06

Ангармонический осциллятор как модель Блоха–де Сигерта

© А.М. Башаров[1], А.И. Трубилко[2]

[1] Национальный исследовательский центр „Курчатовский институт“,
Москва, Россия
[2] Санкт-Петербургский университет ГПС МЧС России,
Санкт-Петербург, Россия
e-mail basharov@gmail.com, trubilko.andrey@gmail.com

Поступила в редакцию 23.03.2024 г.
В окончательной редакции 25.03.2024 г.
Принята к публикации 18.05.2024 г.

Рассмотрена модель квантового ангармонического осциллятора, взаимодействующего с классическим когерентным полем одной несущей частоты. Показано, что применение алгебраической теории возмущений в случае резонансного взаимодействия приводит к модели двухуровневого атома, у которого штарковский сдвиг резонансных уровней различен в зависимости от резонансного квантового перехода и отличается в общем случае как от сдвига Блоха–де Сигерта, так и от штарковского сдвига обычного многоуровневого атома. Построенная модель позволяет описывать когерентные эффекты в ансамбле ангармонических осцилляторов, что показано на примере нутационных колебаний.

Ключевые слова:

DOI: 10.61011/OS.2024.05.58459.6186-24

1. Введение

Квантовый осциллятор представляет собой важнейшую модель квантовой и нелинейной оптики, которая лежит в основе теоретических представлений о взаимодействии электромагнитного излучения с оптическими резонаторами, сверхпроводящими структурами в условиях эффекта Джозефсона, а также о самом электромагнитном излучении в случае учета его квантового состояния. Однако в случае гармонического квантового осциллятора в ансамблях таких осцилляторов невозможно формирование основных нелинейно-оптических эффектов, таких как оптическая нутация, фотонное эхо, сверхизлучение [1], которые востребованы как в спектроскопии, так и в задачах обработки информации и квантовом компьютинге [2,3]. Причина такой картины взаимодействия электромагнитного излучения с квантовыми гармоническими осцилляторами кроется в структуре алгебры операторов рождения и уничтожения, которая описывает гамильтониан задачи — эта алгебра является математически разрешимой [1]. Чтобы обойти это „препятствие“, на практике рассматривают либо комбинированные системы, например, внутрь резонатора помещают резонансные атомы [4,5], либо переходят к учету ангармонизма [6].

Как правило, учет ангармонизма квантового осциллятора в задачах нелинейной и квантовой оптики сводится к модели вращающейся волны, в которой пара резонансных уровней из неэквидистантного спектра ангармонического осциллятора взаимодействует с электромагнитным полем и система, таким образом, становится аналогичной двухуровневой модели атома, резонансно взаимодействующего с классической когерентной волной [7].

В статье мы обращаем внимание на существенное отличие модели двухуровневой системы, получаемой из квантового ангармонического осциллятора, и модели двухуровневой системы, получаемой из атома. Отличие кроется в процессах второго порядка по взаимодействию обсуждаемых объектов с электромагнитной волной. Кроме того, если ограничиться случаем классической когерентной волны одной несущей частоты и ангармонизмом двух низших степеней, то имеем всего три типа резонанса с поглощением одного кванта из электромагнитного поля

Известно, что в высокочастотном электромагнитном поле энергетические атомные уровни приобретают сдвиг, который известен как штарковский сдвиг в силу высокочастотного эффекта Штарка [8–10]. В величину штарковского сдвига резонансного уровня дают вклады не только резонансные уровни, но и другие атомные уровни, среди которых вклад резонансных уровней является, как правило, малой величиной [9,10]. Установленной нами особенностью двухуровневой модели резонансного взаимодействия ангармонического осциллятора с когерентным полем является полное отсутствие вклада других осцилляторных уровней. В результате этой особенности соотношение между сдвигами резонансных уровней является вполне определенным и не может быть таким произвольным, как в случае двухуровневой модели, получаемой из задачи резонансного взаимодействия с многоуровневым атомом. Это различие определяет протекание коллективных процессов в ансамблях возбужденных двухуровневых частиц, например, при формировании импульса сверхизлучения [11].

Для получения двухуровневой модели резонансного взаимодействия ангармонического осциллятора с когерентной волной мы используем алгебраическую теорию возмущений и последовательно сводим задачу к двухуровневой модели и сравниваем ее с моделью Блоха–де Сигерта, известной из теории магнитного резонанса [12]. Сдвиг энергии резонансных уровней в модели Блоха–де Сигерта является в случае многоуровневых атомов и молекул малой величиной в общей величине штарковского сдвига уровней. Несмотря на это, исследованию сдвига Блоха–де Сигерта в разных моделях резонансных процессов до сих пор посвящается немало работ [13–18], в том числе и экспериментальных [16–19]. Отметим, что мы здесь не включаем в поле зрения квантово-механические осцилляторы, хотя для них имеется много нелинейных моделей.

Особенность нашего результата можно переформулировать следующим образом: штарковский сдвиг в многоуровневой системе, каким является ангармонический осциллятор, в случае резонансного взаимодействия с одночастотной когерентной волной отличается, вообще говоря, как от сдвига Блоха–де Сигерта, так и от случаев резонансных взаимодействий с многоуровневым атомом. Соотношение Блоха–де Сигерта для штарковских сдвигов получается только в одном из трех возможных типов резонанса, который предполагает при поглощении одного кванта электромагнитного поля возбуждение ангармонического осциллятора с основного состояния на третий. Этот случай резонанса с точки зрения эффективного гамильтониана эквивалентен абстрактной двухуровневой модели квантовой частицы. В отличие от предыдущих исследований [12–19] для получения сдвига резонансных энергетических уровней мы используем алгебраическую теорию возмущений, поскольку она позволяет единым образом рассматривать как когерентные, так и широкополосные квантованные поля. В последнем случае имеется обоснование необходимости использования алгебраической теории возмущений [20]. Отличия алгебраической теории возмущений от метода Магнуса [21] и подхода Флоке [22], которые ранее были использованы для анализа других задач резонансной физики, пояснены в [23]. Также иногда используют вариант теории возмущений работ [24,25] с теми же характерными неточностями. Отметим, что алгебраическую теорию возмущений в данной задаче можно рассматривать как обобщение метода усреднения Крылова-Боголюбова-Митропольского, изложенного в [8] для оптических задач. Сама алгебраическая теория возмущений заложена в работах [9,10,26–29].

Сначала обсуждаем особенности применения алгебраической теории возмущений, затем получаем эффективный гамильтониан ангармонического квантового осциллятора в поле резонансной когерентной волны в трех типичных случаях резонанса. В этих случаях поглощение одного кванта когерентного поля вызывает в ангармоническом осцилляторе либо одноквантовый, либо двухквантовый, либо трехквантовый переходы. Применение алгебраической теории возмущений позволило непосредственно применить результаты предыдущих исследований, выполненных в этой парадигме, для описания оптической нутации на ансамбле ангармонических осцилляторов. Тем самым демонстрируем возможности развитого подхода для описания других нелинейных оптических эффектов в системах квантовых осцилляторов. В случае нутационных колебаний представленные результаты позволяют судить о параметрах ангармонического осциллятора по экспериментальному исследованию оптической нутации. Именно оптическую нутацию в различных системах часто исследуют экспериментально [17–19].

2. Особенности алгебраической теории возмущений

Рассмотрим ангармонический квантовый осциллятор в поле когерентной резонансной волны. Условия резонанса пропишем чуть ниже. Исходным пунктом для описания оптических эффектов является уравнение Шредингера для вектора состояния $|\Psi\rangle$ ангармонического осциллятора с гамильтонианом задачи H в виде

$$i\hbar\frac{d}{dt}|\Psi\rangle = H|\Psi\rangle,\ \ H = H_{osc} + V_{int},$$

$$\begin{aligned} H_{osc} &= \hbar\Omega_c\Big(c^\dagger c + \alpha(c+c^\dagger)^3 + \beta(c+c^\dagger)^4\Big) \\ &= H_{osc-Diag} + H_{osc-Non-D}, \\ V_{int} &= g\Big(\mathscr{E}_{cl}\exp(-i\omega_{cl}t - i\Phi) \\ &\qquad + \mathscr{E}^*_{cl}\exp(i\omega_{cl}t + i\Phi)\Big)\Big(c + c^\dagger\Big). \end{aligned}$$

Здесь H_{osc} — гамильтониан осциллятора частоты Ω_c с учетом ангармонизма третьего и четвертого порядков, определяемых константами α и β. Оператор взаимодействия осциллятора с когерентной волной V_{int} определяется параметром g (например, в случае резонатора g определяет связь внешнего и внутрирезонаторного поля на зеркале). Величина $\mathscr{E}_{cl}\exp(-i\omega_{cl}t - i\Phi) + \mathscr{E}^*_{cl}\exp(i\omega_{cl}t + i\Phi)$ представляет собой напряженность электрического поля когерентной волны несущей частоты ω_{cl} и амплитуды $\mathscr{E}_{cl}$, Φ — фаза электрического поля когерентной волны в точке положения осциллятора. Считаем, что амплитуда когерентной волны $\mathscr{E}_{cl}$ медленно меняется во времени по сравнению с $\exp(\pm i\omega_{cl}t)$.

Следует заметить, что, не считая ангармонизма, рассмотренная модель с оператором взаимодействия V_{int} неоднократно рассматривалась ранее [30–33]. Чем отличается учет ангармонизма — имеется малая поправка как диагонального типа в $H_{osc-Diag}$, так и недиагонального $H_{osc-Non-D}$:

$$H_{osc-Diag} = \hbar\Omega_c N + V_1,\ \ H_{osc-Non-D} = V_2 + V_3,$$

$$N = c^\dagger c,\ V_1 = \hbar\Omega_c 6\beta\Big(N + N^2\Big),$$
$$V_2 = \hbar\Omega_c\alpha\Big((3cN + c^3) + H.c.\Big),$$
$$V_3 = \hbar\Omega_c\beta\Big((c^4 - 2c^2 + 4c^2N) + H.c.\Big).$$

Как обычно, буквы $H.c.$ заменяют собой слагаемые, эрмитово сопряженные предыдущему.

Величину β в диагональном слагаемом V_1 удобно считать „независимой" от величины β в слагаемом V_3 в нижеследующем смысле.

Согласно принципам алгебраической теории возмущений производим унитарное преобразование исходного вектора состояния $|\Psi\rangle$ открытой системы и окружения:

$$|\tilde\Psi\rangle = \hat T|\Psi\rangle,\ \hat T = e^{-iS},\ S^\dagger = S$$

и раскладываем эрмитов генератор унитарного преобразования S в ряд по имеющимся константам связи:

$$S = S^{(1,0,0,0)} + S^{(0,1,0,0)} + S^{(0,0,1,0)} + S^{(0,0,0,1)} + S^{(2,0,0,0)} \ldots, \qquad (1)$$

где каждой константе связи, а именно константам в операторах взаимодействия V_{int}, V_1, V_2 и V_3 отвечает одно место в четверке верхних индексов. При этом гамильтониан системы преобразуется в гамильтониан $\tilde H$ согласно выражению

$$\tilde H = \hat T H \hat T^\dagger - i\hbar\hat T\,\frac{d}{dt}\,\hat T^\dagger,$$

раскладывается в аналогичный (1) ряд

$$\tilde H = \tilde H^{(0,0,0,0)} + \tilde H^{(1,0,0,0)} + \tilde H^{(0,1,0,0)} + \tilde H^{(0,0,1,0)} + \tilde H^{(0,0,0,1)} + \tilde H^{(2,0,0,0)} + \ldots \qquad (2)$$

и определяет преобразованное уравнение Шредингера

$$i\hbar\,\frac{d}{dt}\,|\tilde\Psi\rangle = \tilde H|\tilde\Psi\rangle.$$

Тот факт, что в разложениях (1) и (2) при наличии трех констант взаимодействия, а именно α, β и g, мы использовали разложения по четырем константам (β использовано дважды — в первом и третьем верхнем индексе), и отражает упомянутую „независимость" констант и особенность рассмотрения методами алгебраической теории возмущений.

Принципы отбора слагаемых в генераторе преобразования и преобразованном гамильтониане четко определяются при использовании представления взаимодействия. Основным отличием метода алгебраической теории возмущений от упомянутых методов Магнуса и Флоке (а также других, базирующихся на формуле Бейкера-Хаусдорфа [9,10,24,25]), состоит в принципе отбора слагаемых в рядах (1) и (2). Наиболее компактно принцип формулируется в представлении взаимодействия — слагаемые эффективного гамильтониана в представлении взаимодействия не должны содержать слагаемые во времени, быстро меняющиеся по сравнению с $\exp(\pm i\Omega_c t)$ и $\exp(\pm i\omega_{cl} t)$. Тогда слагаемые генератора преобразования, наоборот, включают только быстро меняющиеся во времени слагаемые. Принадлежность операторов представлению взаимодействия будем отмечать явным написанием аргумента времени (за исключением зависимости от времени амплитуды когерентного поля). Здесь удается просуммировать весь ряд по первому верхнему индексу, поскольку он отвечает за диагональную добавку к гамильтониану и поэтому весь ряд слагаемых, кроме первого, будет нулевым. Этот факт мы далее используем так. Будем считать далее представлением взаимодействия такое представление, которое определяется гамильтонианом гармонического осциллятора с учетом диагональной поправки:

$$H(t) = \exp(iH_{osc-Diag}t/\hbar)H_{Non-D}\exp(-iH_{osc-Diag}t/\hbar) = V_2(t) + V_3(t) + V_{int}(t),$$

$$V_{int}(t) = g\Big(\mathscr{E}_{cl}\exp(-i\omega_{cl}t - i\Phi) + \mathscr{E}^*_{cl}\exp(i\omega_{cl}t + i\Phi)\Big)\Big(c(t) + c^\dagger(t)\Big),$$

$$c(t) = \exp(iH_{osc-Diag}t/\hbar)c\exp(-iH_{osc-Diag}t/\hbar).$$

При этом

$$i\hbar\,\frac{d}{dt}\,|\tilde\Psi\rangle = \tilde H|\tilde\Psi\rangle,\ |\tilde\Psi\rangle = \hat T(t)|\Psi(t)\rangle,$$

$$\hat T(t) = e^{-iS(t)},\ S^\dagger(t) = S(t),$$

$$\tilde H(t) = \hat T(t)V(t)\hat T^\dagger(t) - i\hbar\hat T(t)\,\frac{d}{dt}\,\hat T^\dagger(t),$$

$$V_2 = \hbar\Omega_c\alpha\Big((3c(t)N + c(t)^3) + H.c.\Big),$$

$$V_3(t) = \hbar\Omega_c\beta\Big((c(t)^4 - 2c(t)^2 + 4c(t)^2N) + H.c.\Big),$$

$$\tilde H(t) = H(t) - i\Big[S(t), H(t)\Big] - \frac{1}{2}\Big[S(t), \Big[S(t), H(t)\Big]\Big] - \ldots - i\hbar e^{-iS(t)}\,\frac{d}{dt}\,e^{iS(t)}.$$

Теперь генератор преобразования и преобразованный гамильтониан раскладываем в ряды по константам связи, определяющие только взаимодействия $V_{int}(t)$, $V_2(t)$ и $V_3(t)$. Соответственно этим взаимодействиям и отвечают разложения:

$$S(t) = S^{(1,0,0)}(t) + S^{(0,1,0)}(t) + S^{(0,0,1)}(t) + S^{(2,0,0)}(t) + \ldots, \qquad (3)$$

$$\tilde H(t) = \tilde V(t)^{(1,0,0)} + \tilde V(t)^{(0,1,0)}\tilde V(t)^{(0,0,1)} + \tilde V(t)^{(1,1,0)} + \tilde V(t)^{(1,0,1)}\tilde V(t)^{(0,1,1)} + \tilde V(t)^{(2,0,0)} + \ldots. \qquad (4)$$

Нетрудно получить:

$$\tilde{V}(t)^{(1,0,0)}(t) = \hbar\,\frac{dS^{(1,0,0)}(t)}{dt} + V_{int}(t),$$

$$\tilde{V}(t)^{(0,1,0)}(t) = \hbar\,\frac{dS^{(0,1,0)}(t)}{dt} + V_2(t),$$

$$\tilde{V}(t)^{(0,0,1)}(t) = \hbar\,\frac{dS^{(0,0,1)}(t)}{dt} + V_3(t),$$

$$\tilde{V}(t)^{(2,0,0)}(t) = \hbar\,\frac{dS^{(2,0,0)}(t)}{dt} - \frac{i}{2}\Big[S^{(1,0,0)}(t), V_{int}(t)\Big]\ldots.$$

Представляется удобным, но не обязательным, перейти к следующему представлению бозонных операторов осцилляторов через проекторы:

$$c \leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{n}|n-1\rangle\langle n|,\ \ c^{\dagger} \leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{n}|n\rangle\langle n-1|,$$

$$c^2 \leftrightarrow \sum_{n=2}^{\infty}\sqrt{n(n-1)}|n-2\rangle\langle n|, \ldots\ \ |E_n\rangle = |n\rangle, \qquad (5)$$

$$E_n = \hbar\Omega_c\Big(n + 6\beta(n+n^2)\Big),\ \ \Omega_{n,k} = \frac{E_{n,k}}{\hbar},\ \ E_{n,k} = E_n - E_k.$$

Тогда операторы задачи можно переписать в виде, сходным с операторами, определяющими задачу о взаимодействии многоуровневого атома с резонансным когерентным полем:

$$V_{int}(t) = g\Big(\mathscr{E}_{cl}\exp(-i\omega_{cl}t - i\Phi) + \mathscr{E}^{*}_{cl}\exp(i\omega_{cl}t + i\Phi)\Big)$$
$$\times\Big(\sum_{n=1}^{\infty} d_{n-1,n}|E_{n-1}\rangle\langle E_n|e^{i\Omega_{n-1,n}t} + H.c\Big),$$

$$V_2(t) = \hbar\alpha\Omega_c\Big(\Big(\sum_{n=1}^{\infty} h_{n-1,n}|E_{n-1}\rangle\langle E_n|e^{i\Omega_{n-1,n}t}$$
$$+ \sum_{n=3}^{\infty} h_{n-3,n}|E_{n-3}\rangle\langle E_n|e^{i\Omega_{n-3,n}t}\Big) + H.c.\Big),$$

$$V_3(t) = \hbar\beta\Omega_c\Big(\Big(\sum_{n=4}^{\infty} h_{n-4,n}|E_{n-4}\rangle\langle E_n|e^{i\Omega_{n-4,n}t}$$
$$+ \sum_{n=2}^{\infty} h_{n-2,n}|E_{n-2}\rangle\langle E_n|e^{i\Omega_{n-2,n}t}\Big) + H.c.\Big),$$

$$d_{n-1,n} = d_{n,n-1} = \sqrt{n},\ \ h_{n-1,n} = h_{n,n-1} = 3n^{3/2},$$
$$h_{n-3,n} = h_{n,n-3} = \sqrt{n(n-1)(n-2)},$$
$$h_{n-2,n} = h_{n,n-2} = (4n-2)\sqrt{n(n-1)},$$
$$h_{n-4,n} = h_{n,n-4} = \sqrt{n(n-1)(n-2)(n-3)}. \qquad (6)$$

В обозначениях (5) задача о резонансном взаимодействии когерентного поля с ангармоническим осциллятором становится вполне аналогичной задаче о резонансном взаимодействии когерентного поля с многоуровневым атомом. Поэтому существенное различие здесь в результатах представляется важным. В отличие от случая многоуровневого атома, константы (6), определяющие интенсивность переходов между уровнями, строго определены. У многоуровневого атома можно рассчитывать лишь на условия правила сумм [34,35], хотя в ряде случаев можно также определить аналогичные константы.

Величины $\tilde{V}^{(0,1,0)}(t)$ и $\tilde{V}^{(0,0,1)}(t)$ могут быть определены независимо от условий резонансного взаимодействия, так как они представляют собой быстро меняющиеся во времени величины. Поэтому

$$\tilde{V}^{(0,1,0)}(t) = \tilde{V}^{(0,0,1)}(t) = 0.$$

Это условие говорит об отсутствии процессов генерации гармоник в первом порядке алгебраической теории возмущений. Также из него следуют значения для $S^{(0,1,0)}$ и $S^{(0,0,1)}$, которые определяют интерференционные процессы и генерацию гармоник, однако мы их не приводим, поскольку генерацию гармоник в данной статье не рассматриваем.

3. Условие одноквантового резонанса

В зависимости от начального состояния ангармонического осциллятора (до взаимодействия с когерентным полем) можно реализовать одноквантовый резонанс с разными переходами, в которых главным условием является ненулевая заселенность одного из пары энергетических уровней. При этом в первом порядке резонансные уровни должны отличаться своим квантовым числом на единицу. В двухквантовых резонансах и резонансах более высокого порядка отличие квантового числа резонансных уровней составляет 2 и более единиц. Эти случаи здесь рассматривать не будем.

Пусть заселенность квантового состояния $|n\rangle$, $n \leq 1$ ненулевая. Частоты переходов на соседние энергетические уровни такие

$$\Omega_{n,n-1} = \Omega_c(1 + 12\beta n),\ \ \Omega_{n+1,n} = \Omega_c(1 + 12\beta(n+1)).$$

Будем считать, что ширины $\gamma_{n+1,n}$ и $\gamma_{n,n-1}$ спектральных линий квантовых переходов $|n+1\rangle \to |n\rangle$ и $|n\rangle \to |n-1\rangle$ малы:

$$\gamma_{n+1,n}, \gamma_{n,n-1} \ll 12\beta\Omega_c. \qquad (7)$$

Если также малы спектральная ширина когерентного излучения и частота Раби, то при воздействии когерентного поля несущей частоты ω_{cl} на гармонический осциллятор можно говорить о двух разных одноквантовых резонансах, когда $\omega_{cl} \cong \Omega_{n,n-1}$ или когда $\omega_{cl} \cong \Omega_{n+1,n}$. При воздействии двухчастотного поля возможен двойной резонанс в конфигурации „каскад“. С ростом числа возбуждений квантового осциллятора следует заменить принятую модель ангармонизма на другую модель, например, использовать потенциал Морза [36].

Важной особенностью однофотонного резонанса в ангармоническом осцилляторе являются переходы $|n+2\rangle \to |n\rangle$, $|n\rangle \to |n-2\rangle$ и другие при поглощении только одного кванта электромагнитного поля. Эти процессы возможны благодаря взаимодействиям $V_2(t)$ и $V_3(t)$. Они определяют процессы генерации гармоник. Мы возникающую здесь двухуровневую модель обсудим на примере переходов $|2\rangle \leftrightarrow |0\rangle$. Другой процесс, который обсудим, это резонансный переход $|3\rangle \leftrightarrow |0\rangle$ при поглощении одного кванта когерентного электромагнитного поля.

Итак, будем рассматривать следующие условия одноквантового резонанса:

$$\omega_{cl} \cong \Omega_{n+1,n}, \quad n \geq 0, \tag{8}$$

$$\omega_{cl} \cong \Omega_{2,0}, \tag{9}$$

$$\omega_{cl} \cong \Omega_{3,0}. \tag{10}$$

4. Преобразование к двухуровневой модели. Резонанс (8)

В условиях (8) быстро меняющиеся во времени члены генератора $S^{(1,0,0)}(t)$ такие:

$$S^{(1,0,0)}(t) =$$
$$-\frac{g}{i\hbar}\Sigma''_n\Big(\frac{\mathscr{E}_{cl}d_{n-1,n}\exp(-i\omega_{cl}t - i\Phi + i\Omega_{n-1,n}t)}{-\omega_{cl}+\Omega_{n-1,n}}$$
$$+\frac{\mathscr{E}^*_{cl}d_{n-1,n}\exp(i\omega_{cl}t + i\Phi + i\Omega_{n-1,n}t)}{\omega_{cl}+\Omega_{n-1,n}}\Big)|E_{n-1}\rangle\langle E_n|$$
$$-\frac{g}{i\hbar}\Sigma''_n\Big(\frac{\mathscr{E}_{cl}d_{n,n-1}\exp(-i\omega_{cl}t - i\Phi + i\Omega_{n,n-1}t)}{-\omega_{cl}+\Omega_{n,n-1}}$$
$$+\frac{\mathscr{E}^*{}_{cl}d_{n,n-1}\exp(i\omega_{cl}t + i\Phi + i\Omega_{n,n-1}t)}{\omega_{cl}+\Omega_{n,n-1}}\Big)|E_n\rangle\langle E_{n-1}|.$$

Двумя штрихами обозначено условие отбора слагаемых, записанных в общем виде — среди них не должно быть медленно меняющихся во времени слагаемых и соответственно расходящихся знаменателей.

Оператор одноквантового резонансного перехода $|n+1\rangle \to |n\rangle$ получается в виде

$$\tilde{V}^{(1,0,0)}(t) = g\mathscr{E}^*{}_{cl}d_{n,n-1}|E_{n-1}\rangle\langle E_n|e^{i(\omega_{cl}-\Omega_{n,n-1})t} + H.c.,$$
$$\tilde{V}^{(0,1,0)}(t) = \tilde{V}^{(0,0,1)}(t) = 0. \tag{11}$$

Следующий оператор в общем случае называется оператором штарковского сдвига за счет высокочастотного штарк-эффекта [8–10]:

$$\tilde{V}^{(2,0,0)}(t) = H^{St}_{n,n+1},$$
$$H^{St}_{n,n+1} = g^2|\mathscr{E}_{cl}|^2\sum_{j=n,n+1}|E_j\rangle\langle E_j|, \tag{12}$$

$$\Pi_n(\omega_{cl}) = \frac{|d_{n,n-1}|^2}{\hbar}\Big(\frac{1}{\Omega_{n,n-1}+\omega_{cl}}\Big)$$
$$+\frac{|d_{n,n+1}|^2}{\hbar}\Big(\frac{1}{\Omega_{n,n+1}-\omega_{cl}}\Big),$$
$$\Pi_{n+1}(\omega_{cl}) = \frac{|d_{n+1,n}|^2}{\hbar}\frac{1}{\Omega_{n+1,n}+\omega_{cl}} + \frac{|d_{n+1,n+2}|^2}{\hbar}$$
$$\times\Big(\frac{1}{\Omega_{n+1,n+2}+\omega_{cl}} + \frac{1}{\Omega_{n+1,n+2}-\omega_{cl}}\Big),\ n\geq 1.$$

В случае $n = 0$

$$\tilde{V}^{(1,0,0)}(t) = g\mathscr{E}^*_{cl}|E_0\rangle\langle E_1|e^{i(\omega_{cl}-\Omega_{1,0})t} + H.c., \tag{13}$$

$$H^{St}_{0,1} = g^2|\mathscr{E}_{cl}|^2\Big(\Pi_0(\omega_{cl}|E_0\rangle\langle E_0| + \Pi_1(\omega_{cl})|E_1\rangle\langle E_1|\Big), \tag{14}$$

$$\Pi_0(\omega_{cl}) = \frac{|d_{01}|^2}{\hbar}\frac{1}{\Omega_{0,1}-\omega_{cl}},$$
$$\Pi_1(\omega_{cl}) = \frac{|d_{12}|^2}{\hbar}\Big(\frac{1}{\Omega_{1,2}+\omega_{cl}} + \frac{1}{\Omega_{1,2}-\omega_{cl}}\Big)$$
$$+\frac{|d_{10}|^2}{\hbar}\frac{1}{\Omega_{1,0}+\omega_{cl}}.$$

При этом в строгом резонансе $\omega_{cl} = \Omega_c(1+12\beta)$ и с учетом $12\beta \ll 1$

$$\Pi_0(\omega) \approx -\frac{1}{2\hbar\Omega_c},\ \Pi_1(\omega) \approx -\frac{1}{6\beta\hbar\Omega_c},$$

так что

$$|\Pi_0(\omega)| \ll |\Pi_1(\omega)|, \tag{15}$$

что отличает данную ситуацию как от „чистой“ модели Блоха–де Сигерта, в которой $\Pi_0(\omega) = -\Pi_1(\omega)$, так и от случая многоуровневого атома, в котором возможно $|\Pi_0(\omega)| \approx |\Pi_1(\omega)|$.

Таким образом, резонансное взаимодействие когерентной волны с ангармоническим осциллятором в условиях (8) выделяет пару резонансных уровней $|n\rangle$ и $|n+1\rangle$, штарковский сдвиг которых определяется как самими резонансными уровнями, так и близлежащими уровнями $|n-1\rangle$ и $|n+2\rangle$. При этом в случае $n = 0$ штарковским сдвигом уровня $|0\rangle$ можно пренебречь. Эффективный двухуровневый гамильтониан резонансного взаимодействия в условиях (8) в представлении взаимодействия можно записать как

$$V^{Eff}(t) = \tilde{V}^{(1,0,0)}(t) + H^{St}_{n,n+1}(t). \tag{16}$$

5. Преобразование к двухуровневой модели. Резонанс (9)

В условиях (9) основные соотношения алгебраической теории возмущения такие

$$\tilde{V}^{(1,0,0)}(t) = \tilde{V}^{(0,1,0)}(t) = \tilde{V}^{(0,0,1)}(t) = 0,$$

$$S^{(0,1,0)}(t) = -\frac{\alpha\Omega_c}{i}\Big(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{h_{n-1,n}|E_{n-1}\rangle\langle E_n|e^{i\Omega_{n-1,n}t}}{\Omega_{n-1,n}}$$

$$+\sum_{n=3}^{\infty}\frac{h_{n-3,n}|E_{n-3}\rangle\langle E_n|e^{i\Omega_{n-3,n}t}}{\Omega_{n-3,n}}\Big) + H.c.,$$

$$\tilde{V}^{(1,1,0)}(t) = -\frac{i}{2}\Big[S^{(0,1,0)}, V_{int}(t)\Big]' - \frac{i}{2}\Big[S^{(1,0,0)}, V_2(t)\Big]'.$$

Штрихом обозначено условие отбора слагаемых, записанных в общем виде — среди них не должно быть быстро меняющихся во времени слагаемых. Вычисления приводят к следующим результатам:

$$\tilde{V}^{(1,1,0)}(t) =$$

$$-\frac{9}{2}\sqrt{2}g\alpha\Omega_c\mathscr{E}_{cl}|E_2\rangle\langle E_0|e^{-i\omega_{cl}-i\Phi+i\Omega_{2,0}t} + H.c., \qquad (17)$$

$$H^{St}_{0,2} = g^2|\mathscr{E}_{cl}|^2\Big(\Pi_0(\omega_{cl}|)E_0\rangle\langle E_0| + \Pi_2(\omega_{cl})|E_2\rangle\langle E_2|\Big), \qquad (18)$$

$$\Pi_0(\omega_{cl}) = \frac{|d_{01}|^2}{\hbar}\frac{1}{\Omega_{0,1}-\omega_{cl}},$$

$$\Pi_2(\omega_{cl}) = \frac{|d_{21}|^2}{\hbar}\Big(\frac{1}{\Omega_{2,1}+\omega_{cl}} + \frac{1}{\Omega_{2,1}-\omega_{cl}}\Big)$$

$$+\frac{|d_{23}|^2}{\hbar}\Big(\frac{1}{\Omega_{2,3}+\omega_{cl}} + \frac{1}{\Omega_{2,3}-\omega_{cl}}\Big).$$

В случае точного резонанса (9), $\omega_{cl} = 2\Omega_c(1+18\beta)$ и $18\beta \ll 1$, имеет место соотношение

$$\Pi_2(\omega_{cl}) \approx -2\Pi_0(\omega_{cl}). \qquad (19)$$

Эффективный двухуровневый гамильтониан резонансного взаимодействия в условиях (9) в представлении взаимодействия можно записать как

$$V^{ef}(t) = \tilde{V}^{(1,1,0)}(t) + H^{St}_{0,2}(t). \qquad (20)$$

6. Преобразование к двухуровневой модели. Резонанс (10)

В условиях (10) происходит возбуждение ангармонического осциллятора с основного $n=0$ на третий $n=3$ энергетический квантовый уровень при поглощении одного кванта из электромагнитного когерентного поля. Основные соотношения алгебраической теории возмущения прежние:

$$\tilde{V}^{(1,0,0)}(t) = \tilde{V}^{(0,1,0)}(t) = \tilde{V}^{(0,0,1)}(t) = 0,$$

однако теперь для вычисления эффективного гамильтониана резонансного взаимодействия, отвечающего за резонанс $\omega_{cl} \cong \Omega_{3,0}$, необходимо знание генератора унитарного преобразования $S^{(0,0,1)}(t)$:

$$S^{(0,0,1)}(t) = -\frac{\beta\Omega_c}{i}\Big(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{h_{n-4,n}|E_{n-4}\rangle\langle E_n|e^{i\Omega_{n-4,n}t}}{\Omega_{n-4,n}}$$

$$+\sum_{n=3}^{\infty}\frac{h_{n-2,n}|E_{n-2}\rangle\langle E_n|e^{i\Omega_{n-2,n}t}}{\Omega_{n-2,n}}\Big) + H.c..$$

По сравнению с выражением для $S^{(1,0,0)}(t)$ в записи $S^{(0,0,1)}(t)$ отсутствуют штрихи, поскольку все слагаемые в написанной формуле — быстро меняющиеся функции во времени.

Далее определяем оператор резонансного перехода $\tilde{V}^{(1,0,1)}(t)$ по формуле

$$\tilde{V}^{(1,0,1)}(t) = -\frac{i}{2}\Big[S^{(0,0,1)}, V_{int}(t)\Big]' - \frac{i}{2}\Big[S^{(1,0,0)}, V_3(t)\Big]'. \qquad (21)$$

Они дают следующие результаты:

$$\tilde{V}^{(1,0,1)}(t) = -8\sqrt{6}g\beta\mathscr{E}_{cl}|E_3\rangle\langle E_0|e^{-i\omega_{cl}t-i\Phi+i\Omega_{3,0}t} + H.c., \qquad (22)$$

$$H^{St}_{0,3} = g^2|\mathscr{E}_{cl}|^2\Big(\Pi_0(\omega_{cl})|E_0\rangle\langle E_0| + \Pi_3(\omega_{cl})|E_3\rangle\langle E_3|\Big), \qquad (23)$$

$$\Pi_0(\omega_{cl}) = \frac{|d_{01}|^2}{\hbar}\frac{1}{\Omega_{0,1}-\omega_{cl}},$$

$$\Pi_3(\omega_{cl}) = \frac{|d_{32}|^2}{\hbar}\Big(\frac{1}{\Omega_{3,2}+\omega_{cl}} + \frac{1}{\Omega_{3,2}-\omega_{cl}}\Big)$$

$$+\frac{|d_{34}|^2}{\hbar}\Big(\frac{1}{\Omega_{3,4}+\omega_{cl}} + \frac{1}{\Omega_{3,4}-\omega_{cl}}\Big).$$

Подчеркнем, что формула для $\Pi_0(\omega_{cl})$ формально не отличается от формул предыдущих разделов, однако в нее подставляется другая величина для несущей частоты когерентного поля ω_{cl}. Поэтому в случае точного резонанса (10), $\omega_{cl} = 3\Omega_c(1+24\beta)$ и $24\beta \ll 1$, имеет место соотношение

$$\Pi_3(\omega_{cl}) \approx -\Pi_0(\omega_{cl}), \qquad (24)$$

т.е. здесь соотношение между частотными сдвигами резонансных уровней эффективной двухуровневой системы совпадает с аналогичным соотношением для сдвигов Блоха–де Сигерта в исходной чисто двухуровневой системе.

Эффективный двухуровневый гамильтониан резонансного взаимодействия в условиях (10) в представлении взаимодействия можно записать как

$$V^{ef}(t) = \tilde{V}^{(1,0,1)}(t) + H^{St}_{0,3}(t). \qquad (25)$$

7. Заключение

Основными результатами работы являются эффективные гамильтонианы (16), (20) и (25), описывающие двухуровневую квантовую систему, выделяемую из спектра квантового ангармонического осциллятора резонансным взаимодействием осциллятора с классической когерентной волной одной несущей частоты. При этом найдена ситуация резонанс (10) — когда с точностью до слагаемых второго порядка можно говорить о „чисто“ двухуровневой системе. Этот факт отличает представленные здесь результаты от большинства работ, где рассматривается динамика как гармонического, так и ангармонического осцилляторов. Например, в работе [37] показано отличие динамики квантового и классического осцилляторов в случае их возбуждения униполярными короткими импульсами. В этом случае формируется состояние осциллятора с широким набором состояний последнего, ввиду широкополосности возбуждения. Выделим также работу [38], где нелинейная динамика ангармонического осциллятора рассмотрена как квантовый аналог классического метода перенормировки [6]. Выявленные квантовые поправки к классическому движению ангармонического осциллятора обнаружены в условиях когерентного состояния начального осциллятора, но не его когерентного возбуждения внешним резонансным квазимонохроматическим световым полем. Основные результаты в цитируемой статье касаются динамики второй и последующих гармоник, возникающих в движении осциллятора именно за счет учета квантовых добавок.

Эффективный гамильтониан получен нами алгебраической теорией возмущений с точностью до второго порядка по когерентному полю. Он состоит из оператора резонансного перехода с поглощением или испусканием кванта когерентного поля и оператора штарковского взаимодействия ангармонического осциллятора с когерентным полем. В этом отличие от стандартного объяснения, основанного на неэквидистантности спектра ангармонического осциллятора, в котором пара уровней двухуровневой модели выделяется простым условием резонанса. Дальнейший анализ такой двухуровневой системы приводит к модели Блоха–де Сигерта с соотношением между параметрами штарковского сдвига типа (23), в котором $\Pi_0(\omega_{cl})$ отвечает нижнему уровню g двухуровневой системы, а $\Pi_3(\omega_{cl})$ — верхнему уровню e. Мы рассмотрели еще ряд случаев, в которых данные соотношения иные. Подчеркнем, что эти соотношения определяют временную динамику коллективного распада ансамбля двухуровневых частиц в квантованном поле [11].

Проведенный анализ на основе алгебраической теории возмущений позволяет непосредственно применять к системам ангармонических осцилляторов результаты стандартного описания нелинейных оптических эффектов на основе оптической нутации, полученных в рамках той же алгебраической теории возмущений [10]. Например, частота нутационных колебаний интенсивности резонансной световой волны вблизи ее переднего фронта (или после кратковременного возмущения ее амплитуды или фазы) Ω_N дается [10] формулой:

$$\Omega_N = \sqrt{(\Delta - \Delta^{St})^2 + \Omega_R^2},$$

где Δ — отстройка от резонанса, $\Delta^{St} = g^2|\mathscr{E}_{cl}|^2\Big(\Pi_e(\omega_{cl}) - \Pi_g(\omega_{cl})\Big)$ — сдвиг частоты перехода за счет высокочастотного эффекта Штарка, а Ω_R — частота Раби:

$$\Omega_R = 2g\sqrt{n}|\mathscr{E}_{cl}|\hbar^{-1},$$

$n = 1, 2$ в случае резонанса (8),

$$\Omega_R = 9\sqrt{2}g\alpha|\mathscr{E}_{cl}|\hbar^{-1}$$

в случае резонанса (9),

$$\Omega_R = 16\sqrt{6}g\beta|\mathscr{E}_{cl}|\hbar^{-1}$$

в случае резонанса (10).

Нутационные колебания — один из важных объектов проведенных экспериментальных исследований [17–19]. Представленные формулы позволят по результатам экспериментального исследования оптической нутации судить о параметрах ангармонического осциллятора в рассмотренной модели.

Благодарности

Авторы выражают благодарность А.А. Калачеву и С.В. Сазонову. за полезные обсуждения.

Конфликт интересов

Авторы заявляют об отсутствии с кем-либо конфликта интересов.

Список литературы

[1] У.Х. Копвиллем, С.В. Пранц. *Поляризационное эхо* (Физматлит, М., 1985).
[2] S.A. Moiseev, S. Kroll. Phys. Rev. Lett., **17**, 173601 (2001). DOI: 10.1103/PhysRevLett.87.173601
[3] W. Tittel, M. Afzellus, T. Chanellere, R.L. Cone, S. Kroll, A. Moiseev, M. Sellars. Laser and Photonics Reviews, **4**, 244 (2010).
[4] С.А. Моисеев, Н.С. Перминов. Письма в ЖЭТФ, **111**, 602 (2020). DOI: 10.1134/S0021364019010077
[5] С.А. Моисеев, Н.С. Перминов, А.М. Желтиков. Письма в ЖЭТФ, **115**, 353 (2022). DOI: 10.31857/S1234567822060039
[6] С.В. Сазонов. Ученые записки Казанского государственного университета. Физико-математические науки, **151**, 150 (2009).
[7] Л. Аллен, Дж. Эберли. *Оптический резонанс и двухуровневые атомы* (Мир, М., 1978).
[8] В.С. Бутылкин, А.Е. Каплан, Ю.Г. Хронопуло, Е.И. Якубович. *Резонансные взаимодействия света с веществом* (Наука, М., 1977).
[9] А.М. Башаров. *Фотоника, Метод унитарного преобразования в нелинейной оптике* (МИФИ, М., 1990).
[10] A.I. Maimistov, A.M. Basharov. *Nonlinear optical waves* (Dordrecht: Kluwer Academic, 1999).
[11] А.И. Трубилко, А.М. Башаров. Письма в ЖЭТФ, **109**, 75 (2019). DOI: 10.1134/S0370274X19020012
[12] F. Bloch, A. Siegert. Phys. Rev., **57**, 522 (1940).
[13] C. Cohen-Tannoudji, J. Dupont-Roc, C. Fabre. J. Phys. B: Atom. Molec. Phys., **6**, L214 (1973).
[14] J. Romhanyi, G. Burkard, A. Palyi. Phys. Rev. B, **92**, 054422 (2015). DOI: 10.1103/PhysRevB.92.054422.

[15] J. Zhang, S. Saha, D. Suter. Phys. Rev. A, **98**, 052354 (2018). DOI: 10.1103/PhysRevA.98.052354
[16] А.П. Сайко, Г.Г. Федорук. Письма в ЖЭТФ, **87**, 154 (2008).
[17] J. Tuorila, M. Silveri, M. Sillanpaa, E. Thuneberg, Y. Makhlin, P. Hakonen. Phys. Rev. Lett., **105**, 257003 (2010). DOI: 10.1103/PhysRevLett.105.257003
[18] A.O. Slobodeniuk, P. Koutensky, M. Bartos, F. Trojanek, P. Maly, T. Novotny, M. Kozak. Phys. Rev. B, **106**, 235304 (2022). DOI: 10.1103/PhysRevB.106.235304
[19] Yuxuan Li, Yaoyao Han, Wenfei Liang, Boyu Zhang, Yulu Li, Yuan Liu, Yupeng Yang, Kaifeng Wu, Jingyi Zhu. Nature Commun., **13**, 5559 (2022). DOI: 10.1038/s41467-022-33314-9
[20] А.И. Трубилко, А.М. Башаров. Письма в ЖЭТФ, **111**, 632 (2020). DOI: 10.31857/S1234567820090104
[21] W. Magnus. Commun. Pure Appl. Math., **7**, 649 (1954).
[22] Р. Эрнст, Дж. Боденхаузен, А. Вокаун. *ЯМР в одном и двух измерениях* (Мир, М., 1990).
[23] А.М. Башаров. ЖЭТФ, **158**, 978 (2020). DOI: 10.31857/S004445102011019X
[24] M. Takatsuji. Phys. Rev. B, **2**, 340 (1970).
[25] M. Takatsuji. Phys. Rev. A, **11**, 619 (1975).
[26] В.Н. Богаевский, А.Я. Повзнер. *Алгебраические методы в нелинейной теории возмущений* (Наука, М., 1987).
[27] А.М. Башаров, А.И. Маймистов, Э.А. Маныкин. ЖЭТФ, **84**, 487 (1983).
[28] А.В. Иванова, Г.Г. Меликян. Хим. физ., **3**, 297 (1983).
[29] Е.Ю. Перлин, А.В. Федоров, М.Б. Кашевник. ЖЭТФ, **85**, 1357 (1983).
[30] W.H. Louisel, L.L.R. Walker. Phys. Rev., **137**, B204 (1965).
[31] M. Lax. Phys. Rev., **145**, 110 (1966).
[32] S.-P. Wang, G.-Q. Zhang, Y. Wang, Z. Chen, T. Li, J.S. Tsai, S.-Y. Zhu, J.Q. Yu. Phys. Rev. Appl., **13**, 054063 (2020). DOI: 10.1103/PhysRevApplied.13.054063
[33] Л. Мандель, Е. Вольф. *Оптическая когерентность и квантовая оптика* (Физматлит, М., 2000).
[34] М.А. Ельяшевич. *Атомная и молекулярная спектроскопия* (Гос. изд. физ.-мат. лит., М., 1962).
[35] И. Собельман. *Введение в теорию атомных спектров* (Гос. изд. физ.-мат. лит., М., 1977).
[36] Xin-Zheng Li, En-Ge Wang. *Computer Simulations of Molecules and Condensed Matter: From Electronic Structures To Molecular Dynamics* (World Scientific Publishing Co Pte Ltd, 2018).
[37] Н.Н. Розанов. Опт. и спектр., **131**, 1703 (2023). DOI: 10.61011/OS.2023.12.57406.133-23
[38] С.В. Сазонов. Изв. РАН. Сер. физическая, **78**, 1593 (2014).