

Динамика солитонов в световоде в модели Герджикова-Иванова© Д.В. Быкова^{1,2}, А.М. Камчатнов^{1,2}¹ Институт спектроскопии РАН,
Москва, Троицк, Россия² Высшая школа экономики,
Москва, Россия

e-mail: kamch@1san.troitsk.ru

Поступила в редакцию 17.08.2024 г.

В окончательной редакции 17.08.2024 г.

Принята к публикации 26.08.2024 г.

В рамках модели Герджикова-Иванова рассмотрена динамика солитона, движущегося в световоде по неоднородному и зависящему от времени фону. Выведены уравнения, описывающие движение солитона. Теория иллюстрируется примером движения солитона по простой волне.

Ключевые слова: солитон, световод, модель Герджикова-Иванова.

DOI: 10.61011/OS.2024.08.59028.7000-24

1. Введение

Распространение света в нелинейной среде часто уподобляется течению жидкости [1]. С формальной стороны это связано с тем, что нелинейное уравнение Шрёдингера (НУШ) в пренебрежении дисперсией в точности сводится к уравнениям мелкой воды в случае дефокусирующей нелинейности или к уравнениям „опрокинутой“ мелкой воды в случае фокусирующей нелинейности. Учёт дисперсии ведёт к так называемой дисперсионной гидродинамике, в рамках которой описываются различные эффекты в нелинейной оптике световодов, а также поляритонных и атомных конденсатов [2], включая динамику солитонов и дисперсионных ударных волн [3–5]. Развитие теории дисперсионных ударных волн привело в последнее время к развитию новых методов, позволяющих продвинуть далеко вперёд классическую проблему движения солитона по неоднородной и зависящей от времени крупномасштабной волне.

Трудность этой проблемы связана с невозможностью абсолютно точно отделить солитонное движение от эволюции фона, так как, по сути, и то, и другое являются единым волновым течением, описываемым одними и теми же волновыми переменными. Вследствие этого движение солитона вызывает в фоне противоток, который самым существенным образом влияет на динамику солитона, описываемого приближённо как частицеподобное возбуждение, имеющее некие координату и импульс.

Для решения этой проблемы были предложены различные приближённые методы теории возмущений [6–17], как правило весьма трудоёмкие и не всегда дающие достаточно простое описание солитонной динамики. Недавно нами было замечено [18], что теория может быть существенно упрощена, если предположить, что динамика узкого солитона описывается уравнениями, которые определённым образом согласованы с бездисперсионной эволюцией крупномасштабного фона. На

этом пути были легко воспроизведены старые и получены новые результаты для солитонов, описываемых уравнением Кортевега-де Фриза (КдФ) [18] и НУШ [19].

В настоящей работе мы разовьём аналогичную теорию для уравнения Герджикова-Иванова [20,21], которое запишем в стандартных безразмерных переменных:

$$i\psi_t + \psi_{xx} + \frac{1}{2}|\psi|^4\psi + i\psi^2\psi_x^* = 0. \quad (1)$$

Это уравнение часто используется для моделирования распространения ультракоротких световых импульсов в световодах [22,23], и в этом контексте ψ представляет собой огибающую светового поля. Уравнение записано в системе отсчёта, движущейся с групповой скоростью несущей волны, причём мы использовали обозначения x для координаты вдоль световода и t для времени, чтобы подчеркнуть аналогию с гидродинамическими уравнениями. Второй член в левой части (1), как обычно, описывает дисперсию групповой скорости, третий — нелинейность пятого порядка, а четвертый — запаздывание отклика среды. Обычно эти нелинейные члены учитываются как малые возмущения к НУШ, но их выделение в отдельное уравнение (1) позволяет понять качественно связанные с ними эффекты.

В следующем разделе мы рассмотрим основные соотношения теории уравнения Герджикова-Иванова, включая его солитонное решение. Затем мы выведем уравнение для динамики солитона и проиллюстрируем его примером движения солитона по простой волне.

2. Основные соотношения

Прежде всего преобразуем уравнение (1) к так называемой гидродинамической форме, в которой удобно

описывать динамику „фотонной жидкости“ световой волны. Для этого делаем подстановку

$$\psi = \sqrt{\rho} \exp \left(i \int^x u(x', t) dx' \right), \quad (2)$$

и отделяем в получающемся уравнении действительную и мнимую части. В результате получаем систему

$$\begin{aligned} \rho_t + \left[\rho \left(2u + \frac{1}{2}\rho \right) \right]_x &= 0, \\ u_t + 2uu_x - (\rho u)_x - \rho \rho_x + \left(\frac{\rho_x^2}{4\rho^2} - \frac{\rho_{xx}}{2\rho} \right)_x &= 0. \end{aligned} \quad (3)$$

Эти уравнения аналогичны уравнениям гидродинамики, где ρ играет роль плотности среды, а u — её скорости течения. Первое уравнение (3) представляет собой модифицированное уравнение непрерывности, а второе — уравнение Эйлера с „давлением“ $P = -\rho(u + \rho/2)$, зависящим от скорости течения, причём последний член, часто называемый „квантовым давлением“, описывает дисперсионные свойства среды. Для устойчивости среды относительно флуктуаций плотности давление должно быть положительным, откуда следует условие

$$u < -\rho/2 \quad (4)$$

применимости гидродинамического описания световой волны.

Если мы рассмотрим малые возмущения однородного состояния $\rho = \rho_0, u = u_0$, то линеаризация уравнений (3) относительно малых отклонений от этого состояния $\rho = \rho_0 + \rho', u = u_0 + u'$ ведёт к системе

$$\begin{aligned} \rho'_t + 2u_0\rho'_x + 2\rho_0u'_x + \rho_0\rho'_x &= 0, \\ u'_t + 2u_0u'_x - u_0\rho'_x - \rho_0u'_x - \rho_0\rho'_x - \frac{1}{2\rho_0}\rho'_{xxx} &= 0, \end{aligned} \quad (5)$$

из которой получаем закон дисперсии линейных волн $\rho', u' \propto \exp[i(kx - \omega t)]$:

$$\omega = k \left(2u_0 \pm \sqrt{-\rho_0(2u_0 + \rho_0) + k^2} \right). \quad (6)$$

Подкоренное выражение здесь положительно при выполнении условия (4).

Другим важным предельным случаем являются длинные волны, для которых $|\rho_x/\rho| \ll 1, |u_x/u| \ll 1$, так что во втором уравнении (3) можно пренебречь дисперсионным членом и прийти к бездисперсионным уравнениям

$$\begin{aligned} r h o_t + \left[\rho \left(2u + \frac{1}{2}\rho \right) \right]_x &= 0, \\ u_t + 2uu_x - (\rho u)_x - \rho \rho_x &= 0. \end{aligned} \quad (7)$$

В нашей теории они описывают эволюцию фона, по которому движется солитон.

Получим теперь солитонное решение в удобной для нас форме. Для этого будем искать решение уравнений (3) в виде бегущей волны $\rho = \rho(\xi), u = u(\xi), \xi = x - Vt$, где V — скорость её распространения. Тогда уравнения (3) становятся обыкновенными, легко интегрируются по одному разу, и первое уравнение даёт

$$u = \frac{A}{2\rho} + \frac{V}{2} - \frac{\rho}{4}, \quad (8)$$

где A — постоянная интегрирования. Второе уравнение после интегрирования и подстановки в него (8) может быть проинтегрировано ещё раз, и результат преобразован к виду

$$\begin{aligned} \rho_\xi^2 = -\frac{1}{4} [\rho^4 + 4V\rho^3 + 4(V + 3A + 4B) \\ \times \rho^2 + 16C\rho + 4A^2], \end{aligned} \quad (9)$$

где B и C — ещё две постоянных интегрирования.

Возникшие в решении три постоянных интегрирования могут быть выражены через скорость солитона V и значения ρ_0, u_0 фоновых переменных на бесконечности, то есть вдали от солитона. Для этого прежде всего заметим, что уравнение (9) имеет решения, когда ρ колеблется между нулями $\rho_1 \leq \rho_2 \leq \rho_3 \leq \rho_4$ многочлена в правой части в интервалах положительности этого многочлена, то есть в одном из интервалов $\rho_1 \leq \rho \leq \rho_2$ или $\rho_3 \leq \rho \leq \rho_4$. Как хорошо известно, солитон соответствует сепаратрисному решению, возникающему при $\rho_2 = \rho_3 = \rho_0$, так что в этом случае уравнение (9) можно переписать в виде

$$\rho_\xi^2 = \frac{1}{4}(\rho_0 - \rho)^2(\rho - \rho_1)(\rho_4 - \rho). \quad (10)$$

Предположим для определённости, что мы рассматриваем случай $\rho_1 \leq \rho \leq \rho_2 = \rho_0$, соответствующий тёмному солитону, и $\rho = \rho_{\min} = \rho_1$ при $\xi = 0$, так что элементарное интегрирование даёт решение

$$\rho = \rho_0 - \frac{(\rho_4 - \rho_0)(\rho_0 - \rho_1)}{(\rho_4 - \rho_1) \operatorname{ch}^2 \theta - (\rho_1 - \rho_0)}, \quad (11)$$

где

$$\begin{aligned} \theta &= \frac{1}{4} \sqrt{(\rho_4 - \rho_0)(\rho_0 - \rho_1)} \xi, \\ V &= -\frac{1}{4}(\rho_1 + \rho_4 + 2\rho_0). \end{aligned} \quad (12)$$

Чтобы выразить ρ_1 и ρ_4 через V, ρ_0, u_0 , замечаем, что из (8) следует соотношение $A = \rho_0(\rho_0/2 + 2u_0 - V)$, а из (9) — соотношение $\rho_1\rho_4\rho_0^2 = 4A^2$, так что

$$\rho_1\rho_4 = (2V - 4u_0 - \rho_0)^2. \quad (13)$$

Из второго уравнения (12) и уравнения (13) следуют значения ρ_1, ρ_4 :

$$\rho_1 = -2V - \rho_0 - 2\sqrt{2(\rho_0 + 2u_0)(V - u_0)},$$

$$\rho_4 = -2V - \rho_0 + 2\sqrt{2(\rho_0 + 2u_0)(V - u_0)}. \quad (14)$$

Учитывая (4), находим, что эти параметры действительны и положительны в согласии с определением ρ в (2), когда скорость солитона удовлетворяет условию

$$V < u_0, \quad (15)$$

т.е. она отрицательна и больше по абсолютной величине, чем скорость течения фона u_0 .

Из формул (11), (12) следует, что обратная полуширина солитона κ , определяемая предельным соотношением $\rho_0 - \rho \propto \exp(-\kappa|\xi|)$, равна

$$\kappa = \frac{1}{2}\sqrt{(\rho_4 - \rho_0)(\rho_0 - \rho_1)}. \quad (16)$$

Подстановка сюда выражений (14) даёт уравнение

$$(V + \rho_0)^2 - 2(\rho_0 + 2u_0)(V + \rho_0) + 2(\rho_0 + u_0) \times (\rho_0 + 2u_0) + \kappa^2 = 0,$$

из которого находим нужное нам выражение для скорости солитона через его обратную полуширину:

$$V = 2u_0 \pm \sqrt{-\rho_0(\rho_0 + 2u_0) - \kappa^2}. \quad (17)$$

Как заметил ещё Стокс [24] для случая солитона Кортвега-де Фриза, эта скорость выражается через посредство закона дисперсии линейных волн (6) соотношением

$$V = \frac{\omega(ik)}{ik}, \quad (18)$$

имеющим ясный физический смысл: как линейные волны $\propto e^{i(kx - \omega t)}$, так и малоамплитудные хвосты солитонов $\propto e^{-\kappa|x - Vt|}$ описываются одними и теми же линеаризованными уравнениями (5), так что их решения переходят одно в другое при замене $k \rightarrow ik$, причём фазовая скорость линейной волны переходит в скорость солитона (18).

Теперь мы можем перейти к выводу уравнений для динамики солитона.

Динамика солитона

Мы предполагаем, что солитон распространяется по неоднородной волне $\rho = \rho(x, t)$, $u = u(x, t)$, причём характерная длина, на которой эти волновые переменные существенно изменяются, много больше единицы. Поскольку ширина солитона порядка единицы, мы с хорошей точностью можем предполагать, что его мгновенная скорость даётся выражением (17), в котором ρ_0 и u_0 заменены на локальные значения $\rho(x, t)$, $u(x, t)$ в точке нахождения солитона в момент времени t . Поэтому, если мы узнаем зависимость обратной полуширины κ от ρ и u , то мы превратим (17) в уравнение, определяющее динамику движения солитона по крупномасштабной волне.

Для того чтобы найти зависимость $\kappa = \kappa(\rho, u)$, обратимся к соображениям, аналогичным аргументации Стокса [24] в его обосновании формулы (18), и найдём сначала зависимость волнового числа k несущей волны от ρ и u для высокочастотного пакета, распространяющегося по крупномасштабной волне. Для этого заметим, что поскольку длина волны $\sim k^{-1}$ предполагается меньше или порядка единицы, то и размер пакета можно считать много меньше характерного размера изменений фона, так что положение пакета можно с хорошей точностью описать введением координаты $x = x(t)$. Как известно из оптико-механической аналогии [25,26], в геометрооптическом приближении движение пакета подчиняется уравнениям Гамильтона

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\partial \omega}{\partial k}, \quad \frac{dk}{dt} = -\frac{\partial \omega}{\partial x}, \quad (19)$$

где $\omega = \omega(k, x, t)$ играет роль гамильтониана. В нашем случае ω зависит от x и t только через посредство волновых переменных $\rho(x, t)$, $u(x, t)$ согласно формуле (6). Мы предполагаем, что волновое число k также является функцией только от ρ и u , причём эволюция ρ и u , согласно бездисперсионным уравнениям (7), оставляет уравнения Гамильтона (19) в силе. Как было выяснено в работах [27–30], эти условия сохранения гамильтоновой структуры бездисперсионным течением ведут к уравнениям, определяющим функцию $k = k(\rho, u)$ хотя бы в пределе больших k . В случае уравнения Герджикова–Иванова вычисления, аналогичные проведённым в [27–30], дают эти уравнения в форме

$$\frac{\partial k^2}{\partial \rho} = 2(u + \rho),$$

$$\frac{\partial k^2}{\partial u} = 2\rho - 2\sqrt{k^2 - \rho(\rho + 2u)}. \quad (20)$$

Эти уравнения легко решаются, и мы получаем

$$k^2 = (q - u)^2 + \rho(\rho + 2u), \quad (21)$$

где q — постоянная интегрирования.

Теперь, следуя Стоксу, мы предполагаем, что решение уравнений (20) аналогично решению линеаризованных уравнений (5) может быть продолжено в область отрицательных k^2 , так что формула (21) превращается в соотношение

$$\kappa^2 = -(q - u)^2 - \rho(\rho + 2u) \quad (22)$$

для обратной полуширины солитона, определяющее зависимость $\kappa = \kappa(\rho, u)$. Подстановка этой формулы в (18) даёт уравнение (считаем $q - u > 0$)

$$\frac{dx}{dt} = V = \frac{\omega(ik)}{ik} = q + u(x, t),$$

определяющее траекторию солитона $x = x(t)$. Постоянная q задаётся начальной скоростью солитона в начальной точке его траектории.

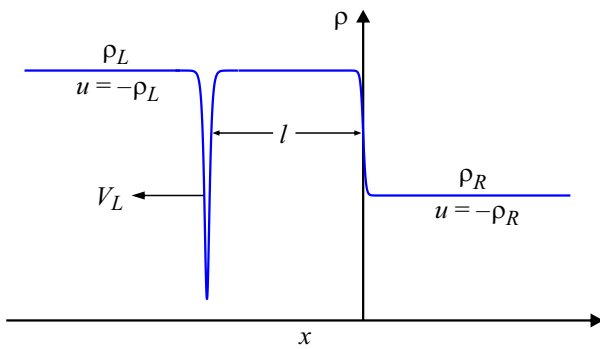


Рис. 1. Начальное распределение плотности ρ , соответствующее солитону с начальными координатой $-l$ и скоростью $V_L < 0$, а также разрыву плотности (28).

Стоит заметить, что уравнение Герджикова–Иванова полностью интегрируемое, и поэтому для него могут быть выведены модуляционные уравнения Уизема в диагональной римановой форме. Тогда уравнение (23) может быть получено из уравнений Уизема в солитонном пределе (см. такого рода теорию в [14–17] для уравнений КдФ и НУШ). Наш метод позволяет получить его более простым способом. Кроме того, уравнение (23) может быть положено в основу вывода уравнений Гамильтона для динамики солитона аналогично [19], так что оно превращается в интеграл этих уравнений. Если в правой части уравнения (1) имеется член $U(x)\psi$ с потенциалом $U(x)$, то уравнения Гамильтона могут быть преобразованы к уравнению Ньютона с учётом потенциала. Однако такая постановка задачи, по-видимому, не актуальна для динамики солитонов в световодах, и поэтому мы ограничимся случаем, когда внешний потенциал отсутствует.

Пример: движение солитона по простой волне

В качестве примера рассмотрим движение солитона по простой волне, образуемой начальным разрывом в распределениях плотности ρ и u . Бездисперсионную систему (7) можно преобразовать к диагональной форме

$$\frac{\partial r_+}{\partial t} + v_+ \frac{\partial r_+}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial r_-}{\partial t} + v_- \frac{\partial r_-}{\partial x} = 0 \quad (24)$$

для переменных

$$r_{\pm} = u \pm \sqrt{-\rho(\rho + 2u)}, \quad (25)$$

причём характеристические скорости равны

$$v_{\pm} = 2u \pm \sqrt{-\rho(\rho + 2u)}. \quad (26)$$

В простой волне один из римановых инвариантов r_{\pm} является постоянным. Как мы видим из (25), $r_+ = 0$, если u и ρ связаны соотношением

$$u = -\rho, \quad (27)$$

выполняющимся вдоль всей простой волны. В этом случае мы имеем начальный разрыв плотности ρ

$$\rho(x, 0) = \begin{cases} \rho_L, & x \leq 0, \\ \rho_R, & x > 0, \end{cases} \quad (28)$$

где $\rho_L > \rho_R$, а скорость течения $u(x, 0)$ имеет противоположный разрыв:

$$u(x, 0) = \begin{cases} -\rho_L, & x \leq 0, \\ -\rho_R, & x > 0, \end{cases} \quad (29)$$

так что повсюду $r_+ = 0$.

Пусть в начальный момент $t = 0$ солитон расположен слева от разрыва в точке $x = -l$ (рис. 1) и имеет начальную скорость $V_L < 0$. Через время t разрыв превратится в волну разрежения, в которой повсюду $r_+ = 0$, т.е. первое уравнение (24) удовлетворяется автоматически, а из второго уравнения следует автомодельное решение $v_- = -3\rho = x/t$, т.е. распределение плотности имеет вид

$$\rho(x, t) = \begin{cases} \rho_L, & x \leq -3\rho_L t, \\ -x/(3t), & -3\rho_L t < x < -3\rho_R t, \\ \rho_R, & x > -3\rho_R t. \end{cases} \quad (30)$$

Левый край этого распределения движется со скоростью $-3\rho_L$, так что солитон попадает в область волны разрежения в момент

$$t_1 = \frac{l}{|-3\rho_L - V_L|} = \frac{l}{3\rho_L + V_L} \quad (31)$$

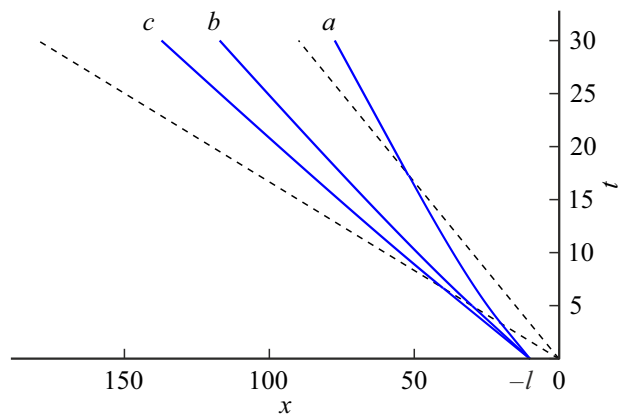


Рис. 2. Траектории солитонов с различными начальными скоростями при движении через волну разрежения, образуемую начальным разрывом с параметрами $\rho_L = 2, \rho_R = 1$. Начальная координата солитона равна $-l = -10$. Штриховые линии изображают движение краёв волны разрежения. Кривая a соответствует начальной скорости $V_L = -3$, удовлетворяющей условию (36), когда солитон проходит сквозь волну разрежения. Кривая b отвечает специальному случаю (50), когда скорость солитона асимптотически приближается к скорости переднего края $-3\rho_R$. В случае кривой c солитон в асимптотическом состоянии переносится волной разрежения со скоростью (39).

в точке

$$x_1 = -L + V_L t_1 = -\frac{3l\rho_L}{3\rho_L + V_L}. \quad (32)$$

Как легко найти из (17), всегда имеем $|V_L| < 3\rho_L$, т.е. такой момент $t_1 > 0$ всегда наступает. При $t > t_1$ солитон движется по волне разрежения (30) согласно уравнению (23), т.е.

$$\frac{dx}{dt} = q - \frac{x}{3t}, \quad (33)$$

где q находим из условия, что $(dx/dt)_{t=t_1} = V_L$, так что $q = V_L + \rho_L$. Уравнение (33) легко решается с начальным условием $x(t_1) = x_1$, так что мы получаем выражение для траектории солитона

$$x(t) = \frac{3}{2}(V_L + \rho_L)t - \frac{3}{2}l^{2/3}[(3\rho_L + V_L)t]^{1/3}. \quad (34)$$

Как мы видим, оно существенно отличается от закона движения солитона $x = -l + V_L t$ по однородному распределению плотности $\rho = \rho_L$ до момента перехода в область простой волны.

Солитон достигает противоположного края волны разрежения, движущегося со скоростью $-3\rho_R$, в момент

$$t_2 = \frac{l(3\rho_L + V_L)^{1/2}}{(V_L + \rho_L + 2\rho_R)^{3/2}}, \quad (35)$$

если его начальная скорость удовлетворяет условию

$$|V_L| < \rho_L + 2\rho_R. \quad (36)$$

После этого момента, испытав столкновение с волной разрежения, он движется по однородному фону $\rho = \rho_R$ со скоростью

$$V_R = V_L + \rho_L - \rho_R, \quad (37)$$

т.е. его скорость уменьшается по абсолютной величине. Очевидно, что в силу неравенства (36) скорость V_R заведомо отрицательна, как и должно быть для солитона, движущегося по однородному фону. Траектория солитона для этого случая иллюстрируется на рис. 2 (кривая a).

Если же

$$|V_L| > \rho_L + 2\rho_R, \quad (38)$$

то движение солитона стабилизируется внутри волны разрежения, и его скорость стремится при $t \rightarrow \infty$ к постоянному значению

$$V_{\text{asympt}} = \frac{3}{2}(V_L + \rho_L). \quad (39)$$

В этом асимптотическом состоянии солитон всё время находится в точке профиля волны разрежения с плотностью

$$\rho_{\text{asympt}} = -\frac{1}{2}(V_L + \rho_L), \quad (40)$$

т.е. он переносится течением волны разрежения, покоясь относительно неё (рис. 2, кривая c).

В особом случае $V_L = -\rho_L - 2\rho_R$ траектория солитона даётся формулой

$$x(t) = -3\rho_R t - 3(l/2)^{2/3}t^{1/3}, \quad (41)$$

т.е. скорость солитона стремится при $t \rightarrow \infty$ к скорости заднего края $-3\rho_R$, но расстояние между солитоном и задним краем растёт со временем как $t^{1/3}$ (кривая b на рис. 2).

Аналогичная динамика „пленения“ солитона волной разрежения в случае НУШ обсуждалась разными методами в работах [15,31].

Заключение

Использованный в настоящей работе метод опирается на элементарные соображения Стокса, связывающие свойства солитонов со свойствами высокочастотных пакетов, распространяющихся по крупномасштабным волновым профилям. В случае уравнения Герджикова–Иванова возникающие в нашей теории уравнения (20) допускают точное решение (21), что приводит к чрезвычайно простому закону движения солитонов (23). Однако следует иметь в виду, что, вообще говоря, уравнения типа (20), определяющие зависящую от двух аргументов функцию $k = k(\rho, u)$, не всегда являются совместными. В настоящее время можно сказать, что они совместны в случае полностью интегрируемых уравнений, но примеры их совместности для неинтегрируемых уравнений нам не известны. Тем не менее можно предполагать, что предлагаемый метод сохраняет свою применимость и для неинтегрируемых уравнений, когда уравнения типа (20) допускают приближённое решение, справедливое в пределе больших $k \gg 1$. Предполагая, что это приближённое решение может быть продолжено в область отрицательных $k^2 = -\kappa^2 < 0$, мы получаем соотношение, связывающее обратную полуширину солитона с локальными значениями волновых переменных фона, и приходим в результате к приближённому уравнению для движения солитона. Можно надеяться, что такое обобщение теории позволит решить важные задачи динамики солитонов, в том числе в нелинейной оптике.

Благодарности

Работа была поддержана исследовательским проектом FFUU-2021-0003 Института спектроскопии РАН (разд. 2–3) и грантом „Базис“ (разд. 4).

Конфликт интересов

Авторы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

Список литературы

- [1] I. Carusotto, C. Ciuti. *Rev. Mod. Phys.*, **85**, 299 (2013). DOI: 10.103/RevModPhphys.85.209.
- [2] Ю.С. Кившарь, Г.П. Агравал. *Оптические солитоны. От световодов к фотонным кристаллам*, (Физматлит, М., 2005).
- [3] G.A. El, M.A. Hoefel. *Physica D*, **333**, 11 (2016).
- [4] G. Xu, M. Conforti, A. Kudlinski, A. Mussot, S. Trillo. *Phys. Rev. Lett.*, **118**, 254101 (2017). DOI: 10.1103/PhysRevLett.118.254101
- [5] А.М. Камчатнов. *УФН*, **191**, 52 (2021).
- [6] В.И. Карпман, Е.М. Маслов. *ЖЭТФ*, **73**, 537 (1977).
- [7] В.И. Карпман, Е.М. Маслов. *ЖЭТФ*, **75**, 504 (1978).
- [8] В.П. Маслов, В.А. Цупин. *ДАН СССР*, **246**, 298-300 (1979).
- [9] C.J. Knickerbocker, A.C. Newell. *J. Fluid Mech.*, **98** 803 (1980).
- [10] А. Ньюэлл. *Солитоны в математике и физике*, (Мир, М., 1989).
- [11] R. Grimshaw, H. Mitsudera. *Stud. Appl. Math.*, **90**, 75 (1993).
- [12] Th. Busch, J.R. Anglin. *Phys. Rev. Lett.*, **84**, 2298 (2000).
- [13] L. Ostrovsky. *Asymptotic Perturbation Theory of Waves* (Imperial College Press, London, 2015).
- [14] M.D. Maiden, D.V. Anderson, N.A. Franco, G.A. El, M.A. Hoefel. *Phys. Rev. Lett.*, **120**, 144101 (2018). DOI: 10.1103/PhysRevLett.120.144101
- [15] P. Sprenger, M.A. Hoefel, G.A. El. *Phys. Rev. E*, **97**, 032218 (2018). DOI: 10.1103/PhysRevE.97.032218
- [16] K. van der Sande, G.A. El, M.A. Hoefel. *J. Fluid Mech.*, **928**, A21 (2021). DOI: 10.1017/jfm.2021.803
- [17] M.J. Ablowitz, J.T. Cole, G.A. El, M.A. Hoefel, X.D. Luo. *Stud. Appl. Math.*, **151**, 795 (2023).
- [18] А.М. Камчатнов, D.V. Shaykin. *Phys. Rev. E*, **108**, 054205 (2023). DOI: 10.1103/PhysRevE.108.054205.
- [19] А.М. Камчатнов. *ТМФ*, **219**, 44 (2024). DOI: 10.4213/tmf10623
- [20] V.S. Gerdjikov, M.I. Ivanov. *Bulgarian J. Phys.*, **10**, 13 (1983).
- [21] V.S. Gerdjikov, M.I. Ivanov. *Bulgarian J. Phys.*, **10**, 130 (1983).
- [22] H.I. Abdel-Gawad. *Optical Quantum Electr.*, **55**, 298 (2023).
- [23] H. Gao, D.-S. Wang. *Phys. Rev. E* **108**, 024222 (2023).
- [24] G.G. Stokes. *Mathematical and Physical Papers*, Vol. V (Cambridge University Press, Cambridge, 1905), p. 163.
- [25] Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. *Теория поля*, (М., Физматлит, 2001).
- [26] Ю.А. Кравцов, Ю.И. Орлов. *Геометрическая оптика неоднородных сред* (Наука, М., 1980).
- [27] А.М. Камчатнов. *ЖЭТФ*, **164**, 847 (2023). DOI: 10.32857/S0044451023110159
- [28] D.V. Shaykin, A.M. Kamchatnov. *Phys. Fluids*, **35**, 062108 (2023). DOI: 10.1063/5.0152437
- [29] А.М. Камчатнов. *Chaos*, **33**, 093105 (2023). DOI: 10.1063/5.0159426
- [30] А.М. Камчатнов, D.V. Shaykin. *Physica D*, **460**, 134085 (2024). DOI: 10.1016/j.physd.2024.134085
- [31] S.K. Ivanov, A.M. Kamchatnov. *Chaos*, **32**, 113142 (2022). DOI: 10.1063/5.0123514