03

Однонаправленные импульсы: относительно неискажающиеся квазисферические волны, интегралы Фурье–Бесселя и разложения по плоским волнам

© *А.Б. Плаченов* [1], *А.П. Киселев* [2,3¶]

[1] МИРЭА — Российский технологический университет,
119454 Москва, Россия
[2] Санкт-Петербургское отделение Математического института им. В.А. Стеклова РАН,
191023 Санкт-Петербург, Россия
[3] Институт проблем машиноведения РАН,
199178 Санкт-Петербург, Россия
¶e-mail: kiselev@pdmi.ras.ru

Поступила в редакцию 08.02.2024 г.
В окончательной редакции 06.04.2024 г.
Принята к публикации 06.04.2024 г.

Теоретически описан класс однонаправленных осесимметрических локализованных импульсов. Установлена эквивалентность их представлений в виде относительно неискажающихся квазисферических волн в виде интегралов Фурье–Бесселя и в виде суперпозиции плоских волн с волновыми векторами, имеющими положительные проекции на заданное направление.

Ключевые слова: локализованные импульсы, однонаправленные импульсы, точные решения.

DOI: 10.61011/OS.2024.04.58222.6006-24

1. Введение

В последние годы возрос интерес к локализованным решениям волнового уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 \tag{1}$$

(здесь x, y и z — декартовы координаты, t — время, а $c > 0$ — скорость распространения волн, предполагаемая постоянной), обладающим свойством однонаправленности [1–10]. Вещественные или мнимые части таких решений могут использоваться в качестве компонент вектора Герца при построении однонаправленных электромагнитных импульсов. Одна из формулировок однонаправленности [7] состоит в требовании, чтобы в разложении решения по плоским волнам присутствовали только однородные плоские волны, бегущие в направлениях, составляющих с некоторым выбранным направлением угол, не превосходящий $\frac{\pi}{2}$. Это свойство выражает естественное с физической точки зрения требование, чтобы математическая модель импульса описывала его распространение строго от источника. Однонаправленные решения иногда называют причинными (causal) [3,4]. Отметим, что понимаемая в таком смысле однонаправленность не исключает возможности того, что в некоторых пространственно-временных областях проекция вектора потока энергии на выбранное направление может оказаться отрицательной [8,9,11].

В дальнейшем выбранным направлением распространения у нас будет направление оси z. Соответственно будем называть решение однонаправленным, если z-проекции волновых векторов его плосковолновых составляющих неотрицательны. Очевидными тривиальными примерами однонаправленных решений являются плоская волна и конечная комбинация плоских волн, которые не являются пространственно локализованными. В настоящей работе мы будем рассматривать однонаправленные импульсы, локализованные по всем пространственным переменным в любой фиксированный момент времени.

Первые результаты по построению однонаправленных импульсов основывались на рассмотрении осесимметричных решений уравнения (1), представимых интегралами Фурье–Бесселя:

$$u = u(\rho, z, t) = \int\limits_0^\infty d\omega\, e^{i\omega t} \int\limits_0^{\omega/c} dk_z\, A(k_z, \omega) e^{-ik_z z} \times J_0\left(\rho\sqrt{\omega^2/c^2 - k_z^2}\right), \tag{2}$$

$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$, с достаточно произвольными весовыми функциями A [1–3]. Подходящий выбор таких весов позволил найти несколько решений, выражающихся через элементарные функции. Самое простое локализованное однонаправленное решение, однако, было найдено иначе и основывалось на удачной догадке [5,6], использовавшей разложение хорошо известного сплэш-импульса [12–14] на простейшие дроби. Оно имеет вид

$$u = \frac{1}{S(S - z_*)}, \tag{3}$$

где

$$S = S(t, \mathbf{R}) = \sqrt{c^2 t_*^2 - \rho^2}, \quad (4)$$

а $\mathbf{R}$ — радиус-вектор точки наблюдения, причем

$$z_* = z + i\xi, \quad t_* = t + i\tau, \quad (5)$$

ξ и $\tau > 0$ — свободные параметры, которые принимаются вещественными. Ветвь квадратного корня в (4) выбрана так, что $S|_{x=y=0} = ct_*$, и в таком случае при произвольных значениях $t, \mathbf{R}$ выполнено неравенство $\operatorname{Im} S \geq c\tau$ [6]. Решение (3) не имеет сингулярностей, если $\xi < c\tau$, и его энергия конечна [6,7]. Отметим еще, что при надлежащем выборе свободных параметров ξ и τ это решение может моделировать блинообразные, шароподобные и игловидные сфокусированные импульсы. Доказательство его однонаправленности опубликовано в [7,9].

С другой стороны, Безиерис и Саари [9] (см. также [2,10]) отметили, что для описания однонаправленного распространения важен специальный класс относительно неискажающихся волн. Так называются решения уравнения (1) вида

$$u = g f(\theta), \quad (6)$$

где амплитудная $g = g(x, y, z, t)$ и фазовая функции $\theta = \theta(x, y, z, t)$ фиксированы, а форма волны f — произвольная функция [15,16]. Если фазовая функция θ комплекснозначна, то форма волны f должна быть аналитична в области значений θ [17].

Интересующий нас класс осесимметричных решений имеет вид

$$u = \frac{f(\theta)}{S}, \quad (7)$$

где

$$\theta = S - z - ib, \quad (8)$$

причем $b = c\tau > 0$, с произвольной формой волны f, аналитической в верхней полуплоскости $\mathbb{C}^+$. Мнимый сдвиг ib в (8) сделан для того, чтобы область значений фазовой функции θ совпадала с $\mathbb{C}^+$ [6]. Для того чтобы решения вида (7) описывали локализованную волну, потребуем достаточно быстрого убывания (не медленнее, чем $1/|\theta|$) функции $f(\theta)$ при $|\theta| \to \infty$.

Поясним, как можно легко прийти к таким решениям. Рассмотрим относительно неискажающуюся волну, отвечающую сферическим волнам [15],

$$u = \frac{f(R - ct)}{R}, \quad (9)$$

$R = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. Уравнение (1) инвариантно относительно замены

$$z \mapsto i(ct + ib), \qquad ct \mapsto i(z + ib), \quad (10)$$

где b — произвольная вещественная постоянная. Для согласования с выражениями (3)–(5) мы возьмем $b = c\tau > 0$.

Фазовая функция $R - ct$ в (9) при преобразовании (10) переходит в выражение (8), которое будем называть квазисферической фазой. Мнимая часть (8) неотрицательна при всех значениях пространственных и временной переменных. Переопределив форму волны по правилу $f(i\theta)/i \mapsto f(\theta)$, получаем класс относительно неискажающихся волн вида (7), которые будем называть квазисферическими.

Отметим, что выражение (3) является частным случаем (7) при $f(\theta) = \frac{1}{\theta + i(b - \xi)}$, ряд более сложных, хотя и выражающихся через элементарные функции решений из этого класса найден в [1,3,10]. Решение, близкое к найденному в [5,6], но менее общее (отвечающее $\xi = 0$) построено в [8]. В работе [9] приведен обзор таких решений.

Пример однонаправленного решения для гармонического по времени режима приведен в [18]. Это решение имеет асимптотику, отвечающую гауссову пучку с произвольным астигматизмом.

В настоящей заметке мы устанавливаем связь между решениями вида (7) и (2) и даем представление этих решений в виде суперпозиции плоских волн. Наш подход к изучению локализованных волн, восходящий к работам Благовещенского [19] и Мозеса–Проссера [20], базируется на формулах, выражающих решение уравнения (1) через его асимптотику в дальней зоне при больших временах. Он оказывается удобным, в частности, для вычисления энергии, импульса и момента импульса таких решений [7,21].

2. Подход Благовещенского–Мозеса–Проссера и однонаправленность квазисферических волн

2.1. Подход Благовещенского–Мозеса–Проссера

Введем обозначение для радиуса-вектора точки наблюдения $\mathbf{R} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$, где $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ и $\mathbf{k}$ — орты координатных осей. Пусть $\mathbf{n} = \frac{\mathbf{R}}{R}$, $|\mathbf{n}| = 1$ — соответствующий единичный вектор, а $R = |\mathbf{R}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ — расстояние до начала координат.

Рассмотрим произвольное гладкое локализованное решение волнового уравнения (1), предполагая, что R и ct согласованно растут, так что их разность

$$s = R - ct \quad (11)$$

остается постоянной. Очевидно, $\mathbf{R} = (ct + s)\mathbf{n}$.

В работах [19,20] установлено, что для любого решения волнового уравнения, достаточно быстро убывающего при $R \to \infty$, для всякого фиксированного s и любого направления $\mathbf{n}$ существует предел

$$F(s, \mathbf{n}) == \lim_{t \to \infty} \left[ct\, u\,(t, (ct + s)\mathbf{n}) \right]. \quad (12)$$

Предел (12) характеризует при больших временах амплитуду импульса в направлении $\mathbf{n}$. Для однонаправленного (вдоль оси z) волнового пакета, очевидно, $F(s,\mathbf{n}) \equiv 0$ для всех $\mathbf{n}$, у которых проекции на ось z отрицательны, т.е. $\mathbf{n}\cdot\mathbf{k} < 0$, где $\mathbf{n}\cdot\mathbf{k}$ — скалярное произведение векторов $\mathbf{n}$ и $\mathbf{k}$.

Будем характеризовать направление $\mathbf{n}$ углами χ и φ сферической системы координат с полярной осью z:

$$\mathbf{n} = \sin\chi\cos\varphi\,\mathbf{i} + \sin\chi\sin\varphi\,\mathbf{j} + \cos\chi\,\mathbf{k},$$

$0 \le \varphi < 2\pi$, $0 \le \chi \le \pi$. Условие однонаправленности принимает вид

$$F(s,\mathbf{n}) \equiv 0, \quad \frac{\pi}{2} < \chi \le \pi. \tag{13}$$

Нетривиальный результат Благовещенского–Мозеса–Проссера [16,19,20] состоит в том, что решение u в любой точке $\mathbf{R}$ в любой момент представимо через предел (12) следующим образом:

$$u(t,\mathbf{R}) = \frac{1}{2\pi}\iint\limits_{|\mathbf{N}|=1} F'(\mathbf{N}\cdot\mathbf{R} - ct, \mathbf{N})\, d^2\mathbf{N}, \tag{14}$$

где обозначено

$$F'(s,\mathbf{N}) = \frac{\partial F(s,\mathbf{N})}{\partial s}.$$

Интегрирование ведется по единичной сфере $|\mathbf{N}| = 1$, и $d^2\mathbf{N}$ обозначает элемент площади ее поверхности. В сферических координатах

$$\mathbf{N} = \sin\mathscr{X}\cos\phi\,\mathbf{i} + \sin\mathscr{X}\sin\phi\,\mathbf{j} + \cos\mathscr{X}\mathbf{k},$$

а элемент площади сферы принимает вид

$$d^2\mathbf{N} = \sin\mathscr{X}\, d\mathscr{X}\, d\phi.$$

Формула (14) представляет решение u в виде суперпозиции нестационарных плоских волн.

2.2. Квазисферическая волна (7) при больших временах и расстояниях

Найдем предел (12) для решения (7). Если $\cos\chi \ne 0$, то при $t \to +\infty$

$$S = S\big(t, (ct+s)\mathbf{n}\big) = \sqrt{(ct+ib)^2 - (ct+s)^2\sin^2\chi}$$

$$\approx ct|\cos\chi| + \frac{ib - s\sin^2\chi}{|\cos\chi|} \approx ct|\cos\chi|,$$

так что

$$\theta = S - (ct+s)\cos\chi - ib \approx ct(|\cos\chi| - \cos\chi)$$

$$+ \frac{-s(\sin^2\chi + \cos\chi|\cos\chi|) + ib(1 - |\cos\chi|)}{|\cos\chi|}.$$

Для направлений $\mathbf{n}$, составляющих тупой угол с осью z, $\cos\chi < 0$, т.е. $\chi > \frac{\pi}{2}$, имеем

$$u \approx f(2ct|\cos\chi|)/(ct|\cos\chi|),$$

и поскольку

$$f(2ct|\cos\chi|) \to 0,$$

из (12) вытекает, что

$$F(s,\mathbf{n}) = 0.$$

Для направлений $\mathbf{n}$, составляющих с осью z острый угол, $\cos\chi > 0$,

$$u\big(t, (ct+s)\mathbf{n}\big) \approx \frac{1}{ct\cos\chi} f\left(\frac{-s + ib(1-\cos\chi)}{\cos\chi}\right),$$

и из (7) вытекает

$$F(s,\mathbf{n}) = \frac{1}{\cos\chi} f\left(\frac{-s + ib(1-\cos\chi)}{\cos\chi}\right).$$

Наконец, для $\chi = \frac{\pi}{2}$ аналогичное вычисление дает значение

$$F(s,\mathbf{n}) = \lim_{t\to\infty}\left[\sqrt{\frac{ct}{2(ib-s)}}\, f\left(\sqrt{2ct(ib-s)}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{2(ib-s)}\lim_{\theta\to\infty}\theta f(\theta).$$

Этот предел конечен, если $|f(\theta)|$ убывает, как мы предположили, не медленнее, чем $|\theta|^{-1}$. Поскольку окружность $\chi = \frac{\pi}{2}$ не дает вклада в интеграл (14), значение $F(s,\mathbf{n})|_{\chi=\frac{\pi}{2}}$ можно заменить нулем и записать результат в виде

$$F(s,\mathbf{n}) = \frac{H(\cos\chi)}{\cos\chi} f\left(\frac{-s + ib(1-\cos\chi)}{\cos\chi}\right), \tag{15}$$

где H — ступенчатая функция Хевисайда,

$$H(p) = \begin{cases} 1, & p > 0, \\ 0, & p < 0. \end{cases} \tag{16}$$

Таким образом, поскольку для квазисферической волны в формуле (14) интегрирование идет по полусфере $\mathbf{N}\cdot\mathbf{k} > 0$, однонаправленность импульса (7) установлена.

2.3. Об угловой расходимости квазисферических волн

Следует отметить, что квазисферические решения могут описывать импульсы, обладающие не только большой (как в примерах, рассмотренных в [5,6,8]), но и малой угловой расходимостью. Для сильной угловой локализации требуется быстрое убывание модуля функции $|f(\theta)|$ с ростом $\operatorname{Im}\theta$. Таким свойством обладает, например, форма волны, введенная Лекнером [10], имеющая вид

$$f(\theta) = \exp(iK\theta))/(\theta + ib)$$

(K — вещественная константа), для которой угловая локализация по углу χ имеет гауссов характер. Ряд примеров формы волны, обеспечивающей гауссову локализацию не только по углам, но и по продольной переменной, можно найти в работе Киселева и Перель [22] (см. также [16,23]), посвященной волновым пакетам другой природы.

3. Интегральные представления квазисферической волны

3.1. Представление суперпозицией нестационарных плоских волн

Дифференцируя функцию (15) по первому аргументу, получаем

$$F'(s, \mathbf{n}) = -\frac{H(\cos\chi)}{\cos^2\chi}\, f'\left(\frac{-s + ib(1-\cos\chi)}{\cos\chi}\right), \ \chi \neq \frac{\pi}{2}. \tag{17}$$

Подстановка (17) в (14) с заменой $\mathbf{n}$ на $\mathbf{N}$ дает

$$u = -\frac{1}{2\pi}\iint\limits_{\Sigma_+} \frac{d^2\mathbf{N}}{\cos^2\mathscr{X}}\, f'\left(\frac{ct - \mathbf{NR} + ib(1-\cos\mathscr{X})}{\cos\mathscr{X}}\right)$$

$$= -\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} d\phi \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin\mathscr{X}\, d\mathscr{X}}{\cos^2\mathscr{X}} \times$$

$$f'\left(\frac{(ct+ib) - (z+ib)\cos\mathscr{X} - (x\cos\phi + y\sin\phi)\sin\mathscr{X}}{\cos\mathscr{X}}\right), \tag{18}$$

Σ_+ обозначает переднюю полусферу $\{|\mathbf{N}| = 1,\ \mathscr{X} < \frac{\pi}{2}\}$.

3.2. Представление суперпозицией монохроматических плоских волн

Представим форму волны в виде

$$f(\theta) = \int\limits_0^\infty \hat f(\kappa)\exp(i\kappa\theta)\, d\kappa,$$

такое представление корректно для достаточно быстро убывающих функций f (интегрирование ведется по положительной полуоси ввиду аналитичности f в верхней полуплоскости). Тогда

$$f'(\theta) = i\int\limits_0^\infty \hat f(\kappa)\exp(i\kappa\theta)\kappa\, d\kappa.$$

Отсюда

$$u = -\frac{i}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} d\phi \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin\mathscr{X}\, d\mathscr{X}}{\cos^2\mathscr{X}} \int\limits_0^\infty \hat f(\kappa)\exp\Bigg(i\kappa\times$$

$$\frac{(ct+ib) - (z+ib)\cos\mathscr{X} - (x\cos\phi + y\sin\phi)\sin\mathscr{X}}{\cos\mathscr{X}}\Bigg)$$

$$\times\,\kappa\, d\kappa = -\frac{ia}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} d\phi \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\mathscr{X}\, d\mathscr{X} \int\limits_0^\infty \hat f(k\cos\mathscr{X})$$

$$\times \exp\big[ik\big((ct+ib) - (z+ib)\cos\mathscr{X}$$

$$- (x\cos\phi + y\sin\phi)\sin\mathscr{X}\big)\big]k\, dk, \tag{19}$$

где сделана замена $\kappa = k\cos\mathscr{X}$.

Правая часть является объемным интегралом, записанным в сферических координатах $(k, \mathscr{X}, \phi)$. Поскольку $k^2\, dk\, \sin\mathscr{X}\, d\mathscr{X}\, d\phi$ — элемент объема в $\mathbb{R}^3$, подынтегральная функция

$$\hat f(k\cos\mathscr{X})\,\frac{e^{ik[(ct+ib)-(z+ib)\cos\mathscr{X}-(x\cos\phi+y\sin\phi)\sin\mathscr{X}]}}{k}$$

интегрируется по полупространству $0 \le \mathscr{X} < \frac{\pi}{2}$. Перейдя в (19) к декартовым координатам

$$k_z = k\cos\mathscr{X},\ \ k_x = k\sin\mathscr{X}\cos\phi,\ \ k_y = k\sin\mathscr{X}\sin\phi,$$

получаем

$$u = -\frac{i}{2\pi}\int\limits_0^\infty \hat f(k_z)dk_z \int\limits_{-\infty}^\infty dk_x \int\limits_{-\infty}^\infty dk_y$$

$$\times\,\frac{e^{i[k(ct+ib)-k_z(z+ib)-k_x x - k_y y]}}{k}, \tag{20}$$

где $k = \sqrt{k_x^2 + k_y^2 + k_z^2}$.

Формула (20)представляет квазисферическую волну (7) в виде разложения по монохроматическим плоским волнам. Продолжив подынтегральную функцию нулем на отрицательные значения k_z, получаем

$$u = -\frac{i}{2\pi}\iiint\limits_{\mathbb{R}^3} H(k_z)\hat f(k_z)\,\frac{e^{i[k(ct+ib)-k_z(z+i\xi)-k_x x - k_y y]}}{k}\, d^3\mathbf{k}, \tag{21}$$

здесь $d^3\mathbf{k} = dk_x dk_y dk_z$ — элемент объема.

3.3. Представление суперпозицией монохроматических цилиндрических волн интегралом Фурье–Бесселя

Перейдем в представлении (19) к цилиндрическим координатам: $x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$,

$x\cos\phi + y\sin\phi = \rho\cos(\phi - \varphi)$. Интегрируя по ϕ и применяя формулу для функции Бесселя J_0,

$$J_0(m) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{im\cos\mu}d\mu$$

[24], находим

$$u = -i\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\mathscr{X}\,d\mathscr{X}\int_0^{\infty} \hat{f}(k\cos\mathscr{X})J_0(k\rho\sin\mathscr{X}) \times e^{ik[(ct+ib)-(z+ib)\cos\mathscr{X}]}\,k\,dk.$$

Подстановка $k_z = k\cos\mathscr{X}$ дает представление функции (7) в виде

$$u = -i\int_0^{\infty} e^{ik(ct+ib)}dk\int_0^{k} \hat{f}(k_z)J_0(\sqrt{k^2 - k_z^2}\,\rho)e^{-ik_z(z+ib)}dk_z. \tag{22}$$

Переход к переменной $\omega = ck$ дает

$$u = -\frac{i}{c}\int_0^{\infty} e^{i\omega(t+ib/c)}d\omega\int_0^{\omega/c} \hat{f}\,(k_z)\,J_0\Big(\sqrt{(\omega/c)^2 - k_z^2}\,\rho\Big) \times e^{-ik_z(z+ib)}dk_z. \tag{23}$$

Таким образом, находим связь между формой волны $f(\theta)$ в представлении (7) и плотностью $A(k_z,\omega)$ в представлении (2):

$$A(k_z,\omega) = -\frac{i}{c}\,e^{-(\omega/c-k_z)b}\,\hat{f}(k_z).$$

4. Заключение

Таким образом, мы установили связь между несколькими представлениями локализованных однонаправленных волн. Это представления в виде квазисферических волн (7), в виде интегралов Фурье–Бесселя (2), в виде суперпозиций монохроматических (21) и нестационарных (18) плоских волн.

Благодарности

Авторы признательны И. Безиерису, П. Саари и Дж. Лекнеру за полезный обмен мнениями, а также Н.Н. Розанову, И.А. Со и рецензенту журнала за ценные замечания.

Конфликт интересов

Авторы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

Список литературы

[1] M. Zamboni-Rached. Phys. Rev. A, **79** (1), 013816 (2009). DOI: 10.1103/PhysRevA.79.013816
[2] K.J. Parker, M.A. Alonso. Opt. Express, **24** (25), 28677 (2016). DOI: 10.1364/OE.24.028669
[3] J. Lekner. Proc. R. Soc. London A, **474** (2209), 20170655 (2018). DOI: 10.1098/rspa.2017.0655
[4] J. Lekner. *Theory of Electromagnetic Pulses* (Morgan & Claypool Publishers, San Rafael, 2018). DOI: 10.1088/978-1-6432-7022-7
[5] И.А. Со, А.Б. Плаченов, А.П. Киселев. Опт. и спектр., **128** (12), 865 (2020). DOI: 10.21883/OS.2020.12.50323.209-20 [I.A. So, A.B. Plachenov, A.P. Kiselev. Opt. Spectr., **128** (12), 1865 (2020). DOI: 10.21883/OS.2020.12.50323.209-20].
[6] I.A. So, A.B. Plachenov, A.P. Kiselev. Phys. Rev. A, **120** (6), 063529 (2020). DOI: 10.1103/PhysRevA.102.063529
[7] А.Б. Плаченов. В сб.: *Зап. научн. семин. ПОМИ*, под ред. В.С. Михайлова, М.И. Белишева (ПОМИ, СПб., 2020), т. 493, с. 269. [A.B. Plachenov. J. Math. Sci., **277** (4), 653 (2023). DOI: 10.1007/s10958-023-06871-7].
[8] I. Bialynicki-Birula, Z. Bialynicki-Birula, S. Augustynowicz. J. Phys. A, **55**, 255702 (2022). DOI: 10.1088/1751-8121/ac65c1
[9] I. Besieris, P. Saari. Phys. Rev. A, **107**, 033502 (2023). DOI: 10.1103/PhysRevA.107.033502
[10] J. Lekner. Phys. Rev. A, **108**, 063502 (2023). DOI: 10.1103/PhysRevA.108.063502
[11] M.V. Berry. J. Phys. A, **43**, 415302 (2010). DOI: 10.1088/1751-8113/43/41/415302
[12] R.W. Ziolkowski. J. Math. Phys., **26** (4), 861 (1985). DOI: 10.21883/OS.2020.12.50323.209-20
[13] S. Feng, H.G. Winful, R.W. Hellwarth. Phys. Rev. E, **59** (4), 4630 (1999). DOI: 10.1103/PhysRevE.59.4630
[14] A.B. Plachenov, G.N. Dyakova. J. Phys.: Conf. Ser., **2373**, 062001 (2022). DOI: 10.1088/1742-6596/2373/6/062001
[15] R. Courant, D. Hilbert. *Methods of Mathematical Physics* (Interscience, New York, 1962), v. 2.
[16] А.П. Киселев. Опт. и спектр., **102** (4), 661 (2007). [A.P. Kiselev. Opt. Spectrosc., **102** (4), 603 (2007). DOI: 10.1134/S0030400X07040200].
[17] A.P. Kiselev, A.B. Plachenov, G.N. Dyakova. J. Electromagnetic Waves and Applications, **31** (13), 1325 (2017). DOI: 10.1080/09205071.2017.134825
[18] A.P. Kiselev, A.B. Plachenov. J. Physics Commun., **3** (11), 115004 (2019). DOI: 10.1088/2399-6528/ab5149
[19] А.С. Благовещенский. В сб.: *Тр. V Всес. симп. по дифракции и распространению волн* (Наука, Л., 1971), с. 29.
[20] H.E. Moses, R.T. Prosser. SIAM J. Appl. Math., **50** (5) 1325 (1990). DOI: 10.1117/12.951821
[21] A.B. Plachenov, P. Chamorro-Posada, A.P. Kiselev. J. Lightwave Technol., **41** (7), 2212 (2023). DOI: 10.1109/JLT.2023.3243217
[22] A.P. Kiselev, M.V. Perel. J. Math. Phys., **41** (4), 1934 (2000). DOI: 10.1063/1.533219
[23] А.П. Киселев, М.В. Перель. Опт. и спектр., **86** (3), 357 (1999). [A.P. Kiselev, M.V. Perel. Opt. Spectr., **86**(3), 307 (1999)].
[24] M. Abramovitz, I. Stegun. *Handbook of mathematical functions* (NBS, Washington, 1972).