

Функция распределения электрической прочности диэлектрика со случайно расположенными воздушными включениями

© Ю.П. Вирченко,^{1,2} А.М. Теволде¹

¹ Белгородский государственный национальный исследовательский университет, 308015, Белгород, Россия

² Белгородский государственный технологический университет им. В.Г. Шухова, 308012, Белгород, Россия
e-mail: virch@bsu.edu.ru

Поступило в Редакцию 24 февраля 2024 г.

В окончательной редакции 6 мая 2024 г.

Принята в публикации 28 мая 2024 г.

Рассматривается слой твердотельного полимерного диэлектрика со случайно расположенными в нем с малой плотностью включениями, которые обладают случайными размерами. Электрическая прочность материала вкраплений меньше, чем электрическая прочность материала матрицы. Вследствие случайности распределения вкраплений, при достаточно малой толщине слоя, его электрическая прочность неоднородна вдоль поверхности образца и в различных его частях принимает случайные значения. На основе ранее сконструированной макроскопической статистической модели развития электрического пробоя в описанной физической ситуации устанавливается наличие дополнительной вершины у плотности распределения значений указанной случайной величины.

Ключевые слова: диэлектрик, напряжение электрического пробоя, плотность включений, унимодальность, электрическая прочность

DOI: 10.61011/JTF.2024.10.58851.48-24

Введение

В литературе имеются статистические данные по электрической прочности многослойных полимерных пленок [1], содержащих вследствие технологии их приготовления дефекты в виде включений пузырьков воздуха. Воздушные включения распределены случайным образом в матрице пленки, в среднем однородно вдоль ее плоскости, и обладают случайными размерами. При этом форма таких включений полусферическая, что, опять-таки, является отражением технологии их приготовления посредством нанесения каждого очередного тонкого слоя $\propto 1\text{--}2\text{ мкм}$ в виде раствора полимера. Из-за наличия случайным образом распределенных воздушных включений, электрическая прочность которых ниже электрической прочности полимерного материала пленки, в случае малой плотности таких включений напряжение электрического пробоя в различных участках поверхности пленки не является точно определенной величиной, т.е. имеет отличную от нуля дисперсию. В таком случае электрическая прочность пленки может рассматриваться как случайная величина, а соответствующие ей статистические данные представляются в виде гистограмм. Гистограммы в работе [1] указывают на наличие своеобразного эффекта в виде нарушения унимодальности (одновершинности) распределения электрической прочности. Этот эффект кажется, на первый взгляд, несколько странным, так как появление нескольких вершин в распределении вероятностей указывает на наличие какого-то физического механизма, который приводит

к такой ситуации. В работе [2] указано, что, с точки зрения общих представлений теории вероятностей, этот эффект не содержит в себе ничего необычного, так как плотность распределения случайной электрической прочности представима как распределение вероятностей сумм малого числа независимых случайных, одинаково распределенных величин — радиусов \tilde{r} воздушных включений. Здесь и далее по тексту, величины, отмеченные знаком „тильда“, рассматриваются как случайные. Эти суммы представляют слагаемыми в последовательности независимых испытаний, пространством состояний которой является множество значений их случайных значений. Однако в работах [3–5], в которых анализировалась конкретная теоретическая модель со специальным типом распределения вероятностей случайных величин \tilde{r} , показано, что такой вывод нуждается в каком-то дополнительном обосновании в том числе и физическом, полученном в результате анализа различных физически допустимых унимодальных распределений вероятностей случайных размеров включений, ввиду специфики имеющихся статистических данных по электрической прочности многослойных пленок.

Проведенный в настоящей работе анализ показывает, что эффект нарушения унимодальности распределения электрической прочности, вообще говоря, может быть не связан с многослойностью пленки диэлектрика, когда вследствие специальной технологии нанесения слоев в каждом из них может появиться не более одного включения. Аналогичный эффект может проявиться в любой достаточно тонкой пленке диэлектрического материала.

В анализируемой модели предполагается, что все включения имеют сферическую форму вследствие изотропности возникающего в пузырьке воздушного включения давления. По этой же физической причине распределение вероятностей случайных радиусов \tilde{r} пузырьков таково, что очень малые его значения маловероятны. Вместе с тем в предлагаемой теоретической модели предполагается, что распределение вероятностей для величин \tilde{r} не локализовано около какого-то среднего размера пузырька, а размазано в пределах некоторого интервала $[0, r_*]$ с дисперсией, сравнимой с этим средним значением. Это предположение позволяет вычислить плотность распределения электрической прочности в асимптотическом пределе, когда она является почти равномерной. В этом случае нами показано, что у распределения электрической прочности имеется вершина, дополнительная к той, которая имеет место в случае отсутствия включений. Существенно также, что в процессе нашего математического анализа предполагается, что вследствие малости плотности включений электрический пробой с подавляющей вероятностью порождается только одной электронной лавиной, которая срывается с клеммы, подводящей электрическое напряжение к слою диэлектрика. Такое положение возникает в том случае, когда среднее расстояние между включениями намного больше, чем характерный размер клемм. Электронные лавины, конечно же, могут возникать вследствие флуктуаций электрической прочности материала на любой глубине в материале, однако нас интересуют только такая ситуация, когда происходит электрический пробой пленки насквозь.

1. Феноменологическая картина электрического пробоя слоя диэлектрика

Наш анализ основан на простой статистической модели, при конструкции которой использованы самые общие качественные общезначимые макроскопические представления о феноменологии появления электрического пробоя слоя диэлектрика без использования анализа этого явления на микроскопическом уровне, который приводит к сложным построениям в рамках физической кинетики. Ее построение основано на простой общезначимой идее о том, что отклонение значения электрической прочности пленки от ее значения в случае бездефектного материала в среднем пропорционально той доле толщины пленки, на которую приходится расположение воздушных вкраплений в ее поперечном сечении. Именно эта идея была использована в работах [1,3–5].

Электрический пробой обусловлен ударной ионизацией, сопровождающейся разрывом связей между атомами диэлектрика непосредственно под действием электрического поля. Электрическая прочность $u_{пр}$ твердых диэлектриков по отношению к электрическому пробую

представляет собой отношение напряжения пробоя U слоя к ее толщине d в направлении приложенного напряжения. Значения этой характеристики для полимерных материалов лежат в пределах $(200–400) \cdot 10^3$ V/cm (полиэтилен, полистирол и т.д.) [6]. По поводу свойств диэлектриков в сильных электрических полях см. [7,8]. Если в материале диэлектрика расположены случайным образом воздушные включения со случайными размерами, то пробойное напряжение является, вообще говоря, случайной величиной \tilde{U} при фиксации места его приложения к противоположным плоскостям слоя. Следовательно, случайной величиной является измеряемая в этом месте его электрическая прочность. Это связано с тем, что электрическая прочность воздуха значительно меньше, чем электрическая прочность материала диэлектрика. Случайность указанного типа несущественна в случае, если статистическое распределение величины \tilde{U} обладает малой дисперсией в меру малости отношения \tilde{r}/d . Наоборот в случае, когда дисперсия распределения заметным образом отлична от нуля, на гистограммах случайной величины \tilde{U} должен наблюдаться статистический разброс напряжений электропробоя и, следовательно, электрической прочности.

Число воздушных включений, через которые проходит пробойная электронная лавина, является случайным. При малой плотности включений, оно не очень велико. Поэтому можно думать, что, как правильно указано в работе [2], в случае, если распределение вероятностей случайных размеров пузырьков локализовано вблизи фиксированной их средней величины, то соответствующее статистическое распределение электрической прочности должно иметь несколько максимумов, число которых, по порядку величины, равно среднему числу воздушных включений, через которые развивается электрический пробой. Анализ предлагаемой ниже математической модели показывает, что в том случае, когда это распределение не является локализованным, то, действительно, при сколь угодно малой плотности включений происходят нарушения унимодальности распределения электрической прочности, всегда имеется вершина распределения, дополнительная к той, которая должна иметь место в случае их отсутствия.

Следствием предлагаемой нами теории является то, что подобный эффект не связан с тем, что слой полимерного материала, с которым производились эксперименты, упоминаемые в процитированном обзоре, не обязательно должен носить многослойный характер. Проявление эффекта неунимодальности распределения электрической прочности возможно для пленок диэлектриков, содержащих воздушные включения с унимодальным распределением их размеров, который обладает большим средним квадратичным отклонением σ , сравнимым с их средним значением r_0 , $\sigma \propto r_0$. Далее, мы предполагаем плотность распределения воздушных включений настолько малой, что размер клемм l , посредством которых напряжение прикладывается к плоскостям слоя, намного меньшим, чем среднее расстояние l_0 между

воздушными включениями, $l \ll l_0$. Это позволяет нам считать, что электрический пробой слоя развивается посредством срыва одной единственной электронной лавины с поверхности клеммы подводимого к ней электрического напряжения.

2. Построение теоретической модели

Рассмотрим слой диэлектрика с толщиной d . Обозначим посредством u электрическую прочность материала так, что ud — соответствующее напряжение электрического пробоя. Пусть в объеме слоя случайным образом в среднем равномерно, распределены воздушные включения. Мы будем предполагать, что они имеют сферическую форму, что обусловлено действием поверхностного натяжения пузырька воздуха внутри слоя полимерного материала, который находился в процессе затвердевания из жидкого состояния. В этом случае геометрическое состояние каждого отдельного случайного включения полностью характеризуется одной положительной случайной величиной \tilde{r} — радиусом пузырька. Для построения вероятностной модели введем в рассмотрение множество $\{\tilde{x}_k; k = 1-N\}$ центров сферических воздушных включений, где $N \gg 1$ — число включений в некоторой конечной части слоя. Точки $\tilde{x}_k; k = 1-N$ представляют собой случайные трехмерные векторы. С математической точки зрения множество $\{\tilde{x}_k; k = 1-N\}$ представляет собой реализацию точечного случайного поля (см., например, [9]). Мы будем далее предполагать, что средняя плотность $\rho \propto l_0^{-3}$ включений мала, т.е. среднее расстояние l_0 между ними много больше, чем их средний радиус r_0 . Ввиду малости средней плотности можно считать, что они не оказывают влияния друг на друга, т.е. являются статистически независимыми. В этом случае вследствие однородности в среднем распределении включений внутри слоя можно считать, что $\{\tilde{x}_k; k = 1-N\}$ является однородным пуассоновским случайным полем с плотностью ρ в объеме диэлектрика. При этом случайные точки $\tilde{x}_k, k = 1-N$ взаимно однозначным образом связаны со случайными величинами \tilde{r}_k — радиусами включений с центрами в соответствующих точках $\tilde{x}_k, k = 1, 2, 3, \dots, N$. Они представляют собой набор одинаково распределенных положительных непрерывных случайных величин. Обозначим посредством $h(r)$ общую для них плотность распределения. Более того, так как центры расположения включений статистически независимы в совокупности, то можно считать, что все случайные величины $\tilde{r}_k, k = 1, 2, 3, \dots$ также статистически независимы в совокупности.

Пусть к плоскостям слоя приложено электрическое напряжение U . При превышении величиной U некоторого, достаточно большого, вообще говоря, случайного значения \tilde{U} происходит ее электрический пробой. Он развивается посредством проскакивания электронной лавины между плоскостями поверхности слоя,

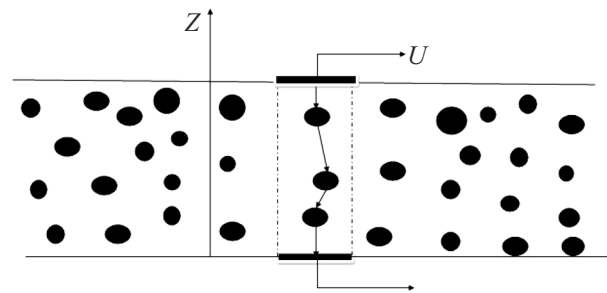


Рис. 1. На рисунке схематически темными кружками показаны воздушные включения вместе с выделенной цепочкой с $M = 3$ таких включений, вдоль которой стрелками обозначено движение пробойной электронной лавины.

которая приводит к деградации материала. Так как электрическая прочность воздуха существенно меньше электрической прочности материала диэлектрика, то естественно считать, что электронная лавина стремится проходить по пути наименьшего сопротивления через какие-то воздушные включения в объеме слоя. В настоящей работе мы считаем, что плотность включений настолько мала, что электрический пробой происходит вследствие развития только одной лавины, т.е. одновременное проскакивание двух и более лавин между клеммами, подводимыми электрическое напряжение, маловероятно.

Движение электронной лавины, посредством которой реализуется электрический пробой, представляется в виде ломанной линии, состоящей из прямолинейных отрезков, которые соединяют последовательно центры включений. При этом начальная \tilde{x}_0 и конечная \tilde{x}_{M+1} точки этой ломаной, которые расположены на плоскостях поверхности слоя, должны покрываться клеммами подводимого к слою полимера электрического напряжения. Для простоты дальнейших рассмотрений, будем считать, что эти клеммы имеют квадратную форму с длиной ребра l . Центры этих квадратов расположены напротив друг друга на противоположных плоскостях так, что эти квадраты могут быть совмещены при параллельном переносе в перпендикулярном к слою направлении.

Пусть u_0 — электрическая прочность воздуха. Напряжение электрического пробоя в том случае, когда электронная лавина в процессе своего развития, движется вдоль элемента ломаной (рис. 1), проведенного из m -го в порядке прохождения центра \tilde{x}_{k_m} включения в центр $\tilde{x}_{k_{m+1}}$ следующего $(m + 1)$ -го включения, складывается из напряжения электрического пробоя m -го воздушного пузырька, равного $2u_0\tilde{r}_{k_m}$, и напряжения электрического пробоя полимерного материала вдоль этого элемента ломаной, т.е. равно сумме

$$[2u_0\tilde{r}_{k_m} + u(|\tilde{x}_{k_m}^{(m)} - \tilde{x}_{k_{m+1}}^{(m+1)}| - 2\tilde{r}_m)].$$

Тогда напряжение электрического пробоя, если пробойная лавина развивается по рассматриваемой случайным

образом выбранной ломаной траектории равно

$$\tilde{U} = \sum_{m=0}^M \left[2u_0 \tilde{r}_m + u(|\tilde{\mathbf{x}}_{k_m}^{(m)} - \tilde{\mathbf{x}}_{k_{m+1}}^{(m+1)}| - 2\tilde{r}_m) \right]. \quad (1)$$

Здесь номера k_1, \dots, k_M — номера точек случайного поля, а точки $\tilde{\mathbf{x}}_{k_0}, \tilde{\mathbf{x}}_{k_{M+1}}$ — точки на внешних плоскостях покрытия.

Заметим, что формула (1) никак не связана с кинетикой зарождения электронной лавины на микроскопическом уровне. Она описывает, с общезначимой точки зрения, только траекторию распространения уже возникшей лавины, пронизывающей пленку насквозь. Именно такое ее распространение приводит к последующей такой деградации материала пленки, при которой она уже не может выполнять роль изолирующего элемента с электротехнической точки зрения. Таким образом, формула (1) не предназначена для всестороннего описания явления электропробоя, а только лишь является элементом решения той задачи, которая рассматривается в настоящей работе. Для детального же описания процесса зарождения лавины, ее развития посредством выбивания электронов с внешних облочков атомов материала и, как следствие, их ионизации, необходима микроскопическая теория электропробоя, которая, как кажется авторам, не даст ничего принципиально нового для описания статистики траекторий движения пробойной электронной лавины.

Будем далее считать, что $l \ll l_0$. В этом случае размером клемм можно пренебречь и с большой точностью можно считать, что точки \mathbf{x}_1 и \mathbf{x}_{M+1} расположены в центрах клемм так, что их можно рассматривать как неслучайные. Таким образом, случайное напряжение \tilde{U} электрического пробоя, случайность которого связана со случайным расположением включений и их случайными размерами, дается формулой (1). Очевидно, что лавина должна развиваться таким образом, чтобы центры включений, через которые происходит ее развитие, не сильно отклонялись друг от друга в поперечном по отношению к оси, вертикальной по отношению к плоскостям поверхности. Это означает, что траектория лавины почти прямолинейна. Так как средний радиус r_0 включения много меньше среднего расстояния l_0 между включениями, которое, в свою очередь, много меньше, чем толщина слоя d , то $r_0 + l_0 \ll d$. В этом случае можно пренебречь разницей между длиной каждого звена ломанной и его проекцией на указанную вертикальную ось.

Введем в рассмотрение плотность $f(U)$ распределения вероятностей случайной величины (1) при фиксированных: плотности ρ расположения точек случайного поля $\{\tilde{\mathbf{x}}_k; k = 1-N\}$ и плотности распределения $h(r)$ в условиях, когда средний радиус включения $r_0 = \int_0^\infty rh(r)dr$ намного меньше l_0 . При таких допущениях сумма в (1) представляется в виде $u_0 \tilde{s} + u(d - \tilde{s})$,

где случайное расстояние

$$\tilde{s} = \sum_{m=1}^M \tilde{r}_m$$

представляет собой суммарную длину всех M воздушных включений, через которые распространяется электронная лавина. В терминах случайной величины \tilde{s} формула (1) записывается в виде $\tilde{U} = ud - 2(u - u_0)\tilde{s}$.

Обозначим удвоенную разность $v = 2(u - u_0)$ электрических прочностей диэлектрического материала и воздуха. Тогда базовая формула, определяющая случайное значение напряжения \tilde{U} электрического пробоя в рамках описанной вероятностной, имеет вид (ср. [2–4])

$$\tilde{U} = ud - v\tilde{s},$$

где случайная величина \tilde{s} представляет собой сумму независимых, одинаково распределенных случайных величин, каждая из которых распределена с плотностью $h(r)$.

Пусть U — электрическое напряжение, приложенное в рассматриваемом месте поверхности слоя диэлектрика, при превышении которого случайной величиной \tilde{U} происходит электрический пробой. Обозначим $s = (ud - U)/v$. Так как неравенство $U > ud - v\tilde{s}$ эквивалентно $s < \tilde{s}$, то функция распределения вероятности $F(U) = \Pr\{\tilde{U} < U\}$ возникновения электрического пробоя дается формулой

$$F(U) = \Pr\{\tilde{U} < U\} = 1 - \Pr\{\tilde{s} < s\},$$

ввиду непрерывности распределения вероятностей случайной величины \tilde{s} при $s > 0$ или, что то же самое, при $U < ud$. Введем плотность распределения

$$g(s) = \frac{d}{ds} \Pr\{\tilde{s} < s\}.$$

Следовательно, плотность $f(U)$ распределения случайной величины \tilde{U} равна

$$f(U) = \frac{d}{dU} \Pr\{\tilde{U} < U\} = v^{-1} g(s)|_{s=(ud-U)/v},$$

так как $ds/dU = -v^{-1}$.

Вероятность $\Pr\{\tilde{s} < s\}$ состоит из суммы вероятностей случайных событий $\{\tilde{s} < s, \tilde{m} = m\}$ по всем возможным значениям $m = 0, 1, 2, \dots$ случайной величины $\tilde{m} < M$, где \tilde{m} — случайное число воздушных включений, через которые проходит электронная лавина при появлении электрического пробоя. Число M не может превышать величину, заведомо меньшую, чем $d/2r_0$, так как $d \gg l_0 + r_0$. Можно утверждать большее. Ввиду малости плотности ρ , максимальное значение M случайной величины \tilde{m} при реализации пробоя не может быть большим. Так как включения распределены независимо друг от друга и прохождение траектории лавины через какие-либо различные включения должны также

рассматриваться как независимые в совокупности случайные события. Поэтому распределение вероятностей $\Pr\{\tilde{m} = m\}$ случайного числа включений, через которые проходит лавина при фиксированном значении M , определяется последовательностью независимых испытаний (см., например, [9])

$$\Pr\{\tilde{m} = m\} = \binom{M}{m} v^m (1-v)^{M-m}, \quad (2)$$

в которой вероятность „успеха“ $v > 0$ пропорциональна $\rho^{1/3}$. В таком случае, если величина Mv очень мала, то, согласно распределению Пуассона, очень мала вероятность $\lambda^m \exp(-\lambda)/M!$, $\lambda = Mv$ появления больших значений m случайной величины \tilde{m} . По этой причине можно допустить изменение этой случайной величины от нуля до бесконечности и заменить ее распределение вероятностей (2) на распределение Пуассона

$$\Pr\{\tilde{m} = m\} = \frac{\lambda^m}{m!} \exp(-\lambda). \quad (3)$$

При этом плотность $g(s)$ нужно рассматривать как независимую от M .

Так как $\{\tilde{s} < s, \tilde{m} = m\}$ является произведением случайных событий $\{\tilde{s} < s\}$ и $\{\tilde{m} = m\}$, то с учетом (3)

$$\Pr\{\tilde{s} < s, \tilde{m} = m\} = \frac{\lambda^m}{m!} \exp(-\lambda) \Pr\{\tilde{s} < s | \tilde{m} = m\}.$$

При $m = 0$ условная вероятность $\Pr\{\tilde{s} < s | m = 0\}$ равна функции Хевисайда $\theta(s)$, так как в этом случае $\tilde{s} = 0$. Следовательно, согласно формуле полной вероятности [9], получаем следующее выражение:

$$\Pr\{\tilde{s} < s\} = \theta(s) \exp(-\lambda) + \sum_{k=1}^{\infty} \Pr\{\tilde{s} < s | \tilde{m} = m\}. \quad (4)$$

Таким образом, функция распределения случайной величины \tilde{s} полностью определяется распределением вероятностей случайной величины \tilde{s} . Последнее, при фиксированном значении m , представляет собой распределение вероятностей суммы m независимых, одинаково распределенных в соответствии с плотностью $h(r)$ случайных величин. Поэтому (см., например, [9]) оно равно

$$\Pr\{\tilde{s} \leq s | \tilde{m} = m \neq 0\} = \int_{-0}^s \underbrace{(h * \dots * h)}_m(r) dr \equiv \int_{-0}^s (h_*^m)(r) dr, \quad (5)$$

где

$$h(r) = \frac{d}{dr} \Pr\{\tilde{r} < r\}, \quad \int_0^d h(r) dr = 1$$

и символом $*$ обозначена бинарная операция свертки плотностей распределений вероятностей [9] так, что повторное применение этой операции к плотности $h(r)$ дается формулой

$$(h_*^{m+1})(r) = \int_{0+}^r (h_*^m)(r') h(r-r') dr'.$$

В результате плотность распределения $g(s)$, согласно (4), (5), представляется в виде

$$g(s) = \exp(-\lambda) \left[\delta(s) + \sum_{l=1}^{\infty} \frac{\lambda^l}{l!} h_*^l(s) \right], \quad (6)$$

где учено, что $d\theta(s)/ds = \delta(s)$ — функция Дирака.

Наличие δ -функциональной особенности в плотности распределения $g(s)$ в точке $s = 0$ приводит к наличию δ -функциональной особенности в точке $U = ud$ в плотности распределения $f(U)$. Соответствующий максимум, пропорциональный $\exp(-\lambda)$, может быть наблюдаем на гистограммах экспериментальных данных только при малых значениях λ , т. е. очень малых значений плотности ρ включений.

3. Плотность распределения электрической прочности

На практике вид плотности $h(r)$, а также значение параметра λ неизвестны. Поэтому при математическом анализе описанный выше модели придется оперировать каким-то классом плотностей $h(r)$ и на основании такого анализа путем сравнения его предсказаний со статистическими данными выбирать конкретную модель плотности $h(r)$ и значение параметра λ , описывающие экспериментальные данные.

В настоящей работе, мы анализируем поведение плотности $f(U)$ в случае модельных плотностей $h(r)$, которые являются унимодальными с неравной нулю вершиной r_{\max} при $r_* > r > 0$, но которые не локализованы в окрестности этой вершины с малой дисперсией, а, наоборот, среднее квадратичное отклонение, соответствующее этой плотности, сравнимо по порядку величины с r_0 . При этом полагается, что $r_* \ll d$.

Введем безразмерную переменную $x = r/r_*$ и положим $h(r) = w(x, \eta)/r_*$, где каждая из плотностей $w(x, \eta)$ сосредоточена на $[0, 1]$. Здесь мы ввели параметр $\eta > 0$, характеризующий делокализацию плотности на интервале определения. Пусть однопараметрическое семейство плотностей $w(x, \eta)$ таково, что $w(x, \eta) = w(x) + 0(\eta)$ при $\eta \rightarrow +0$, где $w(x) = \theta(x)\theta(1-x)$. Примером такого семейства является, в частности,

$$w(x, \eta) = Z_\eta [1 - \exp(-v(x)/\eta)],$$

где функция $v(x) > 0$ определена на $(0, 1)$, имеет один минимум и $\lim_{x \rightarrow +0} v(x) = \lim_{x \rightarrow 1-} v(x) = \infty$, $Z_\eta > 0$ — нормировочная постоянная.

В настоящей работе мы проанализируем поведение распределения вероятностей электрической прочности в случае, пригодном для любого однопараметрического семейства плотностей $w(x, \eta)$ указанного типа в пределе $\eta \rightarrow +0$. При этом, как уже было сказано выше, по порядку величины, выполняется неравенство $l_0 \ll d$, и поэтому $\lambda \ll 1$.

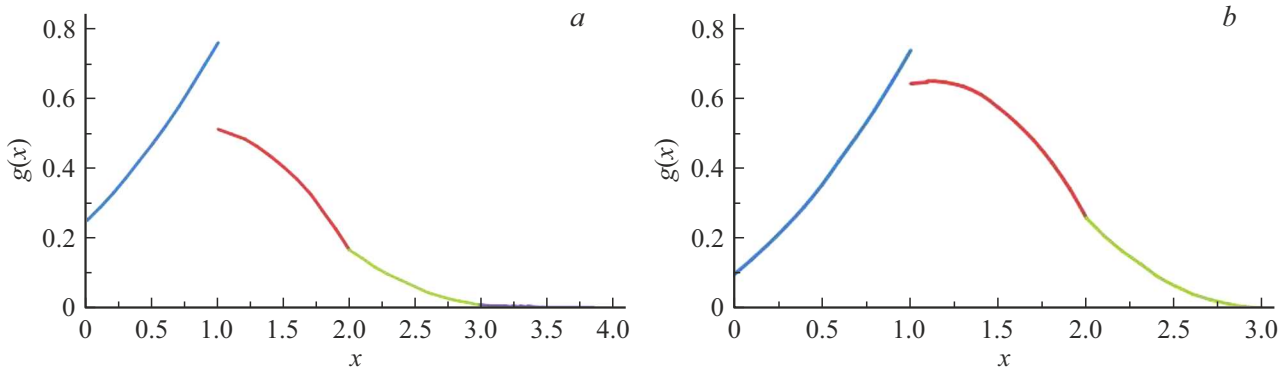


Рис. 2. Графики плотности $g(x)$: *a* — удовлетворяющие условию[(7) $\lambda = 1$; *b*] — не удовлетворяющие этому условию $\lambda = 3$. Наличие скачка в точке $x = 1$ связано с тем, что вычисление произведено в предельном случае $\eta \rightarrow \infty$.

Запишем формулу (6) в главном приближении при $\eta \rightarrow 0$ в терминах безразмерной переменной x :

$$g(s) = \frac{1}{r_*} \exp(-\lambda) \left[\delta(x) + \sum_{l=1}^{\infty} \frac{\lambda^l}{l!} w_*^l(x) \right].$$

Из теоремы 3, доказанной в Приложении, следует, что функции $w_*^m(x)$ локализованы на $[0, m]$ соответственно. Они непрерывны и дифференцируемы при $m \geq 2$ (см. Приложение, формула (П4)). Функция же $w(x)$, очевидным образом, разрывна и локализована на $[0, 1]$. В Приложении также доказано утверждение о том, что в случае, когда параметр λ удовлетворяет неравенству

$$\sum_{l=2}^{\infty} \frac{\lambda^{l-1}}{(l!)^2} < 1, \tag{7}$$

которое выполняется при малых значениях λ , функция, представленная суммой в квадратных скобках, обладает при $x > 1$ единственной вершиной в точке $x_* = 1$, которая сопровождается скачком плотности в этой точке справа от вершины. Наличие разрыва такого типа носит чисто модельный характер. Он появляется только в пределе $\eta \rightarrow +0$ так, что при конечных значениях параметра $\eta > 0$ для рассматриваемого класса плотностей $w(x; \eta)$ в точке $x_* = 1$ плотность $g(s)$ непрерывна и имеет максимум. Таким образом, при указанных соотношениях между физическими параметрами модели в анализированном нами случае, когда унимодальная модельная плотность распределения $h(r)$ „размазана“ по отрезку $[0, r_*]$ своего определения, плотность $g(s)$ обладает всегда двумя вершинами, одна из которых совпадает с $s = 0$, а другая — с $s = r_*$. Следовательно, плотность распределения $f(U)$ напряжения электрического пробоя слоя диэлектрика также обладает в указанных условиях двумя вершинами, одна из которых совпадает с напряжением ud пробоя бездефектного материала, а вторая — с $(ud - r_*v) = u(d - r_*) + r_*u_0$. При значениях λ , не подчиняющихся условию (7), возникает дополнительная вершина у плотности распределения $g(s)$ (рис. 2).

Заключение

В работе проанализирована сконструированная на основе общефизических представлений статистическая модель развития электропробойной лавины в слое полимерного материала, с распределенными в ней случайным образом воздушными включениями, которые имеют мезоскопические случайные размеры. Показано, что в условиях малости среднего размера r_0 воздушного дефекта в материале слоя диэлектрика по сравнению с ее толщиной d , а также при условии, если плотность расположения дефектов достаточно мала, на экспериментальных гистограммах электрической прочности должны проявляться ровно две вершины. Причем одна из них совпадает с напряжением электрического пробоя бездефектного материала, а вторая с электрическим напряжением $u(d - r_*) + r_*u_0$, где u и u_0 — электрические прочности материала и воздуха соответственно, а r_* — характерный размер воздушных включений. Такое положение должно иметь место при изменении физических характеристик диэлектрика в довольно широких пределах.

В дальнейшем с целью уточнения физической причины нарушения унимодальности плотности $f(U)$ при $U < ud$, желательно исследовать ее поведение в рамках предложенных: математической модели и типа модельных плотностей распределения $h(r)$ случайных размеров включений в том случае, когда плотность ρ распределения воздушных дефектов в материале не является очень малой величиной. Кроме того, важно исследовать модель развития электрического пробоя для другого класса унимодальных плотностей $h(r)$ таких, которые рассматривались в работе [3].

Конфликт интересов

Авторы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

Приложение

Операция свертки двух плотностей $f_1(x)$ и $f_2(x)$ распределения, сосредоточенных на $[0, \infty)$, определяется формулой

$$(f_1 * f_2)(x) = \int_{-0}^{\infty} f_1(y)f_2(x - y)dy. \quad (\text{П1})$$

Ее можно рассматривать как коммутативное умножение на множестве всех таких плотностей. С математической точки зрения множество плотностей, снабженное такой операцией, является полугруппой с единицей, роль которой выполняет плотность $\delta(x)$. При таком определении умножения, соответствующая ему m -я степень $(f_*^m)(x)$ любой плотности $f(x)$ на $[0, \infty)$ определяется посредством рекуррентного соотношения

$$(f_*^m)(x) = \int_{-0}^{\infty} (f_*^{m-1})(y)f(x - y)dy.$$

Изучим качественное поведение степеней $w_*^m(x)$ модельной плотности распределения $w(x) = \theta(x)\theta(1 - x)$. Прежде всего докажем следующую формулу.

Теорема 1. Для плотностей $w_*^m(x)$ справедлива формула

$$w_*^m(x) = w_*^m(m - x). \quad (\text{П2})$$

Обозначим

$$\bar{u}_j(k) = \int_{-\infty}^{\infty} u_j(x)e^{ikx} dx, \quad j \in \{1, 2\}$$

фурье-образы плотностей $u_1(x)$ и $u_2(x)$. Согласно (П1),

$$\begin{aligned} (\overline{u_1 * u_2})(k) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx}(u_1 * u_2)(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx} \\ &\times \left(\int_{-\infty}^{\infty} u_1(y)u_2(x - y)dy \right) dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{iky}u_1(y) \\ &\times \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{ik(x-y)}u_2(x - y)dx \right) dy = \bar{u}_1(k)\bar{u}_2(k). \end{aligned}$$

Следовательно, фурье-образ m -й степени плотности $u(x)$

$$(\overline{u_*^m})(k) = \int_{-\infty}^{\infty} (u_*^m)(x)e^{ikx} dx, \quad m = 1, 2, 3, \dots$$

удовлетворяет соотношению $(\overline{u_*^m})(k) = (\overline{u_*^{m-1}})(k)\bar{u}(k)$, и поэтому

$$(\overline{u_*^m})(k) = \bar{u}^m(k). \quad (\text{П3})$$

Плотность $w(x)$ обладает свойством $w(x) = w(1 - x)$. Следовательно, для ее фурье-образа справедливы равенства

$$\begin{aligned} \bar{w}(k) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx}w(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx}w(1 - x)dx \\ &= e^{ik} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ik(x-1)}w(1 - x)dx = e^{ik}\bar{w}(-k), \end{aligned}$$

т.е.

$$\bar{w}(k) = e^{ik}\bar{w}(-k).$$

Из этого равенства и (П3) следует, что

$$\bar{w}^m(k) = e^{ikm}\bar{w}^m(-k).$$

Применив обратное преобразование Фурье к обеим частям последнего равенства, находим

$$\begin{aligned} w_*^m(x) &= \frac{1}{2\pi} \int e^{-ikx}\bar{w}^m(k)dk = \frac{1}{2\pi} \int e^{-ik(x-m)} \\ &\times \bar{w}^m(-k)dk = w_*^m(m - x). \end{aligned}$$

Следствие 1. Максимум функции $w_*^m(x)$ находится в точке $x = m/2$.

Это следует из (П2).

Следующее утверждение является уточнением известной теоремы Ибрагимова (см. [10,11]) о т.н. строго унимодальных функциях при применении ее к плотности $w(x)$.

Теорема 2. Если точка максимума неотрицательной непрерывной функции $u(x)$ на $[0, \infty)$ единственна и функция $u(x)$ не имеет интервалов постоянства, то точка максимума функции $(w * u)(x)$ также единственна и эта функция не имеет интервалов постоянства.

Функция

$$(w * u)(x) = \int_{\max\{0, x-1\}}^x u(y)dy$$

непрерывно дифференцируема, и поэтому каждая ее экстремальная точка x_* , определяемая обращением в нуль производной, может находиться только при $x > 1$ и она должна удовлетворять уравнению

$$\frac{d}{dx} (w * u)(x) = u(x) - u(x - 1) = 0. \quad (\text{П4})$$

Допустим противное, что у функции $(w * u)(x)$ имеется пара точек $x_j, j \in \{1, 2\}$ максимума на $(0, \infty)$, причем $x_1 < x_2$. Они являются решениями уравнения (П4). Так как точка максимума x_* функции единственна, то $x_j \geq x_*, j \in \{1, 2\}$. Равенство здесь невозможно,

так как в таком случае точка x_* не единственна. Точно также получается, что $x_j - 1 < x_*$, $j \in \{1, 2\}$. Если при этом $u(x_2) = u(x_1)$, то функция $u(x)$ имеет интервал (x_1, x_2) постоянства, что исключается условием теоремы. Таким образом, имеется единственная возможность $u(x_2) < u(x_1)$. Точно также, рассуждая, находим, что $u(x_2 - 1) > u(x_1 - 1)$. Тогда, вычитая друг из друга равенства $u(x_j) = u(x_j - 1)$, получаем противоречие, так как $u(x_2) - u(x_1) < 0$ и одновременно $u(x_2) - u(x_1) = u(x_2 - 1) - u(x_1 - 1) > 0$.

Следствие 2. Функции $w_*^m(x)$ при $m \geq 2$ имеют единственную точку максимума.

Функция $w_*^2(x)$ имеет, явным образом, единственную точку максимума в $x = 1$. Общее утверждение получается, на основе Теоремы 2, индукцией по $m > 2$.

Последовательное вычисление степеней операции свертки плотности $w(x)$ осуществляется на основе формулы

$$w_*^{m+1}(x) = \int_0^x w(x-y)w_*^m(y)dy = \int_0^x \theta(x-y) \times \theta(1-x+y)w_*^m(y)dy. \tag{П5}$$

Очевидно, что $w_*^m(x) = \theta(x)w_*^m(x)$, более того, на основе формулы (П5) индукцией по m доказывается.

Теорема 3. Каждая плотность $w_*^m(x)$ сосредоточена на $[0, m]$, $m = 1, 2, 3, \dots$, т.е. имеет место формула $w_*^m(x) = \theta(m-x)w_*^m(x)$.

Заменяем плотность $w_*^m(y)$ в подынтегральном выражении на $w_*^m(y)\theta(m-y)$ согласно предположению индукции. Ввиду того что при $x > m+1$ и $y < m, 1+y > x$, должно выполняться $1+m > 1+y > x > m+1$, что невозможно, т.е. $\theta(m-y)\theta(1-x+y)\theta(x-m-1) = 0$. Следовательно, интеграл в (П5) пропорционален $\theta(m+1-x)$.

Согласно (П4), учитывая, что $w_*^{m+1}(x)$ сосредоточена на $[0, m+1]$, запишем ее выражение на этом отрезке в виде

$$w_*^{m+1}(x) = \int_0^x \theta(x-y)\theta(1-x+y)w_*^m(y)dy = \int_0^x w_*^m(y)dy + \theta(x-1) \int_{x-1}^x w_*^m(y)dy. \tag{П6}$$

Индукцией по m из (П4) следует, что функции $w_*^m(x)$ непрерывны начиная с $m = 2$, и при $m > 2$ они дифференцируемы.

На основе формулы (П6) докажем следующее утверждение.

Теорема 4. Для степеней $w_*^m(x)$ имеет место представление

$$w_*^m(x) = \sum_{k=0}^{m-1} \theta(x-k)\theta(k+1-x)P_{m,k}(x), \tag{П7}$$

где для полиномов $P_{m,k}(x)$, $k = 0, 1, \dots, m-1$, $m = 1, 2, 3, \dots$ справедливы рекуррентные соотношения

$$P_{m+1,0}(x) = \int_0^x P_{m,0}(y)dy, \quad x \in [0, 1), \tag{П8}$$

$$P_{m+1,m}(x) = \int_{x-1}^m P_{m,m-1}(y)dy, \quad x \in [m, m+1), \tag{П9}$$

$$P_{m+1,k}(x) = \int_{x-1}^k P_{m,k-1}(y)dy + \int_k^x P_{m,k}(y)dy, \quad x \in [1, m), \quad k = 1 - m - 1. \tag{П10}$$

Представление (П7) имеет место при $m = 1$ с $P_{1,0}(x) = 1$. Построим индукционный шаг от m к $m+1$. Подстановка (П7) при $m+1$ в правую часть формулы (П7) при $x \in [0, m+1]$ приводит к равенству

$$w_*^{m+1}(x) = \theta(1-x) \int_0^x P_{m,0}(y)dy + \theta(x-1) \sum_{k=0}^{m-1} \int_{x-1}^x \theta(y-k) \times \theta(k+1-y)P_{m,k}(y)dy, \tag{П11}$$

где учтено, что в первый интеграл дает ненулевой вклад только слагаемое с полиномом $P_{m,0}(y)$. Последний интеграл при $k = 0, 1, 2, \dots$ запишем в виде

$$\int_{x-1}^x \theta(y-k)\theta(k+1-y)P_{m,k}(y)dy = \theta(x-k)\theta(k+2-x) \times \int_{x-1}^x \theta(y-k)\theta(k+1-y)P_{m,k}(y)dy,$$

так как при $x-1 > k+1$ и при $x < k$ он равен нулю.

При $k < m$, если $k+1 < x < k+2$, то $k < x-1 < k+1$ и в этом случае

$$\int_{x-1}^x \theta(y-k)\theta(k+1-y)P_{m,k}(y)dy = \int_{x-1}^{k+1} P_{m,k}(y)dy;$$

если же $k < x < k+1$, то $x-1 < k$ и в этом случае

$$\int_{x-1}^x \theta(y-k)\theta(k+1-y)P_{m,k}(y)dy = \int_k^x P_{m,k}(y)dy.$$

Следовательно,

$$\int_{x-1}^x \theta(y-k)\theta(k+1-y)P_{m,k}(y)dy = \theta(x-k-1) \times \theta(k+2-x) \int_{x-1}^{k+1} P_{m,k}(y)dy + \theta_k \theta(x-k)\theta(k+1-x) \times \int_k^x P_{m,k}(y)dy,$$

где $\theta_k = 1 - \delta_{k,0}$. Подставив полученные представления для интегралов в (П11), находим, что

$$w_*^{m+1}(x) = \theta(x)\theta(1-x) \int_0^x P_{m,0}(y)dy + \sum_{k=0}^{m-1} \left[\theta_k \theta(x-k) \times \theta(k+1-x) \int_k^x P_{m,k}(y)dy + \theta(x-k-1)\theta(k+2-x) \times \int_{x-1}^{k+1} P_{m,k}(y)dy \right] = \sum_{k=1}^{m-1} \theta(x-k)\theta(k+1-x) \left[\int_k^x P_{m,k}(y)dy + \int_{x-1}^k P_{m,k-1}(y)dy \right] + \theta(x)\theta(1-x) \int_0^x P_{m,0}(y)dy + \theta(x-m)\theta(m+1-x) \int_{x-1}^m P_{m,m-1}(y)dy.$$

Определяя функции $P_{m+1,0}(x)$, $P_{m+1,m}(x)$, $P_{m+1,k}$, $k = 1-m-1$, согласно (П8), (П9), (П10), получаем искомое представление для плотности $w_*^{m+1}(x)$,

$$w_*^{m+1}(x) = \sum_{k=0}^m \theta(x-k)\theta(k+1-x)P_{m+1,k}(x).$$

Следствие 3. Полиномы $P_{m+1,k}(x)$, $k = 0, 1, \dots, m-1$ удовлетворяют тождествам

$$P_{m,k}(x) = P_{m,m-1-k}(m-x). \tag{П12}$$

Подставляя в тождество (П2) разложения (П7) для функций $w_*^m(x)$ и $w_*^m(m-x)$, находим, что должно выполняться

$$\sum_{k=0}^{m-1} \theta(x-k)\theta(k+1-x)P_{m,k}(x) = \sum_{k=0}^{m-1} \theta(m-x-k) \times \theta(k+1-m+x)P_{m,k}(m-x).$$

Замена переменной суммирования $m-1-k$ на k в сумме правой части равенства приводит к тождеству

$$\sum_{k=0}^{m-1} \theta(x-k)\theta(k+1-x)P_{m,k}(x) = \sum_{k=0}^{m-1} \theta(x-k) \times \theta(k+1-x)P_{m,-1-k}(m-x),$$

из которого следует, что имеет место (П12) при $x \in [k, k+1]$.

Следующее утверждение представляет собой дополнение к Теореме 2 в случае, если функция $u(x)$ обладает вершиной, которая сопровождается разрывом 1-го рода.

Лемма. Пусть $u(x)$ — непрерывная слева плотность распределения на $[0, \infty)$, которая имеет единственную точку максимума $x_* = 1$, являющуюся точкой разрыва 1-го рода. Тогда, если $u(x_*+0) \leq u(0)$, то плотность распределения $(w * u)(x)$ имеет единственный максимум в точке x_* .

Плотность $(w * u)(x)$ обладает вершиной z . Она обязательно удовлетворяет неравенству $z \geq x_*$. При доказательстве Теоремы 2 непрерывность функции $u(x)$ использовалась только для того, чтобы получить уравнение для точки максимума плотности $(w * u)(x)$. Поэтому, если $z > 1$, то для этой точки должно выполняться $u(z) = u(z-1)$. Но так как $u(x_*+0) \leq u(0)$ и точка x_* является единственной вершиной плотности $u(x)$, то $u(z) < u(x_*+0) < u(x_*-1) < u(z-1)$ и указанное равенство невозможно. Тогда для расположения вершины плотности $(w * u)(x)$ имеется единственная возможность $x_* = 1$.

Применим теперь это утверждение к анализу функции

$$W(x) = \sum_{l=1}^{\infty} \frac{\lambda^l}{l!} w_*^l(x),$$

которая является плотностью распределения, с точностью до нормировки, и имеет разрыв первого рода в точке $x_* = 1$, который порождается слагаемым с $l = 1$.

Теорема 5. Если положительное число λ таково, что $I_0(2\sqrt{\lambda}) \leq 1 + 2\lambda$, где I_0 — модифицированная функция Бесселя нулевого порядка, то функция $W(x)$ унимодальна и ее вершина расположена в точке $x_* = 1$.

Из ограничения на параметр λ в условии теоремы следует, что

$$\sum_{l=2}^{\infty} \frac{\lambda^l}{(l!)^2} \leq \lambda.$$

В частности, $\lambda < 4$. Введем в рассмотрение функции

$$W_N^{(m)}(x) = \sum_{l=1}^N \frac{\lambda^{l+m}}{(l+m)!} w_*^l(x), \quad m = 0, 1, 2, \dots$$

Так как плотность $w_*^2(x)$, локализованная на $[0, 2]$, одновершинна с вершиной в x_* , то все функции $W_2^{(m)}(x) = \lambda^{m+1}w(x)/(m+1)! + \lambda^{m+2}w_*^2(x)/(m+2)!$,

$m = 0, 1, 2, \dots$ одновершинны, и вершина у каждой из них расположена в $x_* = 1$. Каждая из этих функций обладает разрывом 1-го рода в этой точке.

Так как, согласно (П9), $P_{l,1}(x_*) = \int_0^1 P_{l,0}(y)dy$, и, согласно (П7), $P_{l,0}(x) = x^{l-1}/(l-1)!$ при $P_{1,0}(x) = 1$, то $P_{l,1}(1) = 1/l!$ и поэтому

$$W(x_* + 0) = \sum_{l=2}^{\infty} \frac{\lambda^l}{l!} w_*^l(x_*) = \sum_{l=2}^{\infty} \frac{\lambda^l}{l!} P_{l,1}(1) = \sum_{l=2}^{\infty} \frac{\lambda^l}{(l!)^2}.$$

При выполнении условия теоремы $\lambda \leq 4$, и поэтому имеет место $\lambda/2(m+2) \leq 1$, $m = 0, 1, 2, \dots$. Тогда $W_2^{(m)}(x_* + 0) < W_2^{(m)}(0) = \lambda^{m+1}/(m+1)!$ и, согласно утверждению Леммы, каждая из функций $(w * W_2^{(m)})(x)$, $m \in \mathbb{N}$ непрерывна и унимодальна с вершиной в точке $x_* = 1$. Следовательно, так как каждая из этих функций возрастает на интервале $(0, 1)$, то таким же свойством обладает каждая из функций $\lambda^m w(x)/m! + (w * W_2^{(m)})(x) = W_3^{(m-1)}(x)$, $m = 1, 2, 3, \dots$, в частности, при $m \geq 2$.

Положим, что при некотором фиксированном N все функции $W_N^{(m)}(x)$, $m = 0, 1, 2, \dots$ унимодальны и обладают единственной вершиной в точке $x_* = 1$ и имеют в этой точке разрыв 1-го рода. Построим индукционный шаг от значения N к значению $N + 1$. Согласно сделанному предположению, по условию теоремы, имеет место неравенство

$$W_N^{(m)}(x_* + 0) = \sum_{l=2}^N \frac{\lambda^{l+m} w_*^l(1)}{(l+m)!} = \sum_{l=2}^N \frac{\lambda^{l+m}}{(l+m)!l!} < \sum_{l=2}^N \frac{\lambda^{l+m}}{(l!)^2(m+1)!} < \frac{\lambda^{m+1}}{(m+1)!} = W_N^{(m)}(0),$$

так как при $l \geq 2$ имеет место неравенство $(l+m)! > l!(m+1)!$. На основании утверждения Леммы, заключаем, что каждая из функций $(w * W_N^{(m)})(x)$, $m = 0, 1, 2, \dots$, непрерывна и унимодальна с вершиной в точке $x_* = 1$. Так как каждая из них возрастает на интервале $(0, 1)$, то таким же свойством обладает каждая из функций $\theta(1-x)\lambda^m w(x)/m! + (w * W_N^{(m)})(x) = W_{N+1}^{(m-1)}(x)$, $m = 1, 2, 3, \dots$. Таким образом, согласно индукционному шагу, можно утверждать, что все функции $W_N^{(m)}(x)$ при любых $N = 2, 3, 4, \dots$ и $m = 0, 1, 2, \dots$ одновершинны с вершиной в точке $x_* = 1$. В частности, это имеет место при $m = 0$. Переходя к пределу $N \rightarrow \infty$, получаем, что предельная функция $W(x) = \lim_{N \rightarrow \infty} W_N^{(0)}(x)$ одновершинна с вершиной в точке $x_* = 1$, так как предел одновершинных функций является одновершинной функцией [10].

Список литературы

- [1] И.Б. Пешков. *Итоги науки и техники. Электротехнические материалы, электрические конденсаторы, провода* (Наука, М., 1981), т. 10.
- [2] Р.П. Брагинский, Б.В. Гнеденко, Г.М. Зайцева, С.А. Молчанов. ДАН СССР, **303** (2), 270 (1988).
- [3] Yu.P. Virchenko, A.D. Novoseltsev. J. Phys.: Conf. Series, **1902**, 012091 (2021). DOI: 10.1088/1742-6596/1902/1/012091
- [4] Ю.П. Вирченко, А.Д. Новосельцев. Belgorod State University Scientific Bulletin. Mathematics & Physics, **51** (3), 366 (2019).
- [5] Yu.P. Virchenko, A.D. Novoseltsev. Functional Materials, **28** (2), 345 (2021).
- [6] P. Barber, S. Balasubramanian, Y. Anguchamy, S. Gong, A. Wibowo, H. Gao, H.J. Ploehn, H.C. Loye. Materials, **2** (4), 1697 (2009).
- [7] G.A. Vorob'ev, S.G. Ekhanin, N.S. Nesmelov. Phys. Solid State, **47** (6), 1083 (2005). DOI: 10.1134/1.1946860
- [8] Г.А. Воробьев, Ю.П. Похолков, Ю.Д. Королев, В.И. Меркулов. *Физика диэлектриков (Физика сильных полей)* (Изд-во ТПУ, Томск, 2003)
- [9] Б.В. Гнеденко. *Курс теории вероятностей* (Книжный дом „Либроком“, М., 2011).
- [10] E. Lukacs. *Characteristic Functions* (Griffin, London, 1970)
- [11] И.А. Ибрагимов. Теория вероятностей и ее применение, **1** (4), 485 (1956).