

# Роль сверхтонкого и анизотропного обменного взаимодействий в экситонной люминесценции квантовых точек

© Д.С. Смирнов, Е.Л. Ивченко

ФТИ им. А. Ф. Иоффе РАН,  
Санкт-Петербург, Россия  
smirnov@mail.ioffe.ru

Поступила в редакцию 25.05.2024 г.

В окончательной редакции 25.05.2024 г.

Принята к публикации 01.08.2024 г.

Теоретически исследованы оптическая ориентация и выстраивание экситонов в полупроводниковых непрямозонных квантовых точках. Проанализирован особый режим, в котором энергия сверхтонкого взаимодействия электрона с ядрами решетки мала по сравнению с обменным расщеплением между светлым и темным экситонными уровнями, но сопоставима с анизотропным обменным расщеплением радиационного дублета. Рассчитаны зависимости степеней циркулярной и линейной поляризации от внешнего магнитного поля при резонансном возбуждении экситонов поляризованным светом.

**Ключевые слова:** квантовые точки, поляризованная люминесценция, оптическая спектроскопия экситонов, сверхтонкое взаимодействие, нанофотоника.

DOI: 10.61011/OS.2024.08.59033.6714-24

## 1. Введение

На поляризацию экситонной люминесценции, возбуждаемой в полупроводниковых квантовых точках поляризованным оптическим излучением, влияют несколько параметров: обменное расщепление  $\delta_0$  между радиационным и нерадиационным дублетами, анизотропное обменное расщепление каждого из этих дублетов, соответственно  $\delta_b$  и  $\delta_d$  [1], радиационное и нерадиационное времена жизни,  $\tau_r$  и  $\tau_{nr}$ , и энергия сверхтонкого взаимодействия электрона с ядрами решетки,  $\varepsilon_N$ . В квантовых точках, выращенных на основе прямозонных полупроводников, энергия  $\varepsilon_N$  мала по сравнению с  $\delta_0$  и  $\hbar/\tau_r$ , и ядерные спины не оказывают влияния на фотолюминесценцию светлого экситона в магнитных полях, при которых зеемановское расщепление  $\varepsilon_B$  экситонных подуровней мало по сравнению с  $\delta_0$ . В работе [2] мы исследовали поляризованную фотолюминесценцию в непрямозонных квантовых точках в особом режиме, когда обменное расщепление  $\delta_0$ , энергия сверхтонкого взаимодействия  $\varepsilon_N$  и радиационное уширение  $\hbar/\tau_r$  сопоставимы по порядку величины, и поэтому создаваемое ядерными спинами поле Оверхаузера играет важную роль. В дальнейшем этот режим будет обозначаться римской цифрой I. Существует еще один особый режим экситонной люминесценции (режим II), в котором обменное расщепление  $\delta_0 \gg \varepsilon_N, \varepsilon_B$ , но соотношения между величинами  $\hbar/\tau_r$ ,  $\varepsilon_N$ ,  $\delta_b$  и  $\varepsilon_B$  произвольны. Согласно [3,4], в массиве квантовых точек (In,Al)As/AlAs разброс по их линейным размерам обеспечивает сосуществование режимов I и II для разных точек в одном и том же образце. В данной работе рассматривается режим

II экситонной люминесценции, ранее теоретически не исследованный.

Актуальность данного направления исследований связана с бурным развитием квантовых технологий, основанных на явлениях запутанности. Квантовые точки позволяют генерировать и изучать запутанные пары фотонов при каскадной рекомбинации биэкситона [5–8], в частности, экспериментально проверять неравенства Белла [9]. Степень запутанности двух фотонов определяется тонкой структурой экситона [10] и может лимитироваться именно сверхтонким взаимодействием в случае, когда  $\delta_b < \varepsilon_N$  [11–13]. Однако, как указано выше, в обычных квантовых точках, например, InGaAs/GaAs, выполняется неравенство  $\hbar/\tau_r \gg \varepsilon_N$ , и в них влияние ядер слабо. Мы покажем, что в режиме II при  $\varepsilon_B \ll \delta_0$ , когда смешиванием светлых и темных экситонов можно пренебречь, поляризация люминесценции может, тем не менее, контролироваться сверхтонким взаимодействием. Во второй части работы будет проанализирован случай более сильных магнитных полей, при которых зеемановское расщепление  $\varepsilon_B$  превышает  $\delta_b, \varepsilon_N, \hbar/\tau_r$ , сопоставимо с  $\delta_0$  и обеспечивает пересечение подуровней светлых и темных экситонов.

## 2. Экситонный гамильтониан

Мы рассматриваем радиационный дублет экситона, локализованного в квантовой точке AlAs/AlGaAs и образованного из электрона в долине X и дырки в окрестности центра Г зоны Бриллюэна. Наличие границы квантовой точки обеспечивает подмешивание к волновой функции X-электрона блоховских состояний вблизи Г-точки, вследствие чего наряду с фонной возникает

и бесфонная люминесценция экситона. При большом обменном расщеплении  $\delta_0$  и в пренебрежении спиновой релаксацией экситона темные экситонные состояния не проявляются. При дальнейшем рассмотрении мы фиксируем лабораторную систему координат  $x_0, y_0, z$  с осью  $z$  вдоль оси роста структуры. Кроме того, для каждой квантовой точки в соответствии с ее анизотропией вводятся латеральные координаты  $x, y$ .

Два подуровня экситона  $|+1\rangle$  и  $|-1\rangle$ , оптически активные в поляризациях  $\sigma^+$  и  $\sigma^-$ , могут быть удобно описаны в формализме псевдоспина [14]. Гамильтониан, описывающий тонкую структуру экситонного уровня, имеет общий вид

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2}\hbar\Omega \cdot \boldsymbol{\sigma}. \quad (1)$$

Здесь  $\boldsymbol{\sigma}$  — вектор матриц Паули в этом базисе,  $\Omega$  — эффективная ларморовская частота прецессии псевдоспина с тремя компонентами  $\Omega_i, i = 1, 2, 3$ . Компоненты  $\Omega_1$  и  $\Omega_2$  обуславливаются анизотропией локализуемого потенциала с учетом дальнедействующего обменного взаимодействия [5–20]. Очевидно, расщепление  $\delta_b$ , определенное в вводимом разделе, равно  $\hbar\sqrt{\Omega_1^2 + \Omega_2^2}$ . Третья компонента есть сумма

$$\Omega_3 = \Omega_N + \Omega_B, \quad (2)$$

в которой частота  $\Omega_N$  связана с действием флуктуации ядерных спинов кристаллической решетки, а частота  $\Omega_B$  равна  $g_{\parallel}\mu_B B_z/\hbar$ , где  $g_{\parallel}$  — продольный  $g$ -фактор экситона,  $\mu_B$  — магнетон Бора,  $B_z$  —  $z$ -компонента магнитного поля  $\mathbf{B}$ . Латеральные компоненты магнитного поля  $\mathbf{B}$  и поля Оверхаузера в линейном приближении в гамильтониан (1) не входят. В этом и следующем разделах рассматривается случай достаточно слабых магнитных полей, при которых  $\hbar\Omega_B \ll \delta_0$ .

Сверхтонкое взаимодействие спинов электрона  $\mathbf{S}$  и дырки  $\mathbf{J}$  с ядрами является короткодействующим и может быть записано в виде

$$\mathcal{H}_{hf} = v_0 \sum_n [\hat{S}\hat{A}_e \mathbf{I}_n \delta(\mathbf{r}_e - \mathbf{R}_n) + \hat{J}\hat{A}_h \mathbf{I}_n \delta(\mathbf{r}_h - \mathbf{R}_n)], \quad (3)$$

где индекс  $n$  нумерует ядерные спины  $\mathbf{I}_n$ , расположенные в узлах кристаллической решетки  $\mathbf{R}_n$ ,  $v_0$  — объем элементарной ячейки,  $\mathbf{r}_{e,h}$  — радиус-векторы электрона и дырки в методе плавных огибающих,  $\hat{A}_{e,h}$  — тензоры сверхтонкого взаимодействия, имеющие размерность энергии и для простоты предполагаемые одинаковыми для всех ядер. В силу симметрии к инверсии времени можно считать, что интересующие нас состояния электрона и дырки в квантовой точке описываются вещественными огибающими волновых функций  $\Phi_e(\mathbf{r}_e)$ ,  $\Phi_h(\mathbf{r}_h)$ . Предполагается, что энергия одночастичного размерного квантования превышает экситонный ридберг. Тогда продольное ядерное поле, действующее на экситон, дается выражением

$$\hbar\Omega_N = v_0 \sum_n [A_h \Phi_h^2(\mathbf{R}_n) - A_e \Phi_e^2(\mathbf{R}_n)] I_{n,z}, \quad (4)$$

где  $A_e = A_{e;zz}$ ,  $A_h = 3A_{h;zz}$  и недиагональные компоненты тензоров  $A_e$  и  $A_h$  полагаются нулевыми. Здесь учтено, что экситонное состояние  $|\pm 1\rangle$  образовано из дырки со спином  $\pm 3/2$  и электрона со спином  $\mp 1/2$ .

Мы считаем, что ядерная спиновая динамика происходит на временах гораздо более длинных, чем время жизни экситона, и не учитываем эффекты динамической поляризации ядер, так что ядерные спины  $\mathbf{I}_n$  ориентированы случайным образом. В результате  $\Omega_N$  также является случайной величиной, которая может быть описана гауссовой функцией распределения

$$\mathcal{F}(\Omega_N) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} T_2^* e^{-2(\Omega_N T_2^*)^2}, \quad (5)$$

где обратное время дефазировки [21]

$$\frac{1}{T_2^*} = \frac{v_0}{\hbar} \sqrt{\sum_n \frac{4}{3} I_n(I_n + 1) [A_h \Phi_h^2(\mathbf{R}_n) - A_e \Phi_e^2(\mathbf{R}_n)]^2} \quad (6)$$

определяет дисперсию случайного поля:  $\langle \Omega_N^2 \rangle = 1/(2T_2^*)^2$ .

### 3. Поляризованная люминесценция

Отметим, что как обратное радиационное время жизни экситона  $\tau_r^{-1}$ , так и расщепление радиационного дублета  $\delta_b = \hbar\Omega_{\perp} = \hbar\sqrt{\Omega_x^2 + \Omega_y^2}$ , обусловленное дальнедействующим обменным взаимодействием, пропорциональны квадрату матричного элемента оптического возбуждения экситона, в частности, квадрату перекрытия волновых функций электрона и дырки в реальном и импульсном пространствах [22]. Поэтому в произведении  $\Omega_{\perp} \tau_r \equiv w_{QD}$  интеграл перекрытия исключается. В прямоzonной квантовой точке в зависимости от ее анизотропной формы это произведение может принимать произвольные значения от очень больших,  $w_{QD} \gg 1$ , до очень малых,  $w_{QD} \ll 1$ . Поэтому и для непрямоzonных квантовых точек возможность такого разброса в значениях  $w_{QD}$  сохраняется. Здесь мы ограничимся анализом наиболее интересного случая  $w_{QD} \gg 1$ , и будем пренебрегать нерадиационной рекомбинацией и спиновой релаксацией, не связанной со сверхтонким взаимодействием [4].

Введем трехкомпонентный вектор  $\mathbf{P}^{(0)}$  из параметров Стокса  $P_1^{(0)}, P_2^{(0)}, P_3^{(0)}$  [23] для излучения, падающего по нормали  $z$  на поверхность образца, и такой же вектор  $\mathbf{P}$  для света, излучаемого экситонами вперед. Вместо индексов  $l, l', c$  [2] мы используем здесь индексы 1, 2, 3. Для излучения в геометрии назад нужно поменять знак у компоненты  $P_3$ , характеризующей круговую поляризацию света. При  $w_{QD} \gg 1$  наборы параметров Стокса связаны между собой уравнением

$$P_i = \sum_{j=1,2,3} \Lambda_{ij} P_j^{(0)}, \quad (7)$$

где матрица связи [2]

$$\Lambda_{ij} = \frac{\Omega_i \Omega_j}{\Omega^2} \quad (8)$$

и  $\Omega^2 = \Omega_1^2 + \Omega_2^2 + \Omega_3^2$ . Так как полная интенсивность фотолюминесценции не зависит от поляризации возбуждающего света, то это выражение можно усреднить по распределению (5) ядерного поля  $\Omega_N$ . Для каждой отдельной квантовой точки можно выбрать латеральные оси  $x, y$ , в которых  $\Omega_2 = 0$  и  $\Omega_\perp = \Omega_1 > 0$ . Тогда отличные от нуля компоненты матрицы связи параметров Стокса принимают вид

$$\begin{aligned} \langle \Lambda_{11} \rangle = 1 - \langle \Lambda_{33} \rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\Omega_1^2 F(\Omega_N) d\Omega_N}{\Omega_1^2 + (\Omega_B + \Omega_N)^2} \\ &= \pi \Omega_1 T_2^* V(\Omega_B T_2^*; 1/2, \Omega_1 T_2^*), \end{aligned} \quad (9a)$$

$$\langle \Lambda_{13} \rangle = \langle \Lambda_{31} \rangle = \frac{\Omega_B}{\Omega_1} \langle \Lambda_{33} \rangle, \quad (9b)$$

где распределение (или профиль) Фойгта определено согласно

$$V(u; \sigma, \gamma) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-v^2/(2\sigma^2)}}{\sigma \sqrt{2\pi}} \frac{1}{\pi} \frac{\gamma}{(u-v)^2 + \gamma^2} dv.$$

Таким образом, поляризационные свойства фотолюминесценции отдельной квантовой точки описываются двумя безразмерными параметрами  $\Omega_1 T_2^*$  и  $\Omega_B T_2^*$ .

Магнитопольные зависимости трех ненулевых компонент матрицы  $\langle \Lambda \rangle$  представлены на рисунке для случаев (a) сильного,  $\Omega_1 T_2^* \gg 1$ , и (b) слабого,  $\Omega_1 T_2^* \ll 1$ , анизотропного расщепления. В случае (a) сверхтонкое взаимодействие играет незначительную роль и магнитопольные зависимости слабо отличаются от предельных зависимостей при  $\Omega_N \rightarrow 0$  [22]:

$$\langle \Lambda_{11}(\Omega_N \rightarrow 0) \rangle = \frac{\Omega_1^2}{\Omega_1^2 + \Omega_B^2},$$

а компоненты  $\langle \Lambda_{33}(\Omega_N \rightarrow 0) \rangle$  и  $\langle \Lambda_{13}(\Omega_N \rightarrow 0) \rangle$  выражаются через  $\langle \Lambda_{11}(\Omega_N \rightarrow 0) \rangle$  при помощи соотношений (9b). В случае (b) главную роль играет сверхтонкое взаимодействие и уравнение (9a) упрощается до

$$\langle \Lambda_{11}(\Omega_1 \rightarrow 0) \rangle = \pi \Omega_1 F(\Omega_B).$$

Из сравнения с рис. 1, a видно, что поле Оверхаузера подавляет оптическое выстраивание и усиливает оптическую ориентацию.

Пусть оси  $x, y$  развернуты против часовой стрелки на угол  $\vartheta$  относительно лабораторной системы осей  $x_0, y_0$ . Тогда матрица связи  $\langle \Lambda_{i_0 j_0} \rangle$  в координатах  $x_0, y_0$  связана

с компонентами матрицы  $\langle \Lambda_{ij} \rangle$  соотношениями

$$\begin{aligned} \|\langle \Lambda_{i_0 j_0} \rangle\| = \\ \begin{bmatrix} \langle \Lambda_{11} \rangle \cos^2 2\varphi & \langle \Lambda_{11} \rangle \sin 2\varphi \cos 2\varphi & \langle \Lambda_{13} \rangle \cos 2\varphi \\ \langle \Lambda_{11} \rangle \sin 2\varphi \cos 2\varphi & \langle \Lambda_{11} \rangle \sin^2 2\varphi & \langle \Lambda_{13} \rangle \sin 2\varphi \\ \langle \Lambda_{13} \rangle \cos 2\varphi & \langle \Lambda_{13} \rangle \sin 2\varphi & \langle \Lambda_{33} \rangle \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (10)$$

Если в массиве квантовых точек оси латеральной анизотропии у них у всех совпадают, то применимы выражения (9a), (9b), которые нужно усреднить по распределению расщепления  $\Omega_1$ . Если оси латеральной анизотропии случайно разбросаны по всей окружности, то после усреднения по углу  $\varphi$  отличными от нуля останутся только диагональные компоненты матрицы связи

$$\langle\langle \Lambda_{11} \rangle\rangle = \langle\langle \Lambda_{22} \rangle\rangle = \frac{1}{2} \langle \Lambda_{11} \rangle, \quad \langle\langle \Lambda_{33} \rangle\rangle = \langle \Lambda_{33} \rangle.$$

#### 4. Антипересечение экситонных подуровней с ростом магнитного поля

Перейдем теперь к более сильному магнитному полю, при котором сравниваются энергии одного из темных и одного из светлых экситонов, например, с проекцией углового момента  $+1$  [1]. В этом случае поле Оверхаузера, оказывая малое возмущение, понижающее симметрию системы, приводит, тем не менее, к сильному резонансному смешиванию сблизившихся уровней, т.е. к их антипересечению, и существенно влияет на интенсивность и поляризацию люминесценции даже для прямозонных квантовых точек [24–28]. Явление антипересечения за счет поля  $B_N$  может наблюдаться в магнитном поле  $B_e^{(cr)} = \delta_0 / (2\mu_B |g_{e,\parallel}|)$  или  $B_h^{(cr)} = \delta_0 / (2\mu_B |g_{h,\parallel}|)$  [1]. Рассмотрим одиночную квантовую точку в магнитном поле  $B_e^{(cr)}$  и покажем, как за счет ядерного поля при резонансном неполяризованном возбуждении излучение экситона из такой точки становится частично циркулярно поляризованным и меняет интенсивность по сравнению с той, которая имеется в нерезонансном поле  $B \neq B_e^{(cr)}$ .

При  $B = B_e^{(cr)}$  подуровни с проекциями углового момента  $+2$  и  $+1$  можно рассматривать как двухуровневую систему (мы учитываем, что  $g_{e,\parallel} > 0$ ) с гамильтонианом

$$\mathcal{H} = \hbar \Omega_N^e \mathbf{S}_e,$$

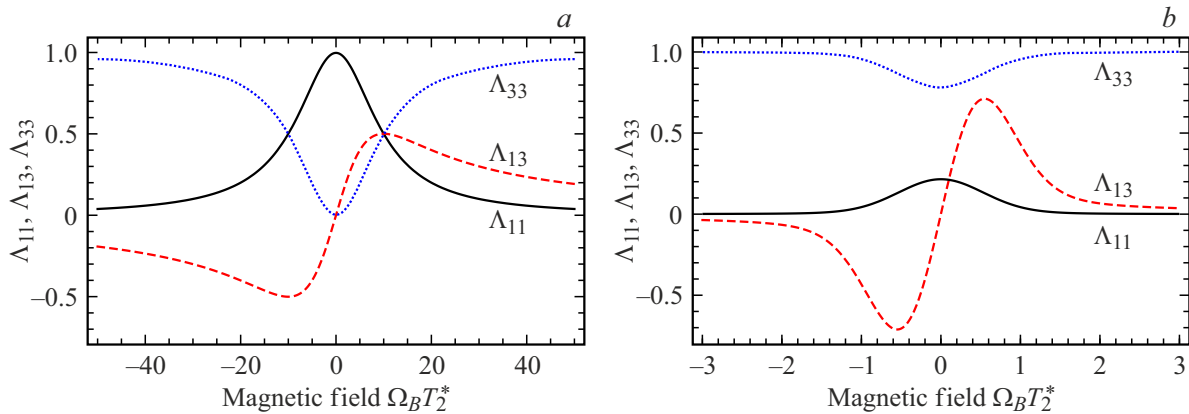
где

$$\Omega_N^e = \frac{v_0}{\hbar} A_e \sum_n \Phi_e^2(\mathbf{R}_n) \mathbf{I}_n,$$

и мы предполагаем, что  $A_{e,xx} = A_{e,yy} = A_e$ .

Введем угол  $\vartheta$ , определив его согласно

$$\cos \vartheta = \frac{\Omega_{N,z}^e}{|\Omega_N^e|}.$$



Коэффициенты линейной связи между параметрами Стокса возбуждающего света и люминесценции  $\Lambda_{11}$  (черная сплошная кривая),  $\Lambda_{13}$  (красная штриховая),  $\Lambda_{33}$  (синяя пунктирная), рассчитанные по формулам (9) для  $\Omega_1 T_2^* = 10$  (a) и 0.1 (b).

При резонансном возбуждении неполяризованным светом интенсивность  $I_{-1}$  излучения экситона  $|-1\rangle$  пропорциональна комбинации времен  $\tau_{nr}/[\tau_r(\tau_r + \tau_{nr})]$  и не меняется в окрестности точки  $B_e^{(cr)}$ , тогда как интенсивность излучения экситона с уровнем, испытавших антипересечение, зависит от  $\vartheta$ . Опуская выкладки, приведем окончательный результат для интенсивности экситонного излучения  $I$  и степени циркулярной поляризации  $P_c$  при резонансном неполяризованном возбуждении

$$I \propto \frac{\tau_{nr}}{\tau_r(\tau_r + \tau_{nr})} \frac{a + b \cos^2 \vartheta}{c - d \cos^2 \vartheta}, \quad (11)$$

$$P_c = \frac{\tau_r(2\tau_r + \tau_{nr})}{a + b \cos^2 \vartheta} \sin^2 \vartheta. \quad (12)$$

Здесь введены коэффициенты

$$a = (2\tau_r + \tau_{nr})(3\tau_r + 2\tau_{nr}),$$

$$b = 2\tau_r^2 + \tau_r\tau_{nr} - 2\tau_{nr}^2,$$

$$c = (2\tau_r + \tau_{nr})^2, \quad d = \tau_{nr}^2,$$

которые удовлетворяют соотношению  $a + b = 2(c - d) = 8\tau_r(\tau_r + \tau_{nr})$ .

По аналогии с (6) введем время релаксации  $T_{2,e}^*$ :

$$\frac{1}{T_{2,e}^*} = \frac{v_0}{\hbar} \sqrt{\sum_n \frac{4}{3} I_n(I_n + 1) A_e^2 \Phi_e^4(\mathbf{R}_n)}. \quad (13)$$

В реальных структурах  $\tau_{nr} \gg \tau_r$  [29], поэтому безразмерный параметр

$$\xi = \frac{\tau_r}{\tau_{nr}} \left( \delta_0 \frac{T_{2,e}^*}{\hbar} \right)^2$$

может быть как больше, так и меньше единицы. Формулы (11), (12) применимы при  $\xi \gg 1$  [30], в то время как при  $\xi \ll 1$  реализуется динамическая электронная спиновая поляризация [4]. Заметим, что в этих работах приведены, в частности, аналитические выражения для усредненных интенсивности и циркулярной поляризации в обоих предельных случаях.

## 5. Заключение

В эпитаксиальных полупроводниковых квантовых точках, кроме обменного расщепления „светлый-темный“ экситон  $\delta_0$ , имеется меньшее по величине обменное расщепление уровня светлого экситона  $\delta_b$ , обусловленное локальной латеральной анизотропией структуры. В непрямых квантовых точках подавление дальнедействующего обменного взаимодействия электрона и дырки способствует увеличению роли сверхтонкого взаимодействия с ядрами кристаллической решетки в тонкой структуре экситона. В данной работе мы исследовали особый случай экситонной тонкой структуры, при котором энергия сверхтонкого взаимодействия  $\varepsilon_N$  мала по сравнению с  $\delta_0$ , но соотношение между  $\varepsilon_N$  и  $\delta_b$  произвольно. Показано, что в этом особом режиме ядерные спиновые флуктуации вдоль оси роста структуры с квантовыми точками приводят к подавлению эффекта оптического выстраивания и усилению оптической ориентации. Зависимости этих эффектов от продольного магнитного поля описываются в общем случае профилем Фойгта. Проанализировано также влияние поля Оверхаузера на интенсивность и поляризацию излучения в области магнитоиндуцированного антипересечения подуровней светлого и темного экситонов.

## Благодарности

Мы признательны А.В. Родиной за полезные обсуждения.

## Финансирование работы

Финансовая поддержка работы оказана Российским научным фондом в рамках проекта № 23-12-00142. Д.С.С. благодарен фонду развития теоретической физики и математики „БАЗИС“.

## Конфликт интересов

Авторы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

## Список литературы

- [1] Е.Л. Ивченко. ФТТ, **60**, 1471 (2018). DOI: 10.21883/FTT.2018.08.46237.04Gr
- [2] D.V. Smirnov, E.L. Ivchenko. Phys. Rev. B, **108**, 195432 (2023). DOI: 10.1103/PhysRevB.108.195432
- [3] J. Rautert, T.S. Shamirzaev, S.V. Nekrasov, D.R. Yakovlev, P. Klenovský, Yu.G. Kusrayev, M. Bayer. Phys. Rev. B, **99**, 195411 (2019). DOI: 10.1103/PhysRevB.99.195411
- [4] D.S. Smirnov, T.S. Shamirzaev, D.R. Yakovlev, M. Bayer. Phys. Rev. Lett., **125**, 156801 (2020). DOI: 10.1103/PhysRevLett.125.156801
- [5] N. Akopian, N.H. Lindner, E. Poem, Y. Berlatzky, J. Avron, D. Gershoni, B.D. Gerardot, P.M. Petroff. Phys. Rev. Lett., **96**, 130501 (2006). DOI: 10.1103/PhysRevLett.96.130501
- [6] A. Dousse, J. Suffczynski, A. Beveratos, O. Krebs, A. Lemaître, I. Sagnes, J. Bloch, P. Voisin, P. Senellart. Nature, **466**, 217 (2010). DOI: 10.1038/nature09148
- [7] D. Huber, M. Reindl, S.F. Covre da Silva, C. Schimpf, J. Martin-Sanchez, H. Huang, G. Piredda, J. Edlinger, A. Rastelli, R. Trotta. Phys. Rev. Lett., **121**, 033902 (2018). DOI: 10.1103/PhysRevLett.121.033902
- [8] F.T. Østfeldt, E.M. González-Ruiz, N. Hauff, Y. Wang, A.D. Wieck, A. Ludwig, R. Schott, L. Midolo, A.S. Sørensen, R. Uppu, P. Lodahl. PRX Quantum, **3**, 020363 (2022). DOI: 10.1103/PRXQuantum.3.020363
- [9] O. Gühne, G. Tóth. Phys. Rep., **474**, 1 (2009). DOI: 10.1016/j.physrep.2009.02.004
- [10] C. Schimpf, M. Reindl, B.B. Francesco, K.D. Jöns, R. Trotta, A. Rastelli. Appl. Phys. Lett., **118**, 100502 (2021). DOI: 10.1063/5.0038729
- [11] T. Kuroda, T. Mano, N. Ha, H. Nakajima, H. Kumano, B. Urbaszek, M. Jo, M. Abbarchi, Y. Sakuma, K. Sakoda, I. Suemune, X. Marie, T. Amand. Phys. Rev. B, **88**, 041306(R) (2013). DOI: 10.1103/PhysRevB.88.041306
- [12] D. Huber, M. Reindl, Y. Huo, H. Huang, J.S. Wildmann, O.G. Schmidt, A. Rastelli, R. Trotta. Nat. Commun., **8**, 15506 (2017). DOI: 10.1038/ncomms15506
- [13] C. Schimpf, F.B. Basset, M. Aigner, W. Attenender, L. Ginés, G. Undeutsch, M. Reindl, D. Huber, D. Gangloff, E.A. Chekhovich, C. Schneider, S. Höfling, A. Predojević, R. Trotta, A. Rastelli. Phys. Rev. B, **108**, L081405 (2023). DOI: 10.1103/PhysRevB.108.L081405
- [14] R.I. Dzhioev, H.M. Gibbs, E.L. Ivchenko, G. Khitrova, V.L. Korenev, M.N. Tkachuk, B.P. Zakharchenya. Phys. Rev. B, **56**, 13 405 (1997). DOI: 10.1103/PhysRevB.56.13405
- [15] S.V. Gupalov, E.L. Ivchenko, A.V. Kavokin. Proc. Int. Symp. „Nanostructures: Physics and Technology“, St. Petersburg, 1996, pp. 322–325; **23**, 1205 (1998). DOI: 10.1006/spmi.1996.0367
- [16] D. Gammon, E.S. Snow, B.V. Shanabrook, D.S. Katzer, D. Park. Phys. Rev. Lett., **76**, 3005 (1996). DOI: 10.1103/PhysRevLett.76.3005
- [17] E.L. Ivchenko. Phys. Status Solidi A, **164**, 487 (1997). DOI: 10.1002/1521-396X(199711)164:1<487::AID-PSSA487>3.0.CO;2-1
- [18] С.В. Гупалов, Е.Л. Ивченко, А.В. Кавокин. ЖЭТФ, **113**, 703 (1998).
- [19] R.M. Stevenson, R.J. Young, P. See, D.G. Gevaux, K. Cooper, P. Atkinson, I. Farrer, D.A. Ritchie, A.J. Shields. Phys. Rev. B, **73**, 033306 (2006). DOI: https://doi.org/10.1103/PhysRevB.73.033306
- [20] M.M. Glazov, E.L. Ivchenko, O. Krebs, K. Kowalik, P. Voisin. Phys. Rev. B, **76**, 193313 (2007). DOI: 10.1103/PhysRevB.76.193313
- [21] M.M. Glazov. *Electron & Nuclear Spin Dynamics in Semiconductor Nanostructures* (Oxford University Press, Oxford, 2018).
- [22] E.L. Ivchenko. *Optical Spectroscopy of Semiconductor Nanostructures* (Alpha Science International, Harrow, UK, 2005).
- [23] Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. *Теория поля*, (Физматлит, 2020).
- [24] Y. Masumoto, K. Toshiyuki, T. Suzuki, M. Ikezawa. Phys. Rev. B, **77**, 115331 (2008). DOI: 10.1103/PhysRevB.77.115331
- [25] H. Kurtze, D.R. Yakovlev, D. Reuter, A.D. Wieck, M. Bayer. Phys. Rev. B, **85**, 195303 (2012). DOI: 10.1103/PhysRevB.85.195303
- [26] D. Cogan, O. Kenneth, N.H. Lindner, G. Peniakov, C. Hopfmann, D. Dalacu, P.J. Poole, P. Hawrylak, D. Gershoni. Phys. Rev. X, **8**, 041050 (2018). DOI: 10.1103/PhysRevX.8.041050
- [27] А.Н. Старухин, Д.К. Нельсон, Б.С. Разбирин, Д.Л. Федоров, Д.К. Сюняев. ФТТ, **57**, 1888 (2015).
- [28] K.N. Boldyrev, M.N. Popova, B.Z. Malkin, N.M. Abishev. Phys. Rev. B, **99**, 041105 (2019). DOI: 10.1103/PhysRevB.99.041105
- [29] T.S. Shamirzaev, A.V. Shumilin, D.S. Smirnov, J. Rautert, D.R. Yakovlev, M. Bayer. Phys. Rev. B, **104**, 115405 (2021). DOI: 10.1103/PhysRevB.104.115405
- [30] A.V. Shumilin, T.S. Shamirzaev, D.S. Smirnov. Phys. Rev. Lett., **132**, 076202 (2024). DOI: 10.1103/PhysRevLett.132.076202