируется магнитное поле. Магнитное поле индуцируется также в заполненной воздухом области над жидкостью. Изучено воздействие как вертикальной, так и горизонтальной составляющих магнитного поля на горизонтальную плоскую свободную поверхность. Показано, что поле, касательное к невозмущенной плоской поверхности, увеличивает фазовую скорость поверхностных волн, если это поле не перпендикулярно фронту волны. При этом увеличивается и групповая скорость. Нормальное к свободной поверхности поле большой напряженности дестабилизирует плоскую свободную поверхность. Если же фронт волны перпендикулярен касательному к плоской свободной поверхности магнитному полю, то поле не влияет на фазовую и групповую скорости волны. Наиболее опасными с точки зрения нарушения устойчивости свободной поверхности являются волны, перпендикулярные касательной составляющей внешнего поля.

В настоящей работе рассмотрена распространяющаяся в горизонтальном направлении гармоническая волна [8] в феррожидкости, находящейся в приложенном

однородном горизонтальном магнитном поле. Гипотеза о „жидком магните“, как и в [5,6], не используется.

Гармонические волны относятся к классу линейных диспергирующих волн [9]. Рассмотрена волна, длина которой мала по сравнению с толщиной жидкого слоя. В отсутствие волны феррожидкость находится в состоянии гидростатического равновесия.

Предполагается, что волновой вектор \mathbf{k} образует угол θ с вектором магнитного поля \mathbf{H}_0 , возникающего в момент включения электромагнита. В отличие от [7] изучено влияние величины угла θ на фазовую и групповую скорости волны, а также на уравнение свободной поверхности в системе координат с осью x , параллельной вектору \mathbf{H}_0 .

Близкий (к рассмотренному ниже) вопрос о картине стационарных волн, вызванных на поверхности феррожидкости движущимся в феррожидкости ненамагничивающимся препятствием, изучен теоретически и экспериментально в [10]. Найдено, что вертикальное магнитное поле сужает конус стационарных волн и увеличивает их амплитуды. При этом за препятствием в области следа для линейно намагниченной феррожидкости уменьшается критическая величина напряженности магнитного поля, определяющая возникновение неустойчивости Розенцвейга. Параллельное скорости препятствия магнитное поле расширяет конус волн и уменьшает их амплитуды до подавления стационарных волн. Перпендикулярное скорости препятствия горизонтальное поле расширяет конус волн и стабилизирует амплитуды.

1. Постановка задачи

Рассматривается поверхностная волна в феррожидкости, заполняющей контейнер с ненамагничивающимися стенками. При включенном электромагните в отсутствие волны свободная поверхность феррожидкости, вектор намагниченности $\mathbf{M}_0 = \chi(H_0)\mathbf{H}_0$ и вектор магнитной индукции $\mathbf{B}_{01} = \mu_0(\mathbf{H}_0 + \mathbf{M}_0) = \mu\mathbf{H}_0$ горизонтальны. Здесь $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ Н/м — магнитная постоянная, $\mu(H_0) = \mu_0[1 + \chi(H_0)]$ — магнитная проницаемость феррожидкости. Ввиду однородности магнитного поля магнитная сила отсутствует. В атмосферном воздухе над феррожидкостью $\mathbf{B}_{02} = \mu_0\mathbf{H}_0$.

Обратимся к работе [11], в которой было проведено экспериментальное исследование турбулентности, вызываемой волнами на поверхности феррожидкости, граничащей с воздухом и находящейся в однородном горизонтальном магнитном поле. Водная феррожидкость была приготовлена без использования стабилизирующего органического вещества по методике, предложенной в работе [12]. Стабилизация раствора достигается за счет электрического заряда коллоидных частиц, вызывающего взаимное отталкивание частиц. Феррожидкость чувствительна к ионному составу несущей среды. Стабилизация реализуется при условии, что противоионами

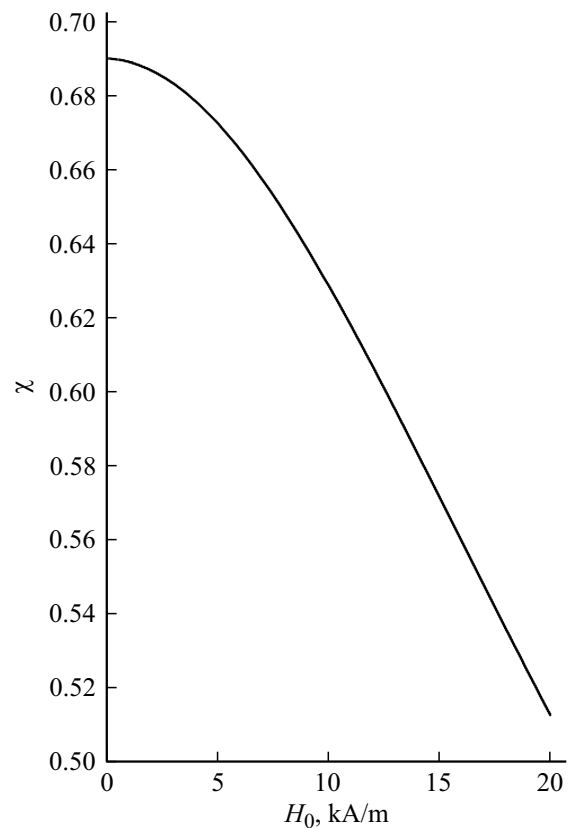


Рис. 1. Зависимость магнитной восприимчивости от напряженности поля.

в растворе являются слабополяризуемые ионы $\text{N}(\text{CH}_3)_4^+$ и ClO_4^- .

В качестве примера возьмем из [11] численные величины определяющих параметров феррожидкости: коэффициент поверхностного натяжения $\alpha = 0.059$ Н/м, плотность $\rho = 1324$ кг/м³, начальная магнитная восприимчивость $\chi_l = 0.69$, намагниченность насыщения $M_s = 16.9$ кА/м.

С использованием функции Ланжевена [13] $L(a) = \text{cth } a - 1/a$ от модифицированного аргумента $a = \sigma H_0$, где $\sigma = 3\chi_l/M_s$, аппроксимируем, следуя [14], экспериментальную кривую намагничивания кривой

$$M_0(H_0) = M_s L(\sigma H_0). \quad (1)$$

Здесь $\chi_l = \chi(H_0)$ при $H_0 \rightarrow 0$, $M_s = M_0(H_0)$ при $H_0 \rightarrow \infty$.

При этом имеем $\chi(H_0) = \frac{M_s}{H_0} L(\sigma H_0)$. График функции $\chi = \chi(H_0)$ показан на рис. 1.

Введем декартову прямоугольную систему координат x, y, z (рис. 2). Начало координат поместим на плоской в отсутствие волны свободной поверхности. Вектор \mathbf{H}_0 и ось x имеют одинаковое направление, а ось z направлена противоположно вектору ускорения свободного падения \mathbf{g} . Обозначим через $\theta \in [0, \pi/2]$ угол между вектором \mathbf{H}_0 и волновым вектором $\mathbf{k} = (k_x, k_y, 0)$.

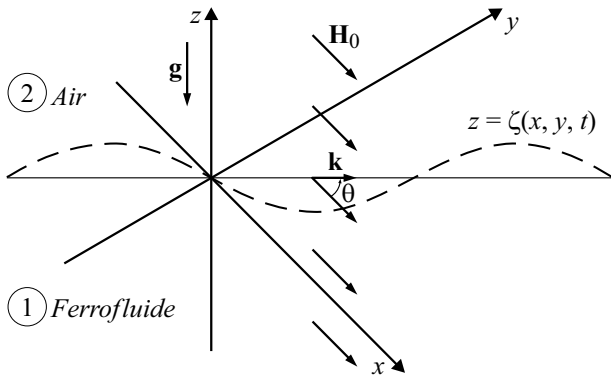


Рис. 2. Геометрия задачи и обозначения.

В рассматриваемой задаче $\theta = \text{const}$ является [15] одним из критериев подобия.

В отсутствие волны давление в феррожидкости выражается функцией $p_0(z) = p_a - \rho g z$, где p_a — атмосферное давление. Пусть возвышение возмущенной волной свободной поверхности — штриховая кривая на рис. 2 — описывается уравнением $z = \xi(x, y, t)$, где t — время.

Магнитные поля, возмущенные изменением формы свободной поверхности, обозначим $\mathbf{H}_j(x, y, z, t) = [H_0 + h_{jx}(x, y, z, t)]\mathbf{a}_x + h_{jy}(x, y, z, t)\mathbf{a}_y + h_{jz}(x, y, z, t)\mathbf{a}_z$, $j = 1, 2$, где $h_{jx}(x, y, z, t)$, $h_{jy}(x, y, z, t)$, $h_{jz}(x, y, z, t)$ — малые возмущения, а \mathbf{a}_x , \mathbf{a}_y , \mathbf{a}_z — единичные векторы вдоль осей x, y, z . Индекс $j = 1$ относится к области, занятой феррожидкостью, а индекс $j = 2$ к находящемуся над феррожидкостью воздуху.

Так как в рассматриваемых средах электрические токи отсутствуют, то существуют потенциалы $\psi_j(x, y, z, t)$ возмущений магнитных полей, и можно записать $\mathbf{h}_j(x, y, z, t) = \nabla\psi_j$. При этом $\mathbf{H}_j(x, y, z, t) = (H_0 + \frac{\partial\psi_j}{\partial x})\mathbf{a}_x + \frac{\partial\psi_j}{\partial y}\mathbf{a}_y + \frac{\partial\psi_j}{\partial z}\mathbf{a}_z$.

Вектор магнитной индукции в области, заполненной воздухом, равен

$$\mathbf{B}_2(x, y, z, t) = \mu_0 \left[\left(H_0 + \frac{\partial\psi_2}{\partial x} \right) \mathbf{a}_x + \frac{\partial\psi_2}{\partial y} \mathbf{a}_y + \frac{\partial\psi_2}{\partial z} \mathbf{a}_z \right]. \quad (2)$$

Пренебрегая малыми второго порядка, находим вектор намагниченности феррожидкости $\mathbf{M}(x, y, z, t) = \chi(H_0) \left[\left(H_0 + \frac{\partial\psi_1}{\partial x} \right) \mathbf{a}_x + \frac{\partial\psi_1}{\partial y} \mathbf{a}_y + \frac{\partial\psi_1}{\partial z} \mathbf{a}_z \right]$ и вектор магнитной индукции

$$\mathbf{B}_1(x, y, z, t) = \mu_0 [1 + \chi(H_0)] \left[\left(H_0 + \frac{\partial\psi_1}{\partial x} \right) \mathbf{a}_x + \frac{\partial\psi_1}{\partial y} \mathbf{a}_y + \frac{\partial\psi_1}{\partial z} \mathbf{a}_z \right]. \quad (3)$$

В системе уравнений Максвелла одним из уравнений является условие отсутствия свободных магнитных зарядов [16]. С учетом (2), (3) это условие записывается следующим образом:

$$\frac{\partial^2\psi_j}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi_j}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\psi_j}{\partial z^2} = 0, \quad j = 1, 2. \quad (4)$$

На свободной поверхности граничные условия магнитостатики имеют вид

$$z = 0: \quad \psi_1 = \psi_2, \quad \mu(H_0) \frac{\partial\psi_1}{\partial z} - \mu_0 \frac{\partial\psi_2}{\partial z} = \mu_0 H_0 \chi(H_0) \frac{\partial\xi}{\partial x}. \quad (5)$$

В областях 1, 2 вдали от свободной поверхности возмущения магнитных полей исчезают.

Линейная система уравнений гидродинамики записывается следующим образом:

$$\text{div} \mathbf{u} = 0, \quad \rho \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = -\nabla p_1 + \rho \mathbf{g} + \mu_0 H_0 \chi(H_0) \nabla \frac{\partial\psi_1}{\partial x}. \quad (6)$$

Здесь $\mathbf{u} = \mathbf{u}(x, y, z, t) = (u_x, u_y, u_z)$ — скорость феррожидкости, ρ — плотность, $p_1 = p_1(x, y, z, t)$ — возмущение давления, вызванное волной.

После введения потенциала скорости $\mathbf{u} = \nabla\varphi(x, y, z, t)$ первое уравнение (6) принимает вид

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} = 0, \quad (7)$$

а из второго уравнения (6) следует линеаризованный интеграл Коши–Лагранжа

$$p_1(x, y, z, t) = -\rho \frac{\partial\varphi}{\partial t} - \rho g z + \mu_0 H_0 \chi(H_0) \frac{\partial\psi_1}{\partial x}.$$

На свободной поверхности кинематическое и динамическое условия записываются следующим образом:

$$z = 0: \quad \frac{\partial\xi}{\partial t} = \frac{\partial\varphi}{\partial z},$$

$$\rho \frac{\partial\varphi}{\partial t} + \rho g z - \mu_0 H_0 \chi(H_0) \frac{\partial\psi_1}{\partial x} - \alpha \left(\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\xi}{\partial y^2} \right) = 0. \quad (8)$$

Далее рассматриваются связанные между собой задачи магнитостатики (4), (5) и гидродинамики (7), (8).

2. Анизотропия распространения волн

Введем обозначение $\mathbf{r} = x\mathbf{a}_x + y\mathbf{a}_y$. Пусть плоская в начальный момент времени свободная поверхность испытывает малое возмущение, при котором координаты точек самой поверхности и искомые функции в уравнениях (4), (7) выражаются с помощью нормальных мод [17], пропорциональных $\exp[i(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t)]$:

$$\begin{aligned} & (\xi(x, y, t), \psi_j(x, y, z, t), \varphi(x, y, z, t)) \\ & = (Z, \Psi_j(z), \Phi(z)) \exp[i(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t)], \quad j = 1, 2. \end{aligned} \quad (9)$$

Здесь i — мнимая единица, $\mathbf{k} = k_x\mathbf{a}_x + k_y\mathbf{a}_y$ — волновой вектор, Z — константа, а частота ω находится с использованием уравнений (4), (7) и граничных условий (5), (8).

Подставив выражения (9) в уравнения Лапласа (4), (7), получаем

$$\begin{aligned} \frac{d^2\psi_1}{dz^2} - k^2\Psi_1 &= 0, & \frac{d^2\psi_2}{dz^2} - k^2\Psi_2 &= 0, \\ \frac{d^2\Phi}{dz^2} - k^2\Phi &= 0, & k^2 &= k_x^2 + k_y^2. \end{aligned} \quad (10)$$

С учетом (9) граничные условия (5), (8) записываются следующим образом:

$$\begin{aligned} z = 0: \Psi_1 = \Psi_2, & (1 + \chi(H_0)) \frac{d\psi_1}{dz} - \frac{d\psi_2}{dz} = ik_x Z H_0 \chi(H_0), \\ i\omega Z + \frac{d\Phi}{dz} = 0, & i\rho\omega\Phi - Z(\rho g + \alpha k^2) + ik_x \mu_0 H_0 \chi(H_0) \Psi_1 = 0. \end{aligned} \quad (11)$$

В области 1 легко указать стремящиеся к нулю при $z \rightarrow -\infty$ решения первого и третьего уравнений (10):

$$\Psi_1 = A_1 \exp(kz), \quad \Phi = A_2 \exp(kz). \quad (12)$$

В области 2 имеем стремящиеся к нулю при $z \rightarrow +\infty$ решение второго уравнения (10):

$$\Psi_2 = A_3 \exp(-kz). \quad (13)$$

Здесь A_1, A_2, A_3 являются произвольными константами.

При подстановке решений (12), (13) в граничные условия (11) получаем систему линейных однородных уравнений относительно A_1, A_2, A_3, Z :

$$\begin{aligned} A_1 - A_3 &= 0, & [1 + \chi(H_0)]kA_1 + kA_3 - ik_x Z H_0 \chi(H_0) &= 0, \\ kA_2 + i\omega Z &= 0, & ik_x \mu_0 H_0 \chi(H_0)A_1 + i\rho\omega A_2 - (\rho g + \alpha k^2)Z &= 0. \end{aligned} \quad (14)$$

Система (14) тогда и только тогда обладает решениями, отличными от нулевого, когда ее определитель равен нулю. Вычислив определитель и приравняв его нулю, получаем дисперсионное соотношение

$$\omega^2 = gk + \frac{\mu_0 H_0^2 \chi(H_0) \cos^2 \theta}{\rho [2 + \chi(H_0)]} k^2 + \frac{\alpha}{\rho} k^3. \quad (15)$$

Далее находим

$$A_1 = A_3 = \frac{iH_0 \chi(H_0) Z \cos \theta}{2 + \chi(H_0)}, \quad A_2 = -\frac{i\omega}{k} Z. \quad (16)$$

С использованием (9), (12), (16) находим решение гидродинамической задачи (7), (8):

$$\varphi(x, y, z, t) = \frac{\omega}{k} Z q(x, y, t) \exp(kz),$$

$$\xi(x, y, t) = Z \cos[k(x \cos \theta + y \sin \theta) - \omega t],$$

где $q(x, y, t) = \sin[k(x \cos \theta + y \sin \theta) - \omega t]$.

Как и в случае волн на спокойной воде [9], основными характеристиками волн являются фазовая $c(k) = \omega/k$ и групповая $C(k) = d\omega/dk$ скорости. В отличие от [9] эти

характеристики зависят также от параметров H_0 и θ . Учитывая (15), находим

$$c(k) = \left[\frac{g}{k} + b(H_0) \cos^2 \theta + \frac{\alpha}{\rho} k \right]^{1/2}, \quad (17)$$

где $b(H_0) = \frac{\mu_0 H_0^2 \chi(H_0)}{\rho(2 + \chi(H_0))}$,

$$C(k) = 0.5c(k)Q(k)/R(k),$$

где $Q(k) = 1 + \frac{2b(H_0) \cos^2 \theta}{g} k + \frac{3\alpha}{\rho g} k^2$,

$$R(k) = 1 + \frac{b(H_0) \cos^2 \theta}{g} k + \frac{\alpha}{\rho g} k^2.$$

При $k = k_m = \sqrt{\rho g / \alpha}$, $\theta \in [0, \pi/2]$ фазовая скорость имеет минимум

$$c_m = c(k_m) = \left(2\sqrt{\frac{\alpha g}{\rho}} + b(H_0) \cos^2 \theta \right)^{1/2}.$$

Для рассматриваемой феррожидкости $k_m = 4.69 \text{ см}^{-1}$. Волновому числу k_m соответствует длина волны $\lambda_m = 2\pi/k_m = 1.34 \text{ см}$. Как и в случае [9] обычной жидкости, $c_m = C(k_m)$ при $\theta \in [0, \pi/2]$.

В качестве примера исследуем влияние магнитного поля напряженности $H_0 = 10 \text{ кА/м}$ на фазовую и групповую скорости пространственной волны при возрастании $\theta \in [0, \pi/2]$.

На рис. 3 в плоскости (k, c) показаны проходящие через точки $(k_m, c(k_m, 0))$, $(k_m, c(k_m, \pi/4))$, $(k_m, c(k_m, \pi/3))$ графики функции (17). Из рисунка видно, что для любого значения $c(k) > c(k_m)$ в каждом из случаев $\theta = 0, \pi/4, \pi/3$ существует два допустимых волновых числа.

По терминологии, используемой для описания диспергирующих волн в обычной жидкости [9], в случае феррожидкости область $0 < k < k_m$ является гравитационной ветвью, а область $k > k_m$ — капиллярной ветвью.

На рис. 4 показаны графики функции $s(k) = C(k)/c(k)$, построенные для $\theta = 0, \pi/4, \pi/3$. Видно, что $c(k) > C(k)$ в интервале $0 < k < k_m$, тогда как $c(k) < C(k)$ при $k > k_m$.

В работе [4] при выводе дисперсионного соотношения (42) использована система координат, у которой ось x направлена противоположно вектору ускорения свободного падения \mathbf{g} , а оси y, z горизонтальны. Применительно к волне, длина которой мала по сравнению с толщиной слоя феррожидкости, граничащей с воздухом, дисперсионное соотношение (42) после упрощения принимает вид

$$\omega^2 = gk + \frac{\alpha}{\rho_b} k^3 + \frac{\mu_0 M^2}{\rho_b} \frac{k k_y^2}{\beta_b (\chi + 1) + k},$$

где $k = \sqrt{k_y^2 + k_z^2}$, $\beta_b = \left(\frac{\chi_s + 1}{\chi + 1} k_y^2 + k_z^2 \right)^{1/2}$, $\chi = \frac{M}{H}$, $\chi_s = \frac{dM}{dH}$, ρ_b — плотность феррожидкости.

Отсюда находим

$$c(k) = \left[\frac{g}{k} + \frac{\alpha}{\rho_b} k + \frac{\mu_0 H^2 \chi^2}{\rho_b} \frac{\cos^2 \theta}{1 + (1 - \kappa \cos^2 \theta)^{1/2}} \right]^{1/2},$$

$$\kappa = \frac{\chi - \chi_s}{\chi + 1}.$$

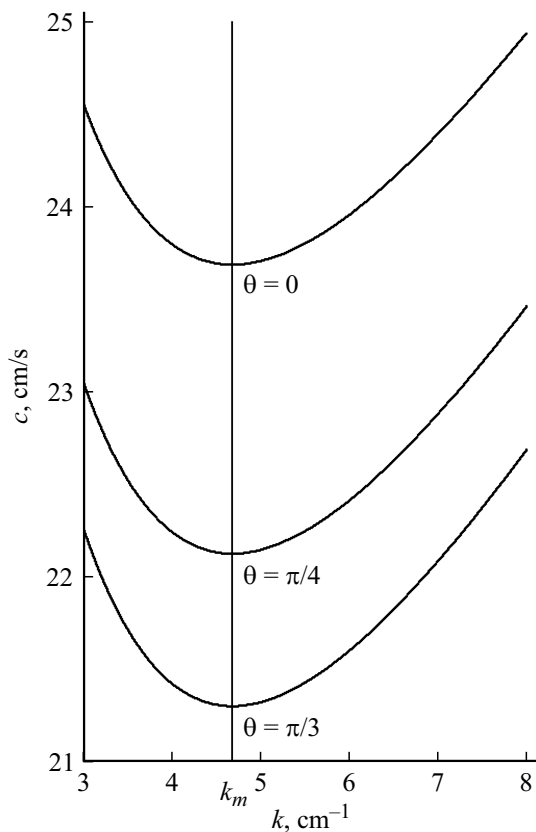


Рис. 3. Влияние направления распространения волны на фазовую скорость.

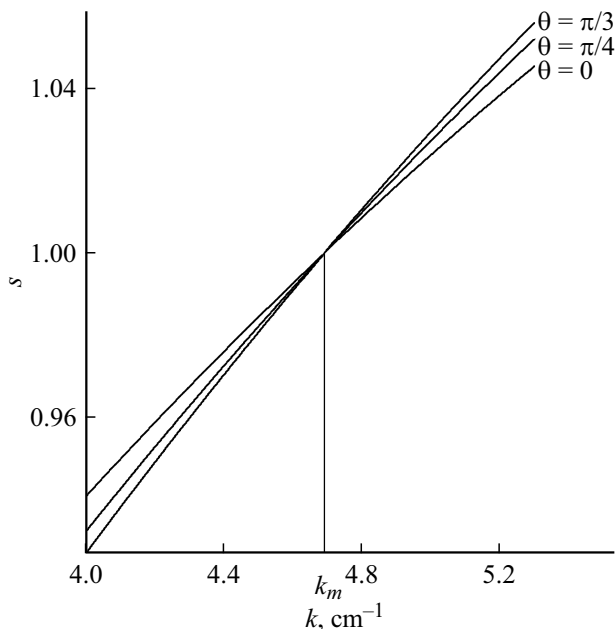


Рис. 4. Влияние направления распространения волны на отношение групповой скорости к фазовой скорости.

Таким образом, фазовая скорость волны зависит от направления ее распространения по отношению к вектору магнитного поля.

Заключение

Рассмотрена задача об анизотропии распространения по свободной поверхности феррожидкости пространственной короткой волны при воздействии однородного горизонтального магнитного поля. Эффект анизотропии проявляется в зависимости величин фазовой и групповой скоростей от $\cos^2 \theta$, где θ — величина угла между вектором магнитного поля и волновым вектором.

На плоскости параметров (волновое число, фазовая скорость) величина волнового числа k_m , реализующего минимум фазовой скорости, разделяет гравитационную ветвь, где $C(k) < c(k)$, и капиллярную ветвь, где $C(k) > c(k)$. При этом $c(k_m) = C(k_m)$.

Если $\theta = \pi/2$, то создаваемое волной изменение по времени формы свободной поверхности не вызывает появление магнитной силы. В этом случае при фиксированной величине волнового числа фазовая и групповая скорости волны в феррожидкости равны, соответственно, фазовой и групповой скоростям волны в обычной жидкости, имеющей одинаковые с феррожидкостью плотность и коэффициент поверхностного натяжения.

Конфликт интересов

Автор заявляет, что у него нет конфликта интересов.

Список литературы

- [1] Л.Н. Сретенский. *Теория волновых движений жидкости* (Наука, М., 1977), 816 с.
- [2] J.A. Shercliff. *J. Fluid Mech.*, **38** (2), 353 (1969).
- [3] В.М. Коровин. *ЖТФ*, **66** (8), 10 (1996).
- [4] R.E. Zelazo, J.R. Melcher. *J. Fluid Mech.*, **39** (1), 1 (1969).
- [5] М.И. Шлиомис. *УФН*, **112** (3), 427 (1974).
- [6] Р. Розенцвейг. *Феррогидродинамика* (Мир, М., 1989), 356 с.
- [7] И.Е. Тарапов. *ПМТФ*, **4**, 35 (1974).
- [8] Л.М. Бреховских, В.В. Гончаров. *Введение в механику сплошных сред* (Наука, М., 1982), 336 с.
- [9] Дж. Уизем. *Линейные и нелинейные волны* (Мир, М., 1977), 638 с.
- [10] M.S. Krakov, C.A. Khokhryakova, E.V. Kolesnichenko. *J. Fluid Mech.*, **948**, A17 (2022). DOI: 10.1017/jfm.2022.691
- [11] S. Dorbolo, E. Falcon. *Phys. Rev. E*, **E83**, 046303 (2011).
- [12] R. Massart. *IEEE Trans. Magnetics*, **17**, 2, 1247(1981).
- [13] С. Тикадзуми. *Физика ферромагнетизма. Магнитные свойства вещества* (Мир, М., 1983), 302 с.
- [14] В. Abou, G. Néron de Surgy, J.E. Wesfreid. *J. Phys. II France*, **7** (8), 1159 (1997).
- [15] Л.И. Седов. *Механика сплошной среды* (Наука, М., 1983), т.1, 492 с.
- [16] Дж. Джексон. *Классическая электродинамика* (Мир, М., 1965), 703 с.
- [17] Ф. Дразин. *Введение в теорию гидродинамической устойчивости* (Физматлит, М., 2005), 286 с.