

09

## Сравнение динамики решеток разности населенностей, создаваемых в двухуровневой и трехуровневой средах полуцикловыми световыми импульсами

© Р.М. Архипов<sup>1,2</sup>, М.В. Архипов<sup>1,2</sup>, Н.Н. Розанов<sup>1,2</sup>

<sup>1</sup> Санкт-Петербургский государственный университет,  
199034 Санкт-Петербург, Россия

<sup>2</sup> ФТИ им. А.Ф. Иоффе РАН,  
194021 Санкт-Петербург, Россия

e-mail: arhipovrostislav@gmail.com, mikhail.v.arhipov@gmail.com, nnrosanov@mail.ru

Поступила в редакцию 27.02.2024 г.

В окончательной редакции 27.02.2024 г.

Принята к публикации 14.03.2024 г.

На основе численного решения системы уравнений Максвелла-Блоха проведено сравнение динамики решеток разности населенностей и поляризации среды, моделированных в двух- и трехуровневом приближении. Показано, что решетки также возникают и в трехуровневой среде, однако их динамика качественно не отличается от двухуровневой среды при выбранных параметрах модели.

**Ключевые слова:** решетки разности населенностей, полуцикловые импульсы, аттосекундные импульсы, когерентные эффекты, двухуровневая среда.

DOI: 10.61011/OS.2024.04.58223.6078-24

### Введение

Прогресс в сокращении длительности электромагнитных импульсов привел к возможности получения структур излучения, содержащих всего несколько колебаний поля фемто- и аттосекундной длительности [1–3]. Получение таких импульсов сделало возможным изучение и управление динамикой электронов в веществе [4–6]. Достижения в этой области были отмечены Нобелевской премией по физике 2023 г. [7].

Наиболее короткая длительность в фиксированном спектральном интервале получится, если у обычного многоциклового импульса убрать все полуволны поля и оставить только одну полуволну. Получаемый в этом случае импульс является уже униполярным, полуцикловым импульсом [8–11]. Для таких полуцикловых импульсов важной характеристикой является их электрическая площадь, определяемая в заданной точке пространства, как интеграл от напряженности поля  $\mathbf{E}$  по времени  $t$  [12–17]

$$S_E = \int \mathbf{E}(t) dt. \quad (1)$$

Интерес к получению таких импульсов активно развивается в последнее время. Они способны быстро и однонаправленно воздействовать на заряды, что делает их перспективными для различных приложений. Показана возможность применения таких импульсов для сверхбыстрого управления свойствами различных квантовых систем — атомов, молекул, наноструктур [18–24]. Последние результаты исследований в этой области можно найти в обзорах [12–17] и приведенной там литературе.

Однако в случае полуцикловых импульсов, ввиду их малой длительности, стандартные теории взаимодействия излучения с веществом и традиционные приближения, применяемые для длинных многоцикловых импульсов, могут быть не применимы. Так, например, становится не применима теория фотоионизации Келдыша, когда длительность импульса короче орбитального электрона в атоме [25].

Другим традиционным приближением в оптике и лазерной физике, применяемым при анализе резонансного когерентного взаимодействия с веществом, является двухуровневое приближение, когда считается, что среда имеет только два уровня энергии, а остальные уровни не учитываются [26–29]. Полуцикловые импульсы не содержат несущей частоты и обладают широким спектром, который может покрывать одновременно несколько резонансных переходов среды. В этом случае актуальным является вопрос об использовании двухуровневого приближения в задачах когерентного распространения предельно коротких импульсов (ПКИ) в резонансных средах. На сегодняшний день когерентное распространение таких импульсов изучено в основном в двухуровневом приближении [30–35].

При когерентном взаимодействии ПКИ со средой, когда длительность импульсов и задержки между ними короче времени релаксации поляризации среды  $T_2$ , в ней возможно создание и сверхбыстрое управление решетками разности населенностей [36–38]. Обзор последних и более ранних результатов по данной теме можно найти в [39,40] и цитируемой литературе. Когда короткий импульс покидает среду, он оставляет после себя бегущие волны поляризации, существующие в среде в течение

времени фазовой памяти среды  $T_2$ . При этом, если в среде войдет второй импульс после первого, то в результате взаимодействия с этой волной поляризации в среде возможно создание решетки разности населенностей [36–38]. В приближении малой амплитуды поля в рамках теории возмущений формирование решеток может быть объяснено также на основе „интерференции“ площадей импульсов [41].

Многие ранние исследования динамики таких решеток под действием полупериодических импульсов проводились в двухуровневом приближении [36–38]. В работах [42,43] изучалась динамика решеток в трехуровневой среде, параметры которой соответствовали атомам водорода и рубидия. В настоящей работе проводится сравнение динамики решеток разности населенностей и динамики поляризации среды под действием полупериодических аттосекундных импульсов в двух- и трехуровневой средах на основе численного решения системы уравнений Максвелла-Блоха. Рассматривается случай, когда импульсы одномоментно не перекрываются в среде.

## Рассматриваемая система и постановка задачи

Анализ проводится следующим образом. Проводились численные расчеты динамики поляризации и населенностей в двухуровневой и трехуровневой средах. Параметры среды и возбуждения указаны в таблице. Величины времен релаксации лежат в наносекундном диапазоне, что на порядки превышает длительности импульсов возбуждения и интервалы между ними (фемто- и аттосекунды). Поэтому их значения не критичны в рассматриваемых условиях и для простоты взяты одинаковыми для всех переходов.

Среда возбуждалась последовательностью встречных полупериодических импульсов гауссовой формы, движущихся на встречу друг другу в форме

$$E(z = 0, t) = E_{01} e^{-\frac{(t-\Delta_1)^2}{\tau^2}}, \quad (2)$$

$$E(z = L, t) = E_{02} e^{-\frac{(t-\Delta_2)^2}{\tau^2}}. \quad (3)$$

Здесь  $\Delta_1 = 2.5\tau$ ,  $\Delta_2 = 30.5\tau$  — задержки, значение которых подобрано так, чтобы импульсы не перекрывались в среде.

Для создания последовательности импульсов выбирались нулевые граничные условия на границах области интегрирования, имевшей длину  $L = 12\lambda_0$ . Среда располагалась в центре области интегрирования между точками  $z_1 = 4\lambda_0$  и  $z_2 = 8\lambda_0$ . Схема распространения таких импульсов приведена на рис. 1.

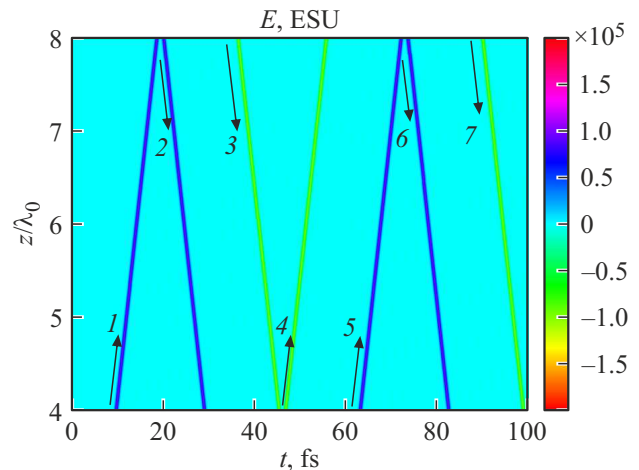


Рис. 1. Схема движения импульсов по среде. Стрелки указывают направления их движения в момент вхождения импульса в среду. Цифры указывают номер импульса.

## Динамика решеток разности населенностей и структур поляризации в двухуровневой среде

В данном разделе приводятся изучения динамики разности населенностей и поляризации двухуровневой среды. Система уравнений Максвелла-Блоха для двухуровневой среды имеет вид [44]

$$\frac{\partial \rho_{12}(z, t)}{\partial t} = -\frac{\rho_{12}(z, t)}{T_2} + i\omega_0 \rho_{12}(z, t) - \frac{i}{\hbar} d_{12} E(z, t) n(z, t), \quad (4)$$

$$\frac{\partial n(z, t)}{\partial t} = -\frac{n(z, t) - n_0(z)}{T_1} + \frac{4}{\hbar} d_{12} E(z, t) \text{Im} \rho_{12}(z, t), \quad (5)$$

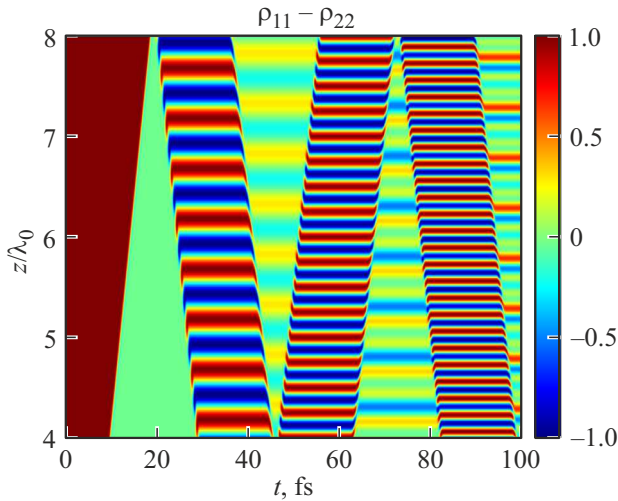
$$P(z, t) = 2N_0 d_{13} \text{Re} \rho_{12}(z, t), \quad (6)$$

$$\frac{\partial^2 E(z, t)}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E(z, t)}{\partial t^2} = \frac{4\pi}{c^2} \frac{\partial^2 P(z, t)}{\partial t^2}. \quad (7)$$

Система уравнений (4)–(7) содержит следующие параметры: недиагональный элемент матрицы плотности двухуровневой среды  $\rho_{12}$ ,  $n = \rho_{11} - \rho_{22}$  — разность населенностей (инверсия) двухуровневой среды,  $P$  — поляризация среды,  $t$  — время,  $z$  — продольная координата,  $c$  — скорость света в вакууме,  $d_{12}$  — дипольный момент перехода,  $\omega_0$  — частота перехода,  $N_0$  — концентрация двухуровневых частиц,  $\hbar$  — приведенная постоянная Планка,  $n_0$  — разность населенностей среды при отсутствии электрического поля ( $n_0 = 1$  для поглощающей среды). Волновое уравнение (7) описывает динамику напряженности электрического поля. Проводилось численное решение уравнений (4)–(7) с начальными условиями (2), (3).

Параметры импульсов возбуждения и среды

Амплитуда импульсов	$E_{01} = E_{02} = 100000 \text{ ESU}$
Длительность импульсов возбуждения	$\tau = 390 \text{ as}$
Частота перехода 12 (длина волны перехода)	$\omega_{12} = 2.69 \cdot 10^{15} \text{ rad/s}$ ( $\lambda_{12} = \lambda_0 = 700 \text{ nm}$ )
Дипольный момент перехода 12	$d_{12} = 20 \text{ D}$
Частота перехода 13	$\omega_{13} = 4\omega_{12}$
Дипольный момент перехода 13	$d_{13} = d_{12}$
Частота перехода 23 в атоме водорода (длина волны перехода)	$\omega_{23} = \omega_{13} - \omega_{12}$
Дипольный момент перехода 23	$d_{23} = 0$
Концентрация атомов	$N_0 = 10^{13} \text{ cm}^{-3}$
Времена релаксации $T_{ik}$	$T_{ik} = 1 \text{ ns}$



**Рис. 2.** Пространственно-временная динамика разности населенностей двухуровневой среды  $n(z, t) = \rho_{11} - \rho_{22}$ .

Рисунки 2,3 иллюстрируют типичную пространственно-временную динамику разности населенностей и поляризации среды соответственно. Видно формирование гармонической решетки населенностей после прохождения второго импульса. Последующие импульсы управляют параметрами данных решеток — меняют их форму и мультиплицируют их пространственную частоту. Под действием импульсов происходит формирование как бегущих, так и стоячих волн поляризации. Подобная динамика наблюдалась ранее в двухуровневой среде [36–38].

### Динамика решеток разности населенностей и структур поляризации в трехуровневой среде

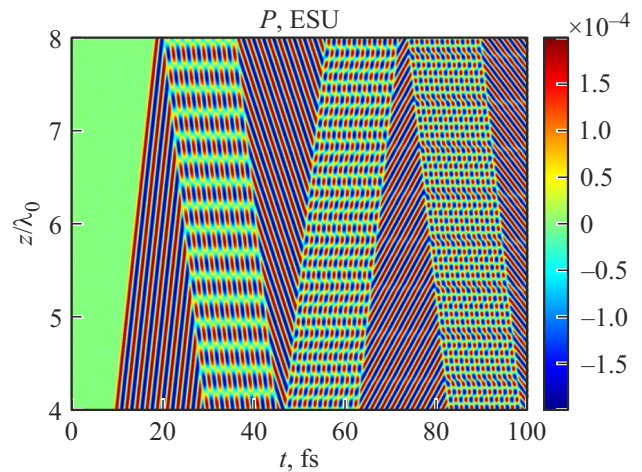
Теперь учтем наличие третьего уровня среды. Оставляя все параметры падающих импульсов и среды, как

и в предыдущем разделе, рассмотрим динамику поляризации и разности населенностей в трехуровневой среде. Система уравнений для матрицы плотности трехуровневой среды имеет известный вид [44]

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \rho_{21} = & -\rho_{21}/T_{21} - i\omega_{12}\rho_{21} - i\frac{d_{12}}{\hbar} E(\rho_{22} - \rho_{11}) \\ & - i\frac{d_{13}}{\hbar} E\rho_{23} + i\frac{d_{23}}{\hbar} E\rho_{31}, \end{aligned} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \rho_{32} = & -\rho_{32}/T_{32} - i\omega_{23}\rho_{32} - i\frac{d_{23}}{\hbar} E(\rho_{33} - \rho_{22}) \\ & - i\frac{d_{12}}{\hbar} E\rho_{31} + i\frac{d_{13}}{\hbar} E\rho_{21}, \end{aligned} \quad (9)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \rho_{31} = & -\rho_{31}/T_{31} - i\omega_{13}\rho_{31} - i\frac{d_{13}}{\hbar} E(\rho_{33} - \rho_{11}) \\ & - i\frac{d_{12}}{\hbar} E\rho_{32} + i\frac{d_{23}}{\hbar} E\rho_{21}, \end{aligned} \quad (10)$$



**Рис. 3.** Пространственно-временная динамика поляризации двухуровневой среды  $P(z, t)$ .

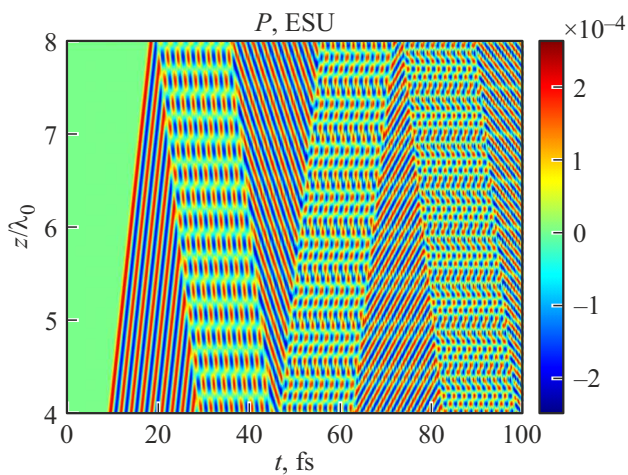


Рис. 4. Пространственно-временная динамика поляризации трехуровневой среды  $P(z, t)$ .

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \rho_{11} = & -\frac{\rho_{22}}{T_{22}} + \frac{\rho_{33}}{T_{33}} + i \frac{d_{12}}{\hbar} E(\rho_{21} - \rho_{21}^*) \\ & - i \frac{d_{13}}{\hbar} E(\rho_{13} - \rho_{13}^*), \end{aligned} \quad (11)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho_{22} = -\frac{\rho_{22}}{T_{22}} - i \frac{d_{12}}{\hbar} E(\rho_{21} - \rho_{21}^*) - i \frac{d_{23}}{\hbar} E(\rho_{23} - \rho_{23}^*), \quad (12)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho_{33} = -\frac{\rho_{33}}{T_{33}} - i \frac{d_{13}}{\hbar} E(\rho_{13} - \rho_{13}^*) + i \frac{d_{23}}{\hbar} E(\rho_{23} - \rho_{23}^*), \quad (13)$$

$$\begin{aligned} P(z, t) = & 2N_0 d_{12} \operatorname{Re} \rho_{12}(z, t) + 2N_0 d_{13} \operatorname{Re} \rho_{13}(z, t) \\ & + 2N_0 d_{23} \operatorname{Re} \rho_{32}(z, t). \end{aligned} \quad (14)$$

В этой системе уравнений  $\rho_{21}$ ,  $\rho_{32}$ ,  $\rho_{31}$  — недиагональные элементы матрицы плотности,  $\rho_{11}$ ,  $\rho_{22}$ ,  $\rho_{33}$  — населенности 1-го, 2-го и 3-го состояний среды соответственно, определяющие динамику поляризации среды,  $\omega_{12}$ ,  $\omega_{23}$ ,  $\omega_{13}$  — частоты резонансных переходов, а  $d_{12}$ ,  $d_{13}$ ,  $d_{23}$  — дипольные моменты этих переходов. Уравнения также содержат релаксационные члены  $T_{ik}$ .

Рисунки 4–7 иллюстрируют пространственно-временную динамику поляризации среды и разности населенностей на разных резонансных переходах трехуровневой среды. Видно, что эта динамика качественно совпадает с той, что наблюдалась в двухуровневой среде (рис. 2,3). Таким образом, введение дополнительного уровня не приводит к исчезновению эффекта создания решеток разности населенностей, несмотря на распространенное мнение.

Таким образом, результаты, полученные в рамках двухуровневой модели, остаются справедливыми при учете дополнительных уровней, что говорит в пользу двухуровневого приближения. Данный результат качественно согласуется с другими результатами когерентного взаимодействия предельно коротких импульсов с резонансными средами, в которых показано, что формирование диссипативных солитонов самоиндуцированной

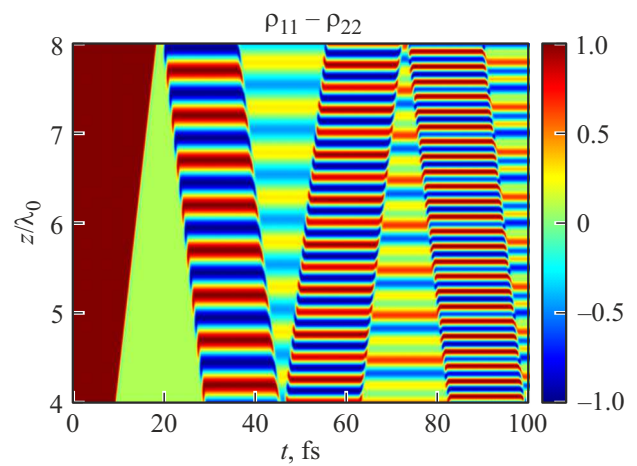


Рис. 5. Пространственно-временная динамика разности населенностей  $\rho_{11} - \rho_{22}$  трехуровневой среды.

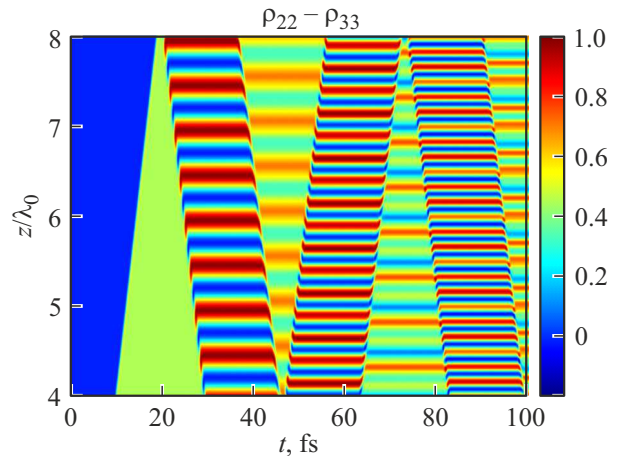


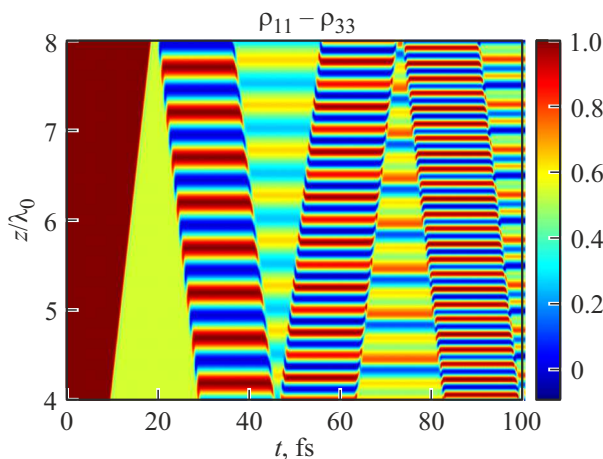
Рис. 6. Пространственно-временная динамика разности населенностей  $\rho_{22} - \rho_{33}$  трехуровневой среды.

прозрачности, изначально предсказанное в двухуровневых средах, сохраняется и в трехуровневой среде [45,46].

## Заключение

В настоящей работе на основании численного решения системы уравнений Максвелла-Блоха проведено сравнение динамики решеток разности населенностей и поведения поляризации двухуровневой и трехуровневой резонансных сред, возбуждаемых последовательностью полуцикловых импульсов, одновременно не перекрывающихся в среде. Показано, что динамика решеток разности населенностей и поляризации трехуровневой среды имеет качественно аналогичное поведение, что и в двухуровневой среде при выбранных параметрах расчета.

Представленные выше результаты для трехуровневой среды подтверждают полученные ранее результаты с использованием двухуровневой модели среды и тем



**Рис. 7.** Пространственно-временная динамика разности населенностей  $\rho_{11} - \rho_{33}$  трехуровневой среды.

самым расширяют область применимости последней. Таким образом, формирование решеток разности населенностей с помощью ПКИ, изначально предсказанное в двухуровневой среде, по-видимому, является общим свойством, присущим и многоуровневым средам. В пользу данного утверждения следует также экспериментальное наблюдение осцилляций Раби (*carrier wave Rabi flopping*) под действием одноциклового импульса в полупроводниках [47], изначально предсказанных в двухуровневой среде [31]. Отметим, что приведенный выше пример аналогичности динамики системы в двухуровневом и многоуровневом приближениях отнюдь не единственный, результаты других работ также подтверждают данный вывод [48–51].

Физически сохранение решеток в многоуровневой среде легко понять из следующих простых соображений. Короткий полупериодный импульс, пройдя сквозь среду, оставляет ее после себя в так называемом суперпозиционном состоянии. При этом недиагональные элементы матрицы плотности (когерентность среды) осциллируют на каждом резонансном переходе среды на частоте перехода в течение времени релаксации поляризации  $T_2$ . Эти осцилляции будут всегда на каждом резонансном переходе среды в независимости от того, сколько уровней среды включено в рассмотрение в данной задаче. Каждый последующий импульс будет взаимодействовать с этими осцилляциями когерентности, что будет приводить к возникновению решеток населенностей на каждом резонансном переходе среды. Данный вывод согласуется с результатами численного решения уравнения Шредингера с учетом ионизации среды [52].

### Финансирование работы

Исследования выполнены при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта 21-72-10028 (расчет

динамики решеток разности населенностей в трехуровневой среде) и Государственным заданием ФТИ им. А.Ф. Иоффе, тема 0040-2019-0017 (расчет динамики решеток разности населенностей в двухуровневой среде).

### Конфликт интересов

Авторы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

### Список литературы

- [1] F. Krausz, M. Ivanov. *Rev. Mod. Phys.*, **81**, 163 (2009).
- [2] Е.А. Хазанов. *Квант. электрон.*, **52**, 208 (2022). [E.A. Khazanov. *Quant. Electron.*, **52**, 208 (2022)].
- [3] K. Midorikawa. *Nat. Photonics*, **16**, 267 (2022).
- [4] F. Cegari, G. Sansone, S. Stagira, C. Vozzi, M. Nisoli. *J. Physics B: Atomic, Molecular and Optical Physics*, **49**, 062001 (2016).
- [5] M.T. Hassan, T.T. Luu, A. Moulet, O. Raskazovskaya, P. Zhokhov, M. Garg, N. Karpowicz, A.M. Zheltikov, V. Pervak, F. Krausz, E. Goulielmakis. *Nature*, **530**, 66 (2016).
- [6] H.Y. Kim, M. Garg, S. Mandal, S. Mandal, L. Seiffert, T. Fennel, E. Goulielmakis. *Nature*, **613**, 662 (2023).
- [7] NobelPrize.org, Nobel Prize Outreach AB 2023, Press release (accessed: 4 Oct. 2023). URL: <https://www.nobelprize.org/prizes/physics/2023/press-release>
- [8] H.-C. Wu, J. Meyer-ter-Vehn. *Nature Photon.*, **6**, 304 (2012).
- [9] J. Xu, B. Shen, X. Zhang, Y. Shi, L. Ji, L. Zhang, T. Xu, W. Wang, X. Zhao, Z. Xu. *Sci. Rep.*, **8**, 2669 (2018).
- [10] S. Wei, Y. Wang, X. Yan, B. Eliasson. *Phys. Rev. E*, **106**, 025203 (2022).
- [11] Q. Xin, Y. Wang, X. Yan, B. Eliasson. *Phys. Rev. E*, **107**, 035201 (2023).
- [12] Н.Н. Розанов, Р.М. Архипов, М.В. Архипов. *УФН*, **188**, 1347 (2018). [N.N. Romanov, R.M. Arkhipov, M.V. Arkhipov. *Phys. Usp.*, **61**, 1227 (2018)].
- [13] Р.М. Архипов, М.В. Архипов, Н.Н. Розанов. *Квант. электрон.*, **50** (9), 801 (2020). [R.M. Arkhipov, M.V. Arkhipov, N.N. Rosanov. *Quant. Electron.*, **50** (9), 801 (2020)].
- [14] Р.М. Архипов, М.В. Архипов, А.В. Пахомов, П.А. Образцов, Н.Н. Розанов. *Письма в ЖЭТФ*, **117** (1), 10 (2023). [R.M. Arkhipov, M.V. Arkhipov, A.V. Pakhomov, P.A. Obraztsov, N.N. Rosanov. *JETP Letters*, **117** (1), 8 (2023)].
- [15] Н.Н. Розанов. *УФН*, **193**, 1127 (2023). [N.N. Rosanov. *Phys. Usp.*, **66**, 1059 (2023)].
- [16] Н.Н. Розанов, М.В. Архипов, Р.М. Архипов, А.В. Пахомов. *Коллективная монография „Терагерцовая фотоника“* под ред. В.Я. Панченко, А.П. Шкуринова (РАН, М., 2023), с. 360–393.
- [17] N.N. Rosanov, M.V. Arkhipov, R.M. Arkhipov, A.V. Pakhomov. *Contemporary Physics*, in press.
- [18] P.H. Bucksbaum. *AIP Conference Proc.*, **323** (1), (1994).
- [19] D. Dimitrovski, E.A. Solov'ev, J.S. Briggs. *Phys. Rev. A*, **72** (4), 043411 (2005).
- [20] R.M. Arkhipov, M.V. Arkhipov, I. Babushkin, A. Demircan, U. Morgner, N.N. Rosanov. *Opt. Lett.*, **44**, 1202 (2019).
- [21] N. Rosanov, D. Tumakov, M. Arkhipov, R. Arkhipov. *Phys. Rev. A*, **104** (6), 063101 (2021).
- [22] A. Pakhomov, M. Arkhipov, N. Rosanov, R. Arkhipov. *Phys. Rev. A*, **105**, 043103 (2022).

- [23] R. Arkhipov, P. Belov, A. Pakhomov, M. Arkhipov, N. Rosanov. *JOSA B*, **41** (1), 285 (2024).
- [24] Р.М. Архипов, М.В. Архипов, Н.Н. Розанов. Письма в ЖЭТФ, **111**, 586 (2020). [R.M. Arkhipov, M.V. Arkhipov, N.N. Rosanov. *JETP Lett.*, **111**, 484 (2020)].
- [25] Л.В. Келдыш. УФН, **187**, 1280 (2017). [L.V. Keldysh. *Phys. Usp.*, **60**, 1187 (2017)].
- [26] S.L. McCall, E.L. Hahn. *Phys. Rev.*, **183**, 457 (1969).
- [27] П.Г. Крюков, В.С. Летохов. УФН, **99**, 169 (1969). [P.G. Kryukov, V.S. Letokhov. *Sov. Phys.Usp.*, **12**, 641 (1970)].
- [28] И.А. Полуэктов, Ю.М. Попов, В.С. Ройтберг. УФН, **114**, 97 (1974). [I.A. Poluektov, Yu.M. Popov, V.S. Roitberg. *Sov.Phys.Usp.*, **18**, 673 (1975)].
- [29] Л. Аллен, Дж. Эберли. *Оптический резонанс и двухуровневые атомы* (Мир, М., 1978). [L. Allen, J.H. Eberly. *Optical resonance and two-level atoms* (Wiley, N.Y.,1975)].
- [30] X. Song, W. Yang, Z. Zeng, R. Li, Z. Xu. *Phys. Rev. A*, **82**, 053821 (2010).
- [31] S. Hughes. *Phys. Rev. Lett.*, **81**, 3363 (1998).
- [32] A.V. Tarasishin, S.A. Magnitskii, V.A. Shuvaev, A.M. Zheltikov. *Opt. Express*, **8**, 452 (2001).
- [33] D.V. Novitsky. *Phys. Rev. A*, **84**, 013817 (2011).
- [34] D.V. Novitsky. *Phys. Rev. A*, **85**, 043813 (2012).
- [35] R. Arkhipov, M. Arkhipov, I. Babushkin, A. Pakhomov, N. Rosanov. *JOSA B*, **38** (6), 2004 (2021).
- [36] R.M. Arkhipov, M.V. Arkhipov, I. Babushkin, A. Demircan, U. Morgner, N.N. Rosanov. *Opt. Lett.*, **41**, 4983 (2016).
- [37] R.M. Arkhipov, M.V. Arkhipov, I. Babushkin, A. Demircan, U. Morgner, N.N. Rosanov. *Sci. Rep.*, **7**, 12467 (2017).
- [38] R.M. Arkhipov, M.V. Arkhipov, A.V. Pakhomov, I. Babushkin, N.N. Rosanov. *Laser Phys. Lett.*, **14**, 1 (2017).
- [39] Е.И. Штырков. Опт. и спектр., **114**, 105 (2013). [E.I. Shtyrkov. *Opt. Spectrosc.*, **114**, 96 (2013)].
- [40] Р.М. Архипов. Письма в ЖЭТФ, **113**, 636 (2021). [R.M. Arkhipov. *JETP Lett.*, **113**, 611 (2021)].
- [41] R.M. Arkhipov, M.V. Arkhipov, A.V. Pakhomov, N.N. Rosanov. *Laser Physics*, **32** (6), 066002 (2022).
- [42] R.M. Arkhipov. *Laser Phys.*, **34**, 065301 (2024).
- [43] R. Arkhipov, M. Arkhipov, A. Pakhomov, O. Diachkova, N. Rosanov. *Phys. Rev. A*, **109**, 063113 (2024).
- [44] А. Ярив. *Квантовая электроника* (Сов. Радио, М., 1980). [A. Yariv. *Quantum Electronics* (Wiley, NY., 1975)].
- [45] Н.В. Высотина, Н.Н. Розанов, В.Е. Семенов. Письма в ЖЭТФ, **83** (7), 337 (2006). [N.V. Vysotina, N.N. Rozanov, V.E. Semenov. *JETP Lett.*, **83** (7), 279 (2006)].
- [46] Н.Н. Розанов. *Диссипативные оптические солитоны. От микро-к нано-и атто* (Физматлит, М., 2011).
- [47] O.D. Mücke, T. Tritschler, M. Wegener, U. Morgner. *Phys. Rev. Lett.*, **87** (5), 057401 (2001).
- [48] Р.М. Архипов, М.В. Архипов, А.В. Пахомов, О.О. Дьячкова, Н.Н. Розанов. Письма в ЖЭТФ, **117** (8), 580 (2023). [R.M. Arkhipov, M.V. Arkhipov, A.V. Pakhomov, O.O. Diachkova, N.N. Rosanov. *JETP Lett.*, **117**, 574 (2023)].
- [49] A. Pakhomov, N. Rosanov, M. Arkhipov, R. Arkhipov. *J. Opt. Soc. Am. B*, **41**, 46 (2024).
- [50] A. de las Heras, C. Hernández-García, J. Serrano, T. Popmintchev, L. Plaja. In: *European Quantum Electronics Conference* (EQEC 2023), Technical Digest Series (Optica Publishing Group, 2023), p. ee\_3\_5.
- [51] S. Nandi, E. Olofsson, M. Bertolino et al. *Nature*, **608**, 488 (2022).
- [52] Р.М. Архипов, О.О. Дьячкова, П.А. Белов, М.В. Архипов, А.В. Пахомов, Н.Н. Розанов. ЖЭТФ, **166**, 2(8), 1–12 (2024).