

14,15

Изменение фрактальной геометрии микротрещин в процессе деформирования: рентгеновская микротомография, акустическая эмиссия и моделирование методом дискретных элементов

© Е.Е. Дамаскинская¹, В.Л. Гиляров¹, Ю.С. Кривонос², А.В. Бузмаков², В.Е. Асадчиков², Д.И. Фролов¹

¹ Физико-технический институт им. А.Ф. Иоффе,
Санкт-Петербург, Россия

² Национальный исследовательский центр „Курчатовский институт“,
Москва, Россия

E-mail: Kat.Dama@mail.ioffe.ru

Поступила в Редакцию 4 июня 2024 г.

В окончательной редакции 11 июня 2024 г.

Принята к публикации 12 июня 2024 г.

Цель работы состояла в прямом наблюдении и дальнейшем анализе дефектов (микротрещин), развивающихся в объеме образца природного гетерогенного материала под действием одноосной сжимающей нагрузки. Для детектирования дефектов в объеме использовалась рентгеновская компьютерная микротомография. Особенность экспериментов состоит в том, что выполнялась томографическая съемка образца, находящегося под действием нагрузки. На основе анализа томографических сечений были построены трехмерные модели дефектной структуры и вычислена фрактальная размерность системы микротрещин. С помощью модели дискретных элементов проведены численные эксперименты по разрушению образцов гетерогенных материалов. Исследовано изменение фрактальной размерности очагов разрушения в процессе их роста. Установлено хорошее согласие результатов компьютерного моделирования и лабораторных экспериментов, что позволяет говорить об адекватности предложенной модели.

Ключевые слова: рентгеновская компьютерная микротомография, эволюция дефектов, компьютерное моделирование, метод дискретных элементов, акустическая эмиссия, фрактальная размерность

DOI: 10.61011/FTT.2024.09.58790.144

1. Введение

Разрушение природных гетерогенных материалов, вызванное появлением и развитием дефектной структуры, представляет собой многостадийный процесс, развивающийся во времени и пространстве [1–8]. Для того, чтобы разделить эти стадии и понять физические причины, управляющие переходом с одной стадии на другую, необходимо получить информацию об эволюции дефектной структуры в объеме деформируемого материала. Экспериментальным методом, который позволяет получить визуализацию трехмерной внутренней микроструктуры объектов, т.е. „рассмотреть“ дефекты и определить их геометрические характеристики в объеме массивного непрозрачного образца, может служить рентгеновская микротомография (X-ray microCT). Основное преимущество данного метода состоит в том, что образец при этом сохраняет свою целостность.

В работах [9–16] с помощью X-ray microCT проводится исследование микротрещин, образовавшихся в результате механического воздействия. Как правило, томографическая съемка выполняется либо после завершения механических испытаний, либо после каждого этапа нагружения [9–12]. При этом в процессе томографической съемки образец находится в ненагруженном состоянии.

В [13–14] описаны эксперименты, в которых проводились томографические исследования образцов, находящихся в нагруженном состоянии. Наблюдалось развитие системы трещин по мере увеличения нагрузки. Однако количественного описания распространения трещин не выполнялось.

В связи с этим, первой задачей работы является прямое наблюдение и анализ морфологии системы микротрещин, развивающихся в объеме образца природного гетерогенного материала (горной породы) под действием одноосной сжимающей нагрузки.

Результаты, полученные с помощью томографических исследований, могут дать только геометрические характеристики трещин. В то же время, для выявления физических причин развития разрушения, требуются представления о локальных значениях различных механических параметров (деформаций и напряжений).

Вторая задача работы заключается в сопоставлении особенностей развития магистральной трещины (очага разрушения) в компьютерной модели разрушения, основанной на методе дискретных элементов, с экспериментальными данными. В случае удовлетворительного согласия результатов, данная компьютерная модель послужит инструментом для исследования локальных параметров, которые в настоящее время невозможно измерить (определить) экспериментальными методами.

Таблица 1. Минеральный состав песчаника Вегеа

Минерал	Quartz (кварц)	Plagioclase (плагноклаз)	K-feldspar (полевоы шпат)	Kaolinite (каолинит) (силикат алюминия)	Calcite (кальцит) CaCO ₃
	85–90%	1–2%	3–6%	2–6%	6–8%
Плотность	2600–2650 kg/m ³	2620–2760 kg/m ³	2560 kg/m ³	2600 kg/m ³	2710 kg/m ³

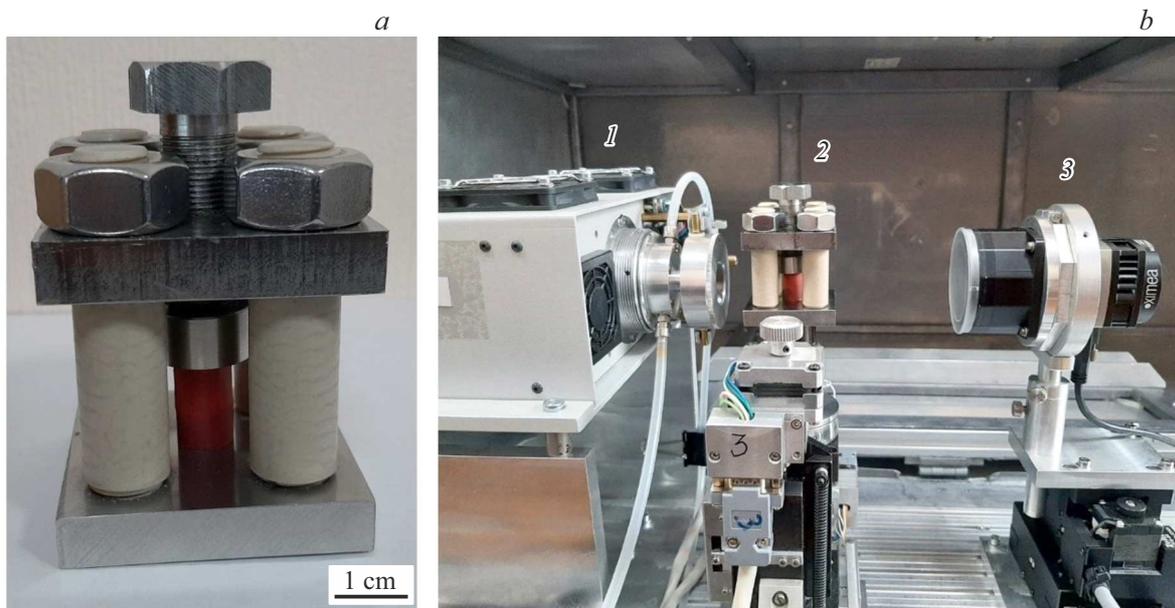


Рис. 1. Экспериментальная установка: *a* — фото нагрузочной ячейки с установленным образцом; *b* — оптическая часть рентгеновского микротомографа „МИКРОТОМ“: 1 — источник, 2 — нагрузочная ячейка с образцом, 3 — детектор.

2. Эксперимент

В качестве материала для исследований был выбран песчаник Вегеа [17], который является эталонным материалом для экспериментов по деформированию образцов из горных пород. Минеральный состав песчаника представлен в табл. 1. Песчаник Вегеа преимущественно сложен зернами кварца с характерным размером $20\ \mu\text{m}$. Образцы имели цилиндрическую форму ($d = 10\ \text{mm}$, $h = 20\ \text{mm}$). Торцы образцов дополнительно шлифовались для обеспечения их плоскопараллельности. Боковая поверхность образцов перед экспериментами фиксировалась с помощью термоусадочного материала для предотвращения рассыпания в процессе деформирования.

Особенность экспериментов состояла в том, что выполняли томографическую съемку образца, находящегося под действием нагрузки. Для этого была разработана специальная переносная нагрузочная ячейка (см. рис. 1, *a*), которая, с одной стороны, обеспечивала необходимую нагрузку, а, с другой стороны, помещалась в камеру томографа и не препятствовала измерению. Четыре опорных стойки нагрузочной ячейки были изготовлены в виде цилиндров диаметром $16\ \text{mm}$ из полиэфирэфиркетона (РЕЕК), который обладает необходи-

мой прочностью и низким коэффициентом поглощения в жестком рентгеновском диапазоне. Это позволило производить съемку образца в условиях, когда в поле зрения детектора находился сам образец, а опорные стойки из РЕЕК не попадали в поле зрения детектора на значительной части проекций. В предварительных экспериментах было проведено сравнение результатов томографии образца без ячейки и образца, помещенного в ячейку, что подтвердило возможность использования предложенных условий эксперимента.

Томографические измерения были выполнены на конусно-лучевом рентгеновском микротомографе „МИКРОТОМ“, разработанном и созданном в НИЦ „Курчатовский институт“ [18]. Изображение оптической части микротомографа с установленной на нем нагрузочной ячейкой и образцом представлено на рис. 1, *b*. В томографе используется микрофокусный полихроматический рентгеновский источник с прострельным анодом из молибдена и размером фокусного пятна $15\text{--}20\ \mu\text{m}$. Для эксперимента было выбрано ускоряющее напряжение $80\ \text{kV}$. Томографические проекции образца, измеренные под разными углами, регистрировали рентгеновским детектором XIMEA с матрицей размером 2968×5056 элементов и размером пикселя $8.5\ \mu\text{m}$. Эксперименты

проводили в следующей геометрии: расстояние источник — образец 50 mm и источник — детектор 150 mm, геометрическое увеличение $M = 3.0$. В каждом эксперименте регистрировали 720 проекций в диапазоне углов 360 градусов. Восстановление трехмерных изображений объектов выполняли с помощью FDK алгоритма [19]. Чтобы уменьшить „эффект чаши“, который является артефактом и возникает вследствие „ужесточения“ полихроматического пучка при прохождении через образец, между источником и образцом устанавливали Al — фильтр толщиной 0.36 mm. Кроме этого, для полного устранения чашевидного артефакта к исходным нормированным и логарифмированным синограммам применяли процедуру автоматической гамма — коррекции, описанной в работе [20]. Также отметим, что с учетом предложенной геометрии эксперимента томография образца была сделана не для всего образца целиком, а для его центральной части высотой 7 mm.

До начала испытаний проводилось томографическое исследование всей партии образцов песчаника. Для дальнейших экспериментов отбирались те образцы, в которых не было обнаружено структурных аномалий, которые могли стать концентраторами напряжений и источниками появления дефектов и развития разрушения.

Эксперимент проходил в несколько этапов. На первом этапе образец подвергался сжатию в ячейке до нагрузки 5.5 kN. Ячейку помещали в томограф и проводили съемку. На втором этапе нагрузку увеличивали до 6.7 kN и вновь проводили съемку. Затем образец выдерживали 24 h под нагрузкой. Далее при попытке еще увеличить нагрузку образец потерял устойчивость. После чего была выполнена финальная томографическая съемка.

Важно отметить, что в течение всего эксперимента образец все время находился под действием нагрузки.

3. Результаты и их обсуждение

3.1. Лабораторный эксперимент

В данных экспериментах контраст связан с поглощением рентгеновских лучей при прохождении через объект исследования. Поскольку материал образца является неоднородным, коэффициенты поглощения различных составляющих отличаются. В результате, после томографической реконструкции получаются картины распределения рентгенооптической плотности в различных горизонтальных сечениях образца. На рис. 2 показаны сечения образца по высоте, полученные на трех этапах нагружения. Градации серого соответствуют различной рентгенооптической плотности материала. Черные линии — трещины. Видно, что после первого нагружения трещина проходит не через весь образец (рис. 2, *a*). Увеличение нагрузки приводит к распространению трещины (рис. 2, *b*). Выдержка в течение суток при нагрузке 6.7 kN привела к тому, что образец потерял устойчивость. Хорошо видно, что трещина стала еще более развитой (рис. 2, *c*).

Чтобы сегментировать трещины, образовавшиеся в образце в процессе поэтапного нагружения, проводили бинаризацию томограмм с использованием глобального порога. После пороговой бинаризации в полученных изображениях были удалены многочисленные поры, которые изначально присутствовали в образце, если они изолированно находились в массиве (объеме) образца и не были связаны с образовавшимися трещинами. Аналогичным образом из бинарного изображения удалялись фрагменты материала образца, если они изолированно располагались в объеме трещин и не были связаны с массивом образца. Данная процедура выполнялась с помощью утилиты поиска несвязанных вокселей в программном пакете Python Toolkit „Porespy“ [21]. На рис. 3, *a–c* представлены томографические сечения образца, сделанные на одной и той же высоте в нижней части образца после каждого этапа нагружения, а также соответствующие им итоговые бинарные изображения (рис. 3, *d–f*), на основе которых далее был выполнен расчет параметров трещин.

Для дальнейшего анализа морфологии системы трещин мы использовали теорию фракталов. В работах [11,12,15,16] вычислялась фрактальная размерность трещин или пор. Было показано, что фрактальная размерность чувствительна к степени гетерогенности материала, к виду напряженного состояния. В данной работе в качестве количественной характеристики дефектной структуры была выбрана фрактальная размерность, которая вычислялась методом box counting (BCM) [12,22,23]. По существу, это размерность D_0 из набора фрактальных размерностей Реньи [24]. Применив этот метод, мы рассчитали фрактальную размерность трехмерных поверхностей трещин на основе трехмерных моделей реконструкции трещин.

Установлено, что после 1 этапа нагружения (при нагрузке 5.5 kN) фрактальная размерность трещины равна 1.8. Это означает, что трещина является ажурной и близкой по размерности к плоскости. Увеличение нагрузки до 6.7 kN приводит к развитию трещины — фрактальная размерность увеличивается до 2.3. На третьем этапе деформирования значение фрактальной размерности достигает величины 2.6. И действительно, видно, что форма трещины становится более разветвленной и занимает, практически, весь объем образца. Это наглядно иллюстрирует трехмерная визуализация системы микротрещин, построенная по результатам томографии (рис. 4).

3.2. Компьютерное моделирование

Для того чтобы выявить связь процессов, протекающих на микроуровне, с макроскопическими проявлениями, а также локальных параметров, которые не могут быть измерены экспериментально, ранее построена компьютерная модель разрушения гетерогенного материала. Модель основана на методе дискретных элементов (DEM) и подробно описана в [25,26]. В нашей работе

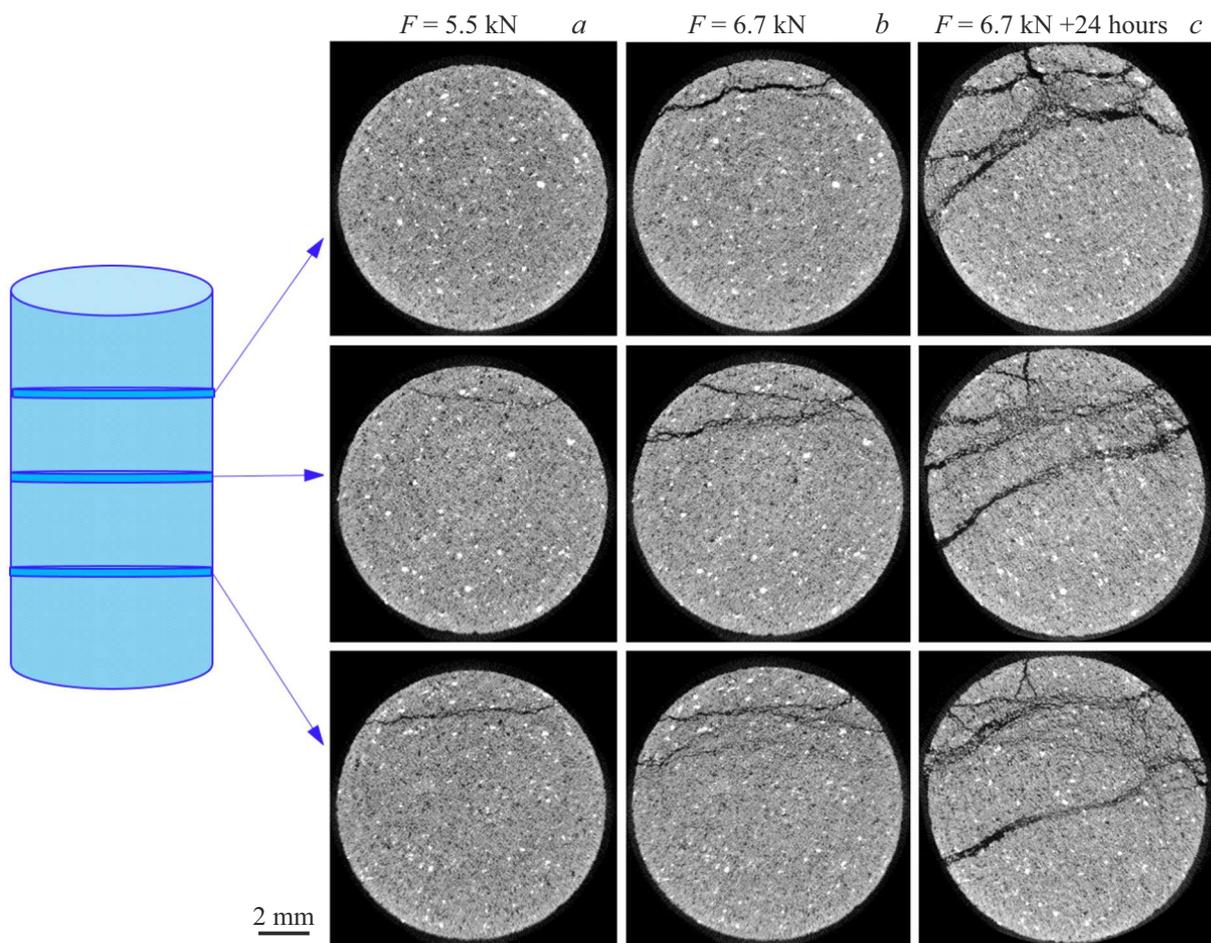


Рис. 2. Распределение рентгенооптической плотности в сечениях образца, расположенных в его верхней, центральной и нижней частях, после первого (а), второго (b) и третьего (c) этапов нагружения.

мы использовали модель связанных частиц [27] (BPM — bonded particle model), которая помогает детально изучить эволюцию дефектов. Расчеты методом дискретных элементов производились в свободно распространяемом пакете программ MUSEN [28]. Модель материала (горной породы) — сферические частицы одного или разных размеров, которые имитируют зерна, и связи между частицами, которые имитируют межзеренные границы.

В модели BPM зарождение трещин определяется разрывом связей между частицами, а их распространение — слиянием множества разорванных связей. Для того, чтобы получить трещину из набора связей, разорвавшихся от начала эксперимента до определенного времени, необходима процедура кластеризации (объединение разорванных связей согласно выбранному алгоритму, что будет описано далее). Таким образом, под дефектами в данной работе понимаются кластеры разорванных связей.

Схема компьютерного эксперимента аналогична, изложенной в работе [26]. Моделировались образцы цилиндрической формы диаметром 10 mm и высотой 20 mm. Образец помещался в виртуальный пресс. Ниж-

няя плита была неподвижна, а верхняя перемещалась вниз с постоянной скоростью. Тем самым моделировалось одноосное сжатие. Эксперимент заканчивался, когда образец разрушался (разделялся на части). В процессе эксперимента через равные промежутки времени — интервал сохранения данных — записывался большой набор механических параметров, который использовался для дальнейшего анализа. Этот интервал времени выбирался, исходя из условия стационарности процесса на его протяжении. В настоящей работе такими параметрами были координаты центров связей, разорванных в процессе деформирования образца, и времена разрыва этих связей.

Были проведены численные эксперименты с различными по структуре образцами. Варьировались материал и размеры частиц, материал и диаметр связей. Во всех случаях удалось обнаружить общие закономерности фрактальных свойств очагов разрушения (магистральных трещин) [29]. В данной работе эти результаты приведены на примере одного типа образцов.

Образец состоит из частиц с диаметрами и процентным составом, указанными в табл. 2 (число ча-

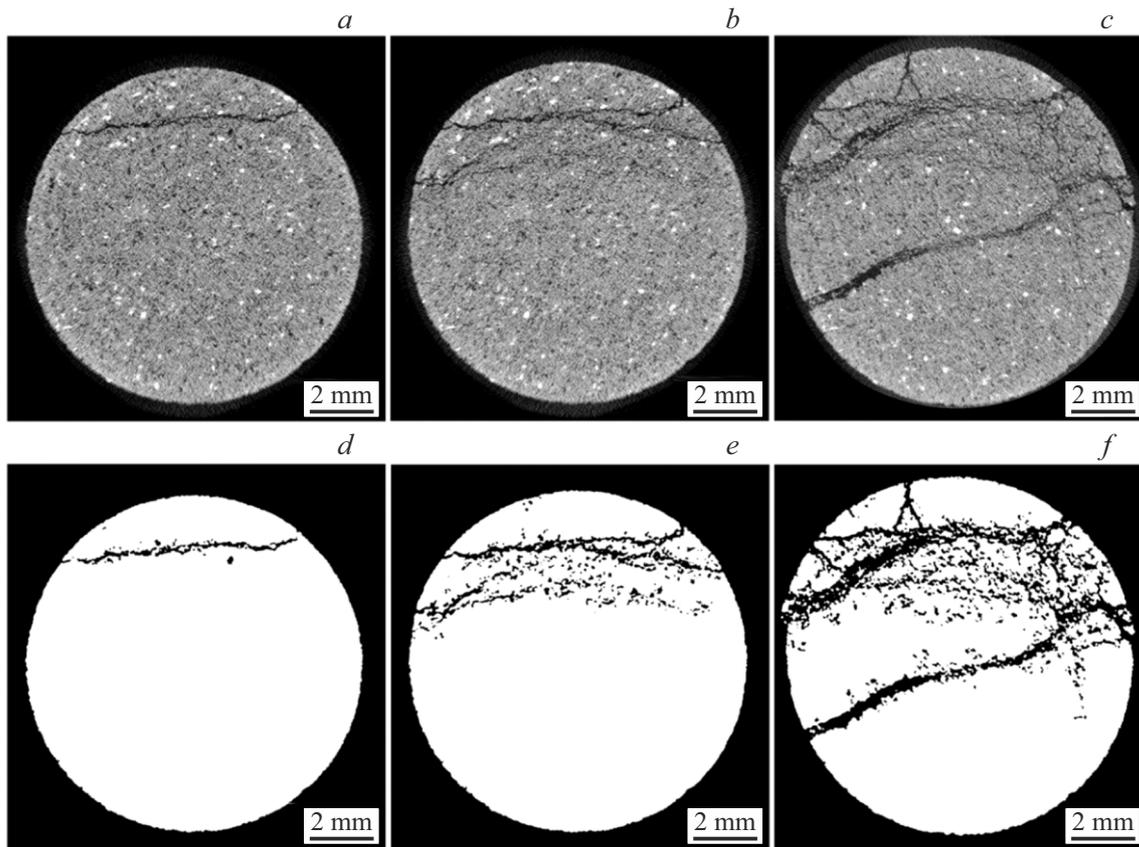


Рис. 3. Томографические сечения образца в градациях серого (сверху) и соответствующие им бинарные изображения (снизу) после каждого этапа нагружения: (a), (d) — 1-й этап; (b), (e) — 2-й этап; (c), (f) — 3-й этап.

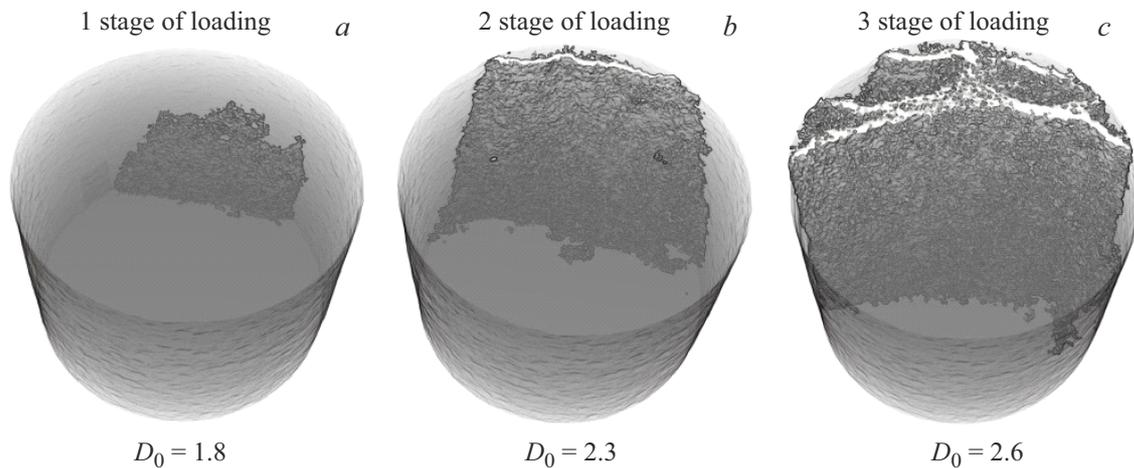


Рис. 4. Трехмерная визуализация трещины после трех этапов нагружения. Темно-серые объекты сложной геометрической формы внутри образца — образовавшиеся трещины.

стиц 33670). Эти размеры представляют собой набор величин со средним значением 0.08 mm и стандартным отклонением 0.025 mm, полученный генератором случайных чисел с нормальным распределением (табл. 2). Диаметр фракции 4 для ортоклаза увеличен на порядок для повышения степени гетерогенности. Все связи

были только ортоклазовые диаметром 0.04 mm. Физико-механические параметры материалов, из которых состоят частицы и связи, приведены в табл. 3.

На рис. 5 показано изменение напряжения в процессе эксперимента. Видно, что данный образец разрушился хрупко, что характерно для песчаника.

Таблица 2. Диаметры зерен (mm) и процентный состав каждой из фракций

	Диаметр зерен различных фракций d_i , mm					Доля каждой фракции
	0.09	0.047	0.132	0.079	0.106	
кварц	0.09	0.047	0.132	0.079	0.106	0.0595745
ортоклаз	0.068	0.07	0.096	0.91	0.064	0.0702128
олигоклаз	0.041	0.042	0.077	0.063	0.098	0.0702127

Таблица 3. Параметры материалов, использованные при моделировании

№	материал	ρ , kg/m ³	E , GPa	ν	σ_n , МПа	σ_t , МПа	η , Pa·s
1	кварц	2650	94	0.29	600	600	5E19
2	ортоклаз	2560	62	0.29	420	420	1E19
3	олигоклаз	2560	70	0.29	480	480	1E19

Примечание. ρ — плотность материала, E — модуль Юнга, ν — коэффициент Пуассона, σ_n — прочность материала на разрыв, σ_t — прочность материала на сдвиг, η — динамическая вязкость.

Для исследования эволюции дефектов была проведена кластеризация разорванных связей. Использовался алгоритм DBSCAN (Density-based spatial clustering of applications with noise [30]), который выполняет кластеризацию на основе плотности составляющих кластер объектов.

Кластеризация связей, разорвавшихся, от начала нагружения до момента времени t_k , позволяет получить картину дефектов (трещин), которые образовались к этому моменту (t_k). При этом размер дефекта принимается равным числу связей, объединенных в данный кластер.

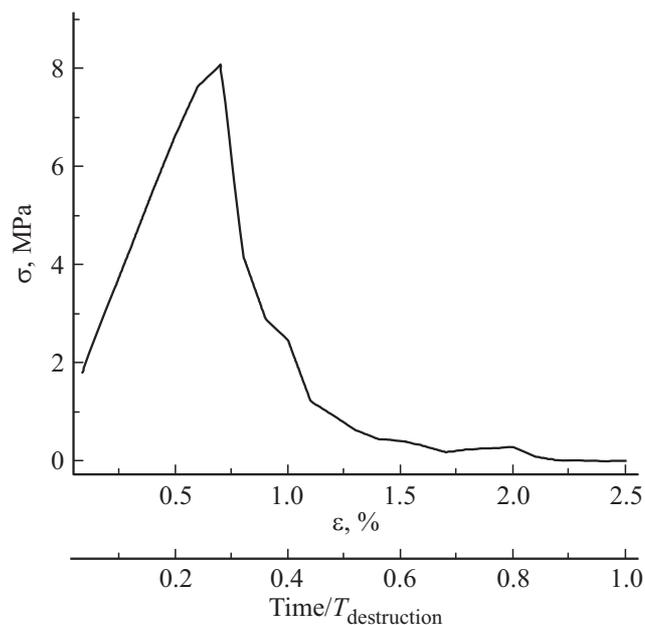


Рис. 5. Изменение напряжения на образце в компьютерном эксперименте. Вторая горизонтальная ось соответствует нормированному времени эксперимента ($T_{\text{destruction}}$ — момент времени, в который образец разделился на части).

В компьютерных экспериментах, так же, как и в лабораторных, мы изучали фрактальные свойства очагов разрушения. Фрактальная размерность вычислялась исходя из пространственного расположения связей, образующих очаг в различные моменты времени.

В качестве основной характеристики рассматривается корреляционная фрактальная размерность D_2 , рассчитанная на основании корреляционной функции Грассбергера и Прокаччи [31] (корреляционного интеграла):

$$C(r) = \frac{2}{N(N-1)} \sum_{j=1}^N \sum_{i=j+1}^N H(r - r_{ij}) \quad (1)$$

Здесь r_{ij} — расстояние между парой разорванных связей, в качестве координат которых выбирались координаты их центров, N — число анализируемых разрывов, H — функция Хевисайда равная единице, если ее аргумент неотрицателен, и равная нулю в противоположном случае. Таким образом, функция (2) равна числу пар событий, расстояние между которыми не превосходит r . Если рассматриваемая система обладает масштабной инвариантностью, зависимость $C(r) \propto r^d$, т.е. представляет собой степенную функцию с показателем степени равным фрактальной размерности множества. Размерность d в этом случае называется корреляционной фрактальной размерностью. Как показано в [31,32] эта величина равна размерности D_2 из набора фрактальных размерностей Реньи [32].

Проведен анализ изменения фрактальной размерности собственно очага разрушения (максимального кластера). На рис. 6 показано развитие очага разрушения в последовательные моменты времени. На рис. 7 построен график изменения фрактальной размерности этого очага в процессе эксперимента. В начале очаг представляют собой дефект близкий к плоскому с фрактальной размерностью ($D_2 \sim 2$). Его рост приводит к тому,

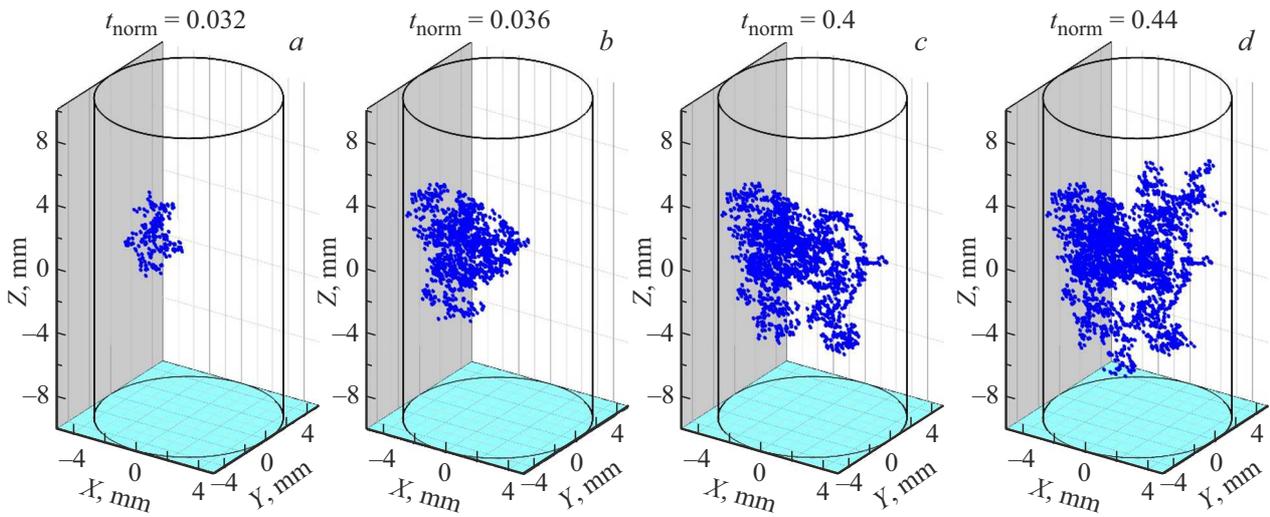


Рис. 6. Развитие (распространение) очага разрушения в компьютерном эксперименте. Здесь $t_{norm} = \text{Time}/T_{destruction}$, (т.е. нормированное время).

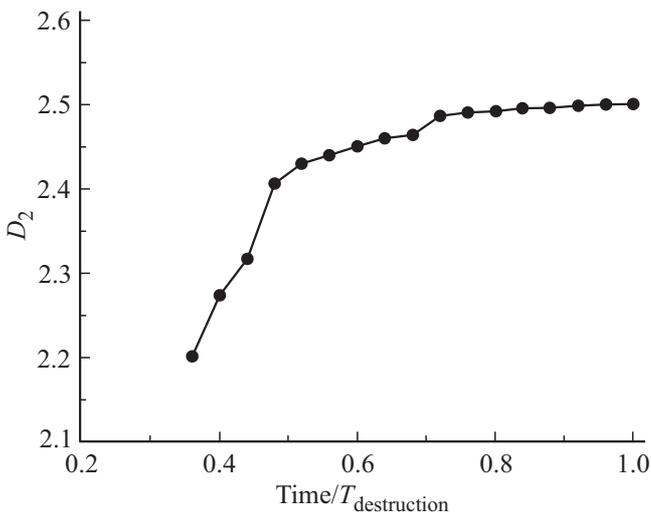


Рис. 7. Изменение фрактальной размерности очага разрушения в компьютерном эксперименте.

что разрушение захватывает все больший объем, что сопровождается увеличением фрактальной размерности.

Заметим, что аналогичное поведение корреляционной фрактальной размерности (D_2) при развитии очага разрушения наблюдалось нами ранее при анализе данных акустической эмиссии, зарегистрированной в лабораторном эксперименте [33]. В этих экспериментах, которые подробно описаны в [1], подвергались нагружению цилиндрические образцы гранита Westerly ($h = 190.5 \text{ mm}$, $d = 76.2 \text{ mm}$). Образцы деформировали в условиях постоянного всестороннего сжатия и одноосевого осевого нагружения. Наблюдение за трещинообразованием проводилось с помощью регистрации сигналов акустической эмиссии (АЕ). В отличие от предыдущих работ [34], в которых изучалась фрактальная размерность последо-

вательностей источников сигналов, излученных за последовательные интервалы времени (или последовательности из заданного количества сигналов), в настоящей работе мы рассматриваем увеличивающиеся временные интервалы, начинающиеся в одной временной точке. Эта точка соответствует началу локализованного разрушения (росту преимущественно одной трещины). На рис. 8 показано изменение корреляционной фрактальной размерности координат гипоцентров сигналов акустической эмиссии, зарегистрированных из области очага разрушения (магистральной трещины). Видно, что и в этом эксперименте фрактальная размерность очага увеличивается, т.е. магистральная трещина становится разветвленной и постепенно занимает все больший объем.

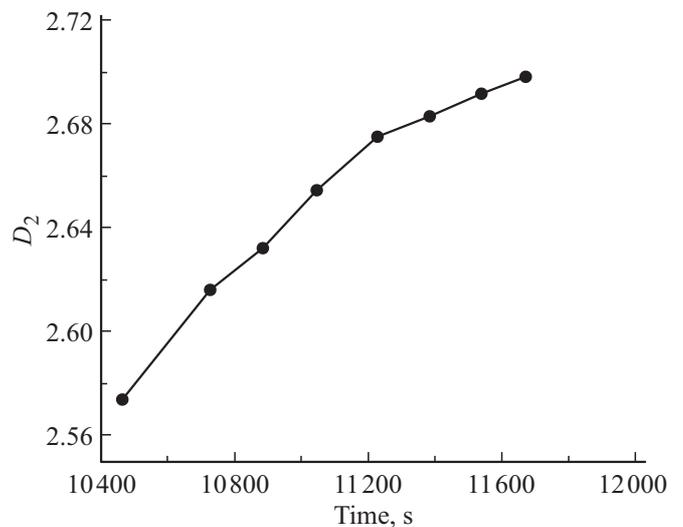


Рис. 8. Зависимость корреляционной фрактальной размерности координат гипоцентров сигналов акустической эмиссии в лабораторном эксперименте.

4. Заключение

В работе исследована эволюция фрактальной геометрии микротрещин в объеме образца природного гетерогенного материала. Прямое наблюдение дефектов в образце, находящемся под действием нагрузки, выполнено с помощью рентгеновской компьютерной микротомографии. На основе анализа томографических срезов вычислена фрактальная размерность системы микротрещин и построены трехмерные модели дефектной структуры. Показано, что фрактальная размерность увеличивается по мере увеличения нагрузки. Это наглядно показывает, каким образом система микротрещин становится более развитой и постепенно занимает все больший объем.

С помощью компьютерной модели разрушения гетерогенного материала, основанной на методе дискретных элементов, исследовано образование и развитие дефектов в процессе нагружения. Компьютерные эксперименты позволили выявить детали образования фрактальных структур очагов разрушения. Мы полагаем, что данную модель можно рассматривать как инструмент для исследования влияния локальных факторов (неоднородность зерен и их границ по размерам и механическим свойствам, деформации и т.д.) на макроскопическое поведение нагруженной горной породы.

Полученные результаты также хорошо согласуются с результатами лабораторных экспериментов по исследованию акустической эмиссии при разрушении гетерогенных материалов под действием механической нагрузки.

Финансирование работы

Работа выполнена в рамках Государственного задания ФТИ им. А.Ф. Иоффе в части постановки задачи, анализа результатов, компьютерного моделирования и обработки экспериментов с использованием метода акустической эмиссии. Работа выполнена в рамках Государственного задания НИЦ „Курчатовский институт“ в части проведения и обработки томографических экспериментов.

Конфликт интересов

Авторы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

Список литературы

- [1] D.A. Lockner, J.D. Byerlee, V. Kuksenko, A. Ponomarev, A. Sidorin. *Nature* **350**, 39 (1991).
- [2] Л.Р. Ботвина. *Физика Земли* **10**, 5 (2011).
- [3] M. Petružálek, J. Vilhelm, V. Rudajev, T. Lokajčec, T. Svitek. *Int. J. Rock Mech. Mining Sci.* **60**, 208 (2013).
- [4] Y. Hamie, O. Katz, V. Lyakhovsky, Z. Reches, Yu. Fialko. *Geophys. J. Int.* **167**, 1005 (2006).
- [5] V. Kuksenko, N. Tomilin, E. Damaskinskaya, D. Lockner. *Pure Appl. Geophys.* **146**, 2, 253 (1996).
- [6] В.Б. Смирнов, А.В. Пономарев, П. Бернар, А.В. Патонин. *Физика Земли* **2**, 17 (2010).
- [7] Xinglin Lei, Shengli Ma. *Earthq. Sci.* **27**, 6, 627 (2014).
- [8] Y. Tal, T. Goebel, J.P. Avouac. *Earth and Planetary Sci. Lett.* **536** (2020).
- [9] Sheng-Qi Yang, P.G. Ranjith, Yi-Lin Gui. *Geotech. Test. J.* **38**, 2, 179 (2015).
- [10] S. Zabler, A. Rack, I. Manke, K. Thermann, J. Tiedemann, N. Harthill, H. Riesemeier. *J. of Struct. Geology.* **30**, 876 (2008).
- [11] Yujun Zuo, Zhibin Hao, Hao Liu, Chao Pan, Jianyun Lin, Zehua Zhu, Wenjibin Sun, Ziqi Liu. *Arabian J. of Geosciences.* **15**, 1673 (2022).
- [12] Yongming Yang, Yang Ju, Fengxia Li, Feng Gao, Huafei Sun. *J. of Natural Gas Sci. and Engin.* **32**, 415 (2016).
- [13] X.P. Zhou, Y.X. Zhang, Q.L. Ha. *Theor. and Appl. Fract. Mechanics.* **50**, 49 (2008).
- [14] J.X. Re. *Soil and Rock Behavior and Modeling.* [https://doi.org/10.1061/40862\(194\)34](https://doi.org/10.1061/40862(194)34)
- [15] Peng RuiDong, Yang YanCong, Ju Yang, Mao LingTao, Yang YongMing. *Chinese Sci Bull.* **56**, 3346 (2011).
- [16] P. Liu, Y. Ju, F. Gao, P.G. Ranjith, Q. Zhang. *J. Geophys. Res.: Solid Earth.* **123**, 2156 (2018).
- [17] P. Churcher, P. French, J. Shaw. *SPE Intern. Symp. on Oilfield Chem. SPE21044* (1991).
- [18] Ю.С. Кривоносов, А.В. Бузмаков, М.Ю. Григорьев, А.А. Русаков, Ю.М. Дымшиц, В.Е. Асадчиков. *Кристаллография*, **68**, 1, 160 (2023).
- [19] Lee A., Feldkamp, Lloyd C. Davis, James W. Kress. *JOSA. A.* **1**, 6, 612–619 (1984).
- [20] A.S. Ingacheva, M.V. Chukalina. *Math. Probl. in Engin.* Article ID 1405365 (2019).
- [21] J.T. Gostick, Z.A. Khan, T.G. Tranter, M.D. Kok, M. Agnaou, M. Sadeghi, Jervis, R. PoreSpy. *J. of Open Source Software.* **4**, 1296 (2019).
- [22] Y. Ju, J.T. Zheng, M. Epstein, L. Sudak, J.B. Wang, X. Zhao. *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.* **279**, 7, 212 (2014).
- [23] H.P. Xie. *Fractals in Rock Mechanics.* CRC PRESS, Boca Raton (1993). 464 p.
- [24] R.D. Peng, Y.C. Yang, Y. Ju, Ju. Yang, Mao LingTao, Ming Yang. *Chinese Sci. Bull.* **56**, 3346 (2011).
- [25] С.В. Божокин, Д.А. Паршин. *Фракталы и мультифракталы.* НИЦ „Регулярная и хаотическая динамика“, Ижевск. (2001). 128 с.
- [26] В.Л. Гиляров, Е.Е. Дамаскинская. *ФТТ* **64**, 6, 676 (2022).
- [27] D.O. Potyondy, P.A. Cundall. *Int. J. Rock Mech. Min. Sci.* **41**, 1329 (2004).
- [28] Dosta, V. Skorych. *SoftwareX* **12**, 100618 (2020).
- [29] V.L. Hilarov, E.E. Damaskinskaya. *Materialwiss. Werkstofftech.* **54**, 1554 (2023).
- [30] M. Ester, H.-P. Kriegel, J. Sander, X. Xu. In: *Proc. of the Second Intern. Conf. on Knowledge Discovery and Data Mining (KDD-96) / Evangelos Simoudis, Jiawei Han, Usama M. Fayyad.* AAAI Press, **226** (1996).
- [31] P. Grassberger, I. Procaccia. *Phys. Rev. Lett.* **50**, 346 (1983).
- [32] Г. Шустер. *Маломерный хаос.* Мир, М. (1988). 240 с.
- [33] T.C. Halsey, M.H. Jensen, L.P. Kadanoff, I. Procaccia, B.I. Shaliman. *Phys. Rev., B.* **33**, 2, 1141 (1986).
- [34] V.L. Hilarov. *Modeling Simul. Mater. Sci. Eng.*, **6**, 337 (1998).

Редактор К.В. Емцев