

14.2

## Использование в медицине спеклоподобных структур со скейлингом пространственных спектров

© П.В. Короленко, Р.Т. Кубанов

Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, Москва, Россия  
E-mail: pvkorolenko@rambler.ru

Поступило в Редакцию 7 ноября 2023 г.

В окончательной редакции 1 апреля 2024 г.

Принято к публикации 2 апреля 2024 г.

Рассмотрена группа междисциплинарных вопросов, относящихся к использованию представлений современной фрактальной оптики в офтальмологии и арт-терапии. Для расширения типоряда предъявляемых пациентам в ходе лечения тестовых оптических изображений и повышения эффективности светостимуляции предлагается включить в перечень используемых изображений спеклоподобные световые структуры с мультифрактальной геометрией и геометрией полиномиальных аттракторов. Для обоснования этого предложения выполнен анализ скейлинговых характеристик их пространственных спектров, показавший, что они аналогичны соответствующим характеристикам фрактальных изображений, уже доказавших свою эффективность в медицинской практике.

**Ключевые слова:** фракталы, спеклы, арт-терапия, офтальмология.

DOI: 10.61011/PJTF.2024.14.58305.19796

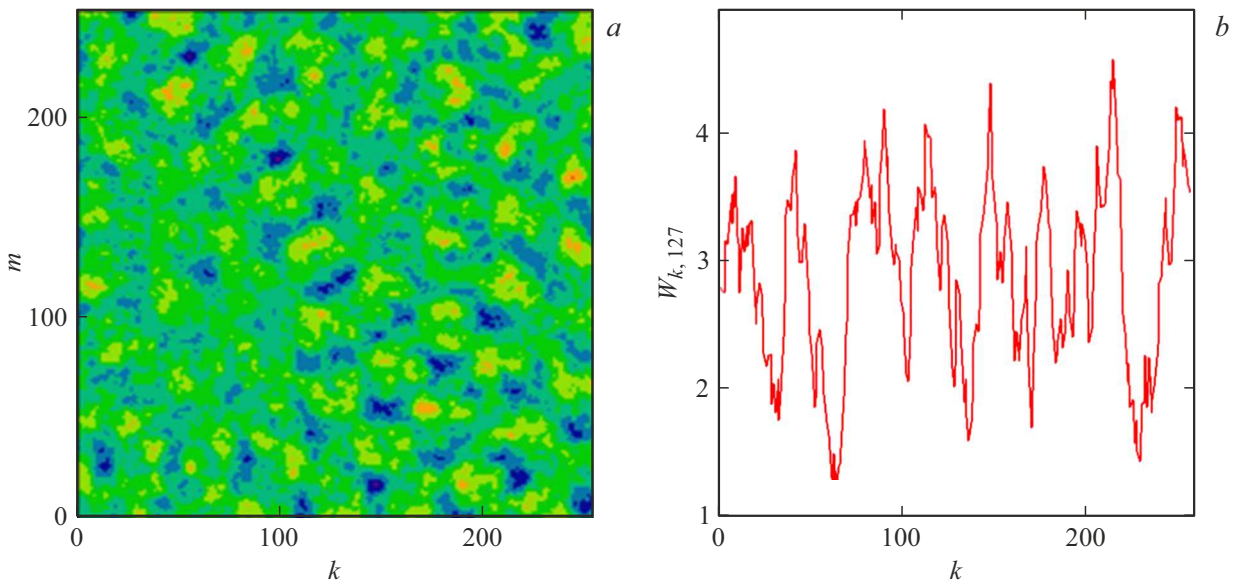
Фрактальные методы и подходы вошли в практику современной медицины (см., например, [1,2]). В частности, фрактальная спекловая технология позволила разработать новые диагностические методы [3–5], дала возможность повысить эффективность лечебных процедур в офтальмологии [6–9] и арт-терапии [10–13]. Арт-терапия (лечение с привлечением феномена красоты) основана на предъявлении пациенту различного рода изображений (часто фрактальных), удовлетворяющих тем или иным эстетическим признакам. Эстетическое воздействие фрактальных изображений на человека [14], отмечаемое многими исследователями, в значительной степени можно объяснить скейлингом (масштабной инвариантностью) пространственных спектров изображений. Дело в том, что в коре головного мозга обработка зрительных сигналов, несущих информацию об изображениях, осуществляется на основе структуры их пространственных спектров [15]. Поскольку, как было показано в ряде работ [16,17], фрактальные изображения, включая спекловые структуры, обладают самоподобными пространственными спектрами, при их созерцании отсутствует необходимость в восприятии (обработке) спектров в широком частотном диапазоне, достаточно зафиксировать лишь их низкочастотную часть. Это ускоряет и облегчает процесс зрительного восприятия рассматриваемых объектов и, как следствие, создает ощущение комфорта и эстетического наслаждения. Происходящее при этом укрепление связей между нейронами в коре головного мозга способствует излечению ряда глазных болезней (например, глаукомы). Тем самым фрактальную светостимуляцию можно рассматривать в качестве универсального метода улучшения здоровья человека.

Существует, однако, необходимость в исследовании возможности перенесения сформулированной выше концепции на другие, иным образом структурированные световые поля. Это связано с тем, что многие объекты, изображения которых используются в арт-терапии, имеют природное происхождение и далеко не всегда могут описываться правильными фракталами. Поэтому одна из рассматриваемых в настоящей работе задач состоит в установлении вида трансформации пространственных спектров при переходе от фрактальных световых распределений к мультифрактальным, свойственным многим природным объектам. Другая решаемая задача нацелена на выявление скейлинга в спектральных характеристиках световых структур, реализующих подходы нелинейной динамики.

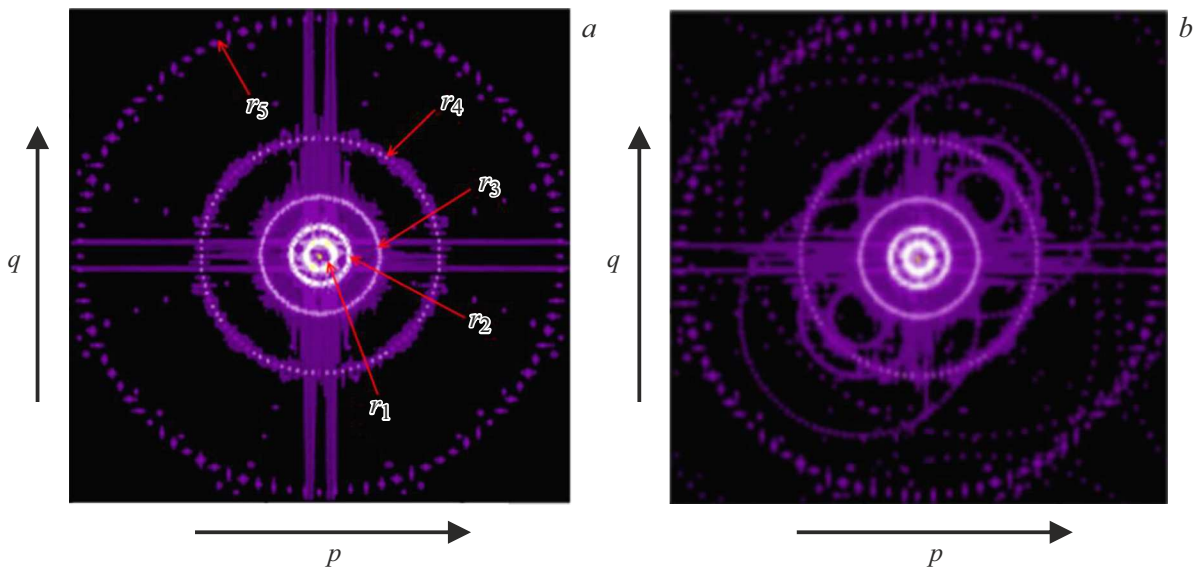
Распределение поля мультифрактальной световой волны задавалось с помощью модернизированной двумерной функции Вейерштрасса, имеющей вид [18]:

$$W_{k,m} = \sigma \left[ \sum_{v=0}^V \sum_{n=0}^N \left[ \left[ b^{(D_0+d \sin[2\pi r s(k+m)]-2)n} \times \sin \left[ 2\pi s b^n \left[ \left( k - \frac{K+1}{2} \right) \sin(\alpha v) + \left( m - \frac{K+1}{2} \right) \cos(\alpha v) \right] + \psi_n + \psi_v \right] \right] \right] \right] + A. \quad (1)$$

Здесь  $W_{k,m}$  — амплитуда поля,  $k, m$  — дискретные поперечные координаты ( $0 \leq k, m \leq K$ ),  $\sigma$  — нормировочный множитель,  $N$  — количество гармоник,  $V$  — количество азимутальных составляющих,  $n$  — номер гармоники,  $v$  — индекс азимутальной составляющей



**Рис. 1.** *a* — общий вид спеклоподобного излучения, *b* — распределение поля в поперечном сечении.



**Рис. 2.** Спектры монофрактальной (*a*) и мультифрактальной (*b*) структуры.  $r_1, r_2, r_3, r_4, r_5$  — радиусы окружностей спектральных максимумов,  $p, q$  — пространственные частоты.

волны,  $\alpha$  — элементарный азимутальный угол поворота,  $b$  — параметр скейлинга,  $s$  — масштабирующий параметр,  $\psi_n, \psi_v$  — фазы компонент поля,  $A$  — дополнительная составляющая с однородным распределением амплитуды поля. При случайных значениях фаз  $\psi_n, \psi_v$  поле приобретает спеклоподобный вид,  $D_0$  — фрактальная размерность образующей монофрактальной волны,  $d$  — полуширина диапазона изменения фрактальной размерности при мультифрактальном представлении поля,  $r$  — динамический параметр изменения фрактальной размерности.

На рис. 1 показаны задаваемые выражением (1) общий вид световой спеклоподобной волны и распре-

деление амплитуды поля в поперечном направлении. Расчет проводился для следующего набора параметров:  $N = 5, V = 47, \sigma = 0.15, b = 2, s = 0.03, d = 0, r = 2, K = 255, A = 3, \alpha = \pi/48, D_0 = 1.25, n = 0-N, v = 0-V, m = 0-K, k = 0-K, \psi_v = \text{rnd}(v)2\pi/(v+1), \psi_n = \text{rnd}(n)4\pi/(n+1)$ . При таких параметрах, поскольку  $d = 0$ , структура является монофрактальной. Ее пространственный спектр, рассчитанный с использованием процедуры быстрого преобразования Фурье, показан на рис. 2, *a*. Видно, что, несмотря на неупорядоченное распределение амплитуды поля, спектр характеризуется высокой степенью симметрии. Спектральные максимумы образуют систему убывающих по интенсивно-

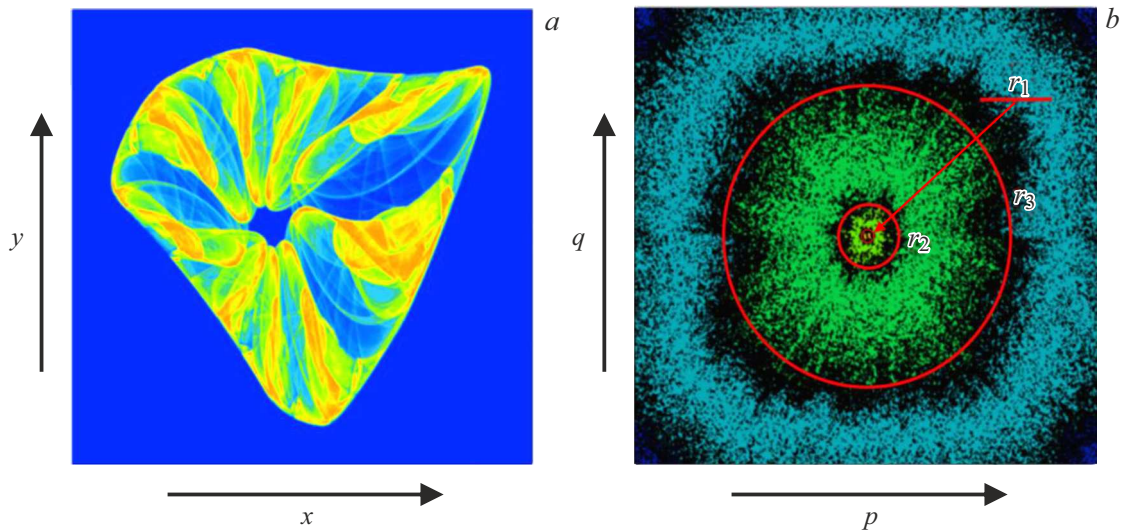


Рис. 3. Структура аттрактора (a) и его спектр (b).

сти концентрических окружностей, отношение радиусов  $r_i$  которых соответствует коэффициенту скейлинга  $b = 2$  ( $r_2 : r_1 = r_3 : r_2 = r_4 : r_3 = r_5 : r_4 = 2$ ). Подобный спектр свойствен фрактальным изображениям с благоприятным фоном восприятия.

Рассмотрим теперь, к чему приведет переход к мультифрактальному представлению световой структуры. Этот переход осуществим путем изменения величины  $d$ . Для определенности будем считать, что в отличие от предыдущего случая  $d = 0.2$ . Оценки показывают, что такое увеличение  $d$  не приводит к сколь-нибудь значительному изменению статистики поля, однако оно вызывает заметные структурные возмущения в пространственном спектре. Это видно из рис. 2, b, где графически представлены особенности распределения пространственных частот. Изменения в спектре обусловлены появлением в нем дополнительных кольцевых элементов, располагающихся вблизи максимумов монофрактала.

Количественная оценка происходящих в спектре изменений может быть получена путем определения коэффициента корреляции  $C$  между спектральными распределениями монофрактала и мультифрактала. При логарифмическом представлении спектров он оказывается равным  $C = 0.88$ . Такой достаточно высокий коэффициент корреляции указывает на значительную степень устойчивости структурной морфологии изначального спектра. При переходе к мультифракталу стандартное отклонение от среднего значения распределения амплитуды существенным образом не менялось, оставаясь на уровне  $\xi = 0.29$ .

В том случае, когда изменения фрактальной размерности перекрывают весь возможный диапазон ( $D_0 = 1.5$ ,  $d = 0.49$ ), коэффициент корреляции уменьшался до величины  $C = 0.7$ , а стандартное отклонение увеличивалось до значения  $\xi = 0.35$ . Однако при таком, казалось бы, незначительном ухудшении корреляции следует счи-

таться с тем, что возникающие паразитные спектральные максимумы могли достигать величины 0.8 по отношению к соседним максимумам монофрактала. Такая ситуация не может считаться благоприятной для реализации многих медицинских приложений, связанных с обработкой оптических сигналов в коре головного мозга. Скорее всего, для уменьшения влияния дополнительных спектральных максимумов следует выбирать значения параметров  $D_0$  и  $d$  таким образом, чтобы эти максимумы составляли не более 15% от максимумов монофрактала.

Существуют литературные свидетельства [10], указывающие на то, что определенные эстетические признаки свойственны некоторым графическим иллюстрациям процессов, развивающихся на основе детерминированного хаоса. Воспользуемся результатами работы [19] для анализа характеристик аттракторов, сформированных с помощью полиномов вида

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= a_0 + a_1x_n + a_2x_n^2 + a_3x_ny_n + a_4y_n + a_5y_n^2, \\ y_{n+1} &= a_6 + a_7x_n + a_8x_n^2 + a_9x_ny_n + a_{10}y_n + a_{11}y_n^2. \end{aligned} \quad (2)$$

В зависимости от величины коэффициентов  $a_i$  итерационная процедура позволяет строить аттракторы с разной конфигурацией. В некоторых случаях фазовые траектории аттракторов формируют систему структурных фрагментов, придающих аттрактору спеклоподобный вид. Рассмотрим свойства одного из таких аттракторов, который строится при задании следующей последовательности коэффициентов:  $a_0 = 0$ ,  $a_1 = -1$ ,  $a_2 = 0.5$ ,  $a_3 = -1.1$ ,  $a_4 = -0.4$ ,  $a_5 = 0.3$ ,  $a_6 = 0.2$ ,  $a_7 = 0.3$ ,  $a_8 = -0.5$ ,  $a_9 = 0.7$ ,  $a_{10} = -1.1$ ,  $a_{11} = 0.1$ .

Картина аттрактора после 3000 итераций процесса его построения и соответствующий ей пространственный спектр показаны на рис. 3. Несмотря на то что отдельные фрагменты в картине аттрактора, характеризующиеся повышенной интенсивностью, по своей форме и положе-

нию значительно отличаются от классических спеклов, спектр полученной структуры имеет некоторые общие черты со спектром фрактальных спеклов. Расположение спектральных максимумов имеет осесимметричный характер, и окружности, характеризующие его, обладают радиусами, отношение которых близко к постоянной величине, равной 3.2 (параметр скейлинга). Это указывает на скейлинг пространственного спектра аттрактора.

Таким образом, можно сделать вывод, что изображения фрагментарно структурированных полиномиальных аттракторов характеризуются скейлингом пространственных спектров. Это объясняет наличие у них эстетических признаков, позволяющих использовать их в светотерапии.

### Конфликт интересов

Авторы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

### Список литературы

- [1] Н.А. Торхов, М.П. Евстигнеев, А.А. Мосунов, В.А. Бучельникова, Письма в ЖТФ, **48** (7), 43 (2022). DOI: 10.21883/PJTF.2022.07.52293.19074 [N.A. Torkhov, M.P. Evstigneev, A.A. Mosunov, V.A. Buchelnikova, Tech. Phys. Lett., **48** (4), 32 (2022). DOI: 10.21883/TPL.2022.04.53169.19074].
- [2] М.В. Зуева, М.А. Ковалевская, О.В. Донкарева, А.И. Каранкевич, И.В. Цапенко, А.А. Таранов, В.Б. Антонян, Офтальмология, **16** (3), 317 (2019). DOI: 10.18008/1816-5095-2019-3-317-328
- [3] A.B. Şişli, A.J. Pahnvar, M. Engin, E.Z. Engin, Celal Bayar Univ. J. Sci., **16** (1), 47 (2020). DOI: 10.18466/cbayarfb.513732
- [4] O. Carvalho, M. Benderitter, L. Roy, J. Biomed. Opt., **15** (2), 027013 (2010). DOI: 10.1117/1.3394261
- [5] А.С. Ульянов, Квантовая электроника, **38** (6), 557 (2008). [A.S. Ulyanov, Quantum Electron., **38** (6), 557 (2008). DOI: 10.1070/QE2008v038n06ABEH013867].
- [6] Г.И. Каданер, Б.В. Овчинников, М.М. Рубинштейн, Опт. журн., **74** (12), 19 (2007).
- [7] Т.П. Кащенко, Т.А. Корнюшина, А.Р. Базарбаева, М.Д. Магарамова, Р.Д. Кацанашвили, Вестн. офтальмологии, **130** (5), 48 (2014). <https://www.mediasphera.ru/issues/vestnik-oftalmologii/2014/5/030042-465X201458?lang=ru>
- [8] Ю.В. Матросова, О.Л. Фабрикантов, Офтальмология, **15** (2S), 52 (2018). DOI: 10.18008/1816-5095-2018-2S-52-57
- [9] В.Т. Прокопенко, Н.В. Матвеев, Р.В. Олейник, Н.П. Сапунова, С.С. Резников, Светотехника, № 4, 50 (2021). <https://l-e-journal.com/journals/zhurnal-svetotekhnika-4-2021/vliyanie-fraktalnykh-lazernykh-dinamicheskikh-izobrazheniy-na-funktsionalnoe-sostoyanie-cheloveka-sv/>
- [10] С.Д. Пьянкова, Психологические исследования, **12** (63), 238 (2019). DOI: 10.54359/ps.v12i63.238
- [11] R.M. Simion, J. Exp. Psychotherapy, **19**, N 2(74), 14 (2016).
- [12] А.И. Копытин, Современная клиническая арт-терапия (Питер, СПб., 2015).
- [13] R. Joschko, S. Roll, S.N. Willich, A. Berghöfer, Syst. Rev., **11**, 96 (2022). DOI: 10.1186/s13643-022-01976-7
- [14] H.O. Peitgen, P.H. Richter, *The beauty of fractals* (Springer-Verlag, N.Y., 1986). <https://www.google.com/search?q=H.O.+Peitgen%2C+P.H.+Richter%2C+The+Beauty+of+Fractals+>
- [15] Ю.Е. Шелепин, *Введение в нейрокогнику* (Троицкий мост, СПб., 2017).
- [16] А.М. Зотов, П.В. Короленко, А.Ю. Мишин, Ю.В. Рыжикова, Вестн. МГУ. Сер. 3. Физика. Астрономия, № 6, 52 (2019). [A.M. Zotov, P.V. Korolenko, A.Yu. Mishin, Yu.V. Ryzhikova, Moscow Univ. Phys., **74** (6), 625 (2019). DOI: 10.3103/S0027134919060262].
- [17] О.М. Вохник, П.В. Короленко, Р.Т. Кубанов, Изв. РАН. Сер. физ., **86** (11), 1602 (2022). DOI: 10.31857/S0367676522110321 [O.M. Vokhnik, P.V. Korolenko, R.T. Kubanov, Bull. Russ. Acad. Sci. Phys., **86** (11), 1327 (2022). DOI: 10.3103/S1062873822110326].
- [18] П.В. Короленко, М.С. Маганова, А.В. Меснянкин, *Новационные методы анализа стохастических процессов и структур в оптике* (НИИЯФ МГУ, М., 2004).
- [19] J.C. Sprott, *Elegant fractals: automated generation of computer art (Fractals and dynamics in mathematics, science, and the arts: theory and applications)* (World Scientific Publ. Co, Singapore, 2018).