01

Транспортные решения уравнений Максвелла при сверхсветовых скоростях: ударные электромагнитные волны

Л.А. Алексеева,[1] И.А. Канымгазиева[2]

[1] Институт математики и математического моделирования,
050010 Алматы, Казахстан
[2] Евразийский национальный университет им. Л. Гумилева,
010000 Астана, Казахстан
e-mail: alexeeva47@mail.ru, Ilmira_69@mail.ru

Поступило в Редакцию 18 мая 2024 г.
В окончательной редакции 12 июля 2024 г.
Принято к публикации 20 сентября 2024 г.

Рассмотрены транспортные решения уравнений Максвелла при действии подвижных излучателей электромагнитных волн, движущихся с постоянной скоростью в фиксированном направлении. С использованием преобразования Фурье обобщенных функций построены фундаментальные и обобщенные решения при скоростях движения, превышающих скорость распространения электромагнитных волн в среде и совпадающих с ней, которая названа *световой*. Даны их регулярные интегральные представления в аналитической форме. Построение решений при произвольных подвижных источниках основано на свойстве свертки фундаментальных решений дифференциальных уравнений с правой частью. Показано, что при таких скоростях возникают ударные электромагнитные волны. С использованием метода обобщенных функций получены условия на скачки напряженностей электромагнитного поля на фронтах ударных волн. Показано, что ударные электромагнитные волны являются поперечными, и вектора электрической и магнитной напряженности ортогональны друг другу и лежат в касательном расслоении к фронту ударной волны.

Ключевые слова: уравнения Максвелла, скорость света, скорость движения, тензор Грина, обобщенные решения, ударные электромагнитные волны, условия на фронтах.

DOI: 10.61011/JTF.2024.11.59092.184-24

Введение

Основой современной электродинамики являются Уравнения Максвелла (УМ), которые связывают вектора электрической и магнитной напряженности с электрическими токами и зарядами и позволяют определять электромагнитное (ЭМ) поле при известных зарядах и токах, и наоборот. Решением разнообразных задач для них занимаются многие ученые, начиная со второй половины XIX века. Библиография в этом направлении обширная, как и множество учебной литературы по электромагнетизму [1–7].

Среди действующих источников излучения ЭМ волн наиболее распространенными являются подвижные, расположенные на платформах различных транспортных средств. Очевидно, что скорость движения существенно влияет на процессы распространения ЭМ волн в средах с различной электрической проводимостью и магнитной проницаемостью, как и форма самого источника и характер его работы. Исследования в этом направлении не столь многочисленны и связаны с определенным видом источника излучения [8–14].

Ранее нами построены фундаментальные и обобщенные транспортные решения системы УМ при действии подвижных источников ЭМ волн, движущихся в фиксированном направлении с постоянной скоростью, которая меньше скорости распространения ЭМ волн в среде, которую называем *световой* [15]. Получены формулы для вычисления ЭМ полей для подвижных излучателей разного вида и произвольных форм, полезные для радиотехнических приложений.

Здесь мы строим фундаментальные и обобщенные решения УМ при скоростях движения, превышающих световую скорость в рассматриваемой электромагнитной среде и совпадающей с ней. Построены регулярные интегральные представления в аналитической форме.

При световой и сверхсветовых скоростях система транспортных УМ становится строго гиперболической, ее решения описывают *ударные* ЭМ волны, на фронтах которых вектора напряженностей электрического и магнитного полей разрывны. С использованием методов теории обобщенных функций получены условия на фронтах ударных волн, которые подтверждают известные свойства поперечности ЭМ волн и ортогональность векторов электрической и магнитной напряженности поля на их фронтах и фазовых поверхностях.

1. Транспортные УМ. Число Маха

Рассмотрим систему УМ:

$$\operatorname{rot}\mathbf{E} + \mu\mu_0\,\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = \mathbf{j}^m(x_1, x_2, x_3, t),$$

$$\operatorname{rot}\mathbf{H} - \varepsilon\varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \mathbf{j}^e(x_1, x_2, x_3, t), \quad (1)$$
$$\operatorname{div}\mathbf{H} = 0, \quad \operatorname{div}\mathbf{D} = \rho^e.$$

Здесь вектор плотности магнитного тока $\mathbf{j}^m$ [V/m^2], вектор плотности электрического тока $\mathbf{j}^e$ [A/m^2], вектор напряженности электрического поля $\mathbf{E}$ [V/m], вектор напряженности магнитного поля $\mathbf{H}(x, t)$ [A/m], объемная плотность электрического заряда ρ^e [C/m^3].

Материальные соотношения:

$$\mathbf{B} = \mu\mu_0\mathbf{H}, \quad \mathbf{D} = \varepsilon\varepsilon_0\mathbf{E}, \quad (2)$$

где μ — магнитная проницаемость среды, ε — электрическая проводимость среды, $\mathbf{B}(x_1, x_2, x_3, t)$ — вектор индукции магнитного поля, $\mathbf{D}(x_1, x_2, x_3, t)$ — вектор индукции электрического поля.

В уравнения (1) введены магнитные токи $\mathbf{j}^m(x_1, x_2, x_3, t)$. В УМ $\mathbf{j}^m = 0$. Далее это ограничение снимем.

Рассмотрим подвижные транспортные источники ЭМ волн, которые движутся с постоянной скоростью V в определенном направлении $(\mathbf{e}_z)$. Их можно описать токами вида $\mathbf{j}^m(x_1, x_2, z)$, $z = x_3 + Vt$. В подвижной системе координат (x_1, x_2, z):

$$\frac{\partial}{\partial t} = V\frac{\partial}{\partial z}$$

и векторные УМ примут вид:

$$\frac{\partial E_z}{\partial x_2} - \frac{\partial E_2}{\partial z} + V\mu\mu_0\frac{\partial}{\partial z}H_1 = j_1^m(x_1, x_2, z),$$
$$\frac{\partial E_1}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x_1} + V\mu\mu_0\frac{\partial}{\partial z}H_2 = j_2^m(x_1, x_2, z),$$
$$\frac{\partial E_2}{\partial x_1} - \frac{\partial E_1}{\partial x_2} + V\mu\mu_0\frac{\partial}{\partial z}H_z = j_z^m(x_1, x_2, z),$$
$$\frac{\partial H_z}{\partial x_2} - \frac{\partial H_2}{\partial z} - V\varepsilon\varepsilon_0\frac{\partial}{\partial z}E_1 = j_1^e(x_1, x_2, z),$$
$$\frac{\partial H_1}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x_1} - V\varepsilon\varepsilon_0\frac{\partial}{\partial z}E_2 = j_2^e(x_1, x_2, z),$$
$$\frac{\partial H_2}{\partial x_1} - \frac{\partial H_1}{\partial x_2} - V\varepsilon\varepsilon_0\frac{\partial}{\partial z}E_z = j_z^e(x_1, x_2, z). \quad (3)$$

Два скалярных уравнения (1) сохраняют свой вид. Назовем эту систему *транспортными* УМ. Запишем ее в матричном виде [15]:

$$\mathbf{M}(\partial_1, \partial_2, \partial_z)\mathbf{u} = \mathbf{J}, eqno(4)$$

где $\partial_j = \frac{\partial}{\partial x_j}$, $j = 1, 2, z$; $\mathbf{M}(\partial_1, \partial_2, \partial_z)$ — транспортный дифференциальный оператор Максвелла, который имеет следующий вид:

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 0 & -\partial_z & \partial_2 & V\mu\mu_0\partial_z & 0 & 0 \\ \partial_z & 0 & -\partial_1 & 0 & V\mu\mu_0\partial_z & 0 \\ -\partial_2 & \partial_1 & 0 & 0 & 0 & V\mu\mu_0\partial_z \\ -V\varepsilon\varepsilon_0\partial_z & 0 & 0 & 0 & -\partial_z & \partial_2 \\ 0 & -V\varepsilon\varepsilon_0\partial_z & 0 & \partial_z & 0 & -\partial_1 \\ 0 & 0 & -V\varepsilon\varepsilon_0\partial_z & -\partial_2 & \partial_1 & 0 \end{pmatrix};$$

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} \mathbf{E}(x_1, x_2, z) \\ \mathbf{H}(x_1, x_2, z) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{J} = \begin{pmatrix} \mathbf{j}^m(x_1, x_2, z) \\ \mathbf{j}^e(x_1, x_2, z) \end{pmatrix}.$$

Далее используем обозначения: $c = \frac{1}{\sqrt{\mu\mu_0\varepsilon\varepsilon_0}}$ — скорость распространения ЭМ волн в рассматриваемой среде. Будем называть ее *световой.*

Отношение $M = \frac{V}{c}$ назовем *числом Маха*, как принято в механике сплошных сред называть отношение скорости движения источника возмущения в среде по отношению к скорости распространения волн в среде.

Возможны три случая движения, которые меняют тип уравнений (4) и вид его решений: *досветовой* $M < 1$, *световой* $M = 1$ и *сверхсветовой* $M > 1$. Транспортные решения УМ при досветовых скоростях построены и изучены нами ранее в [15]. В этом случае имеем уравнения эллиптического типа. Здесь рассмотрим два других случая, которые приводят к системам строго гиперболического и параболического типа соответственно скорости движения, что существенно влияет на вид решения и его свойства.

2. Тензор Грина транспортных УМ при сверхсветовых скоростях

Определение. *Тензором Грина УМ называется матрица фундаментальных решений уравнений* (4) *при*

$$\mathbf{J} = \delta(x_1)\delta(x_2)\delta(z)\{\delta_{ij}\}_{6\times 6},$$

удовлетворяющая условиям излучения, которые описывают расходящиеся от подвижного источника волны, затухающие на бесконечности.

Тензор Грина удовлетворяет уравнению

$$\mathbf{M}(\partial_1, \partial_2, \partial_z)\mathbf{U}(x_1, x_2, z) = \delta(x_1)\delta(x_2)\delta(z)\{\delta_{ij}\}_{6\times 6}, \quad (5)$$

и где δ_{ij} — символ Кронекера, $\delta(\ldots)$ — дельта-функция Дирака. Для его построения используем преобразование Фурье в пространстве обобщенных функций медленного роста [16,17].

В пространстве преобразований (k_1, k_2, k_3) связь с исходными координатами

$$(x_1, x_2, z) \leftrightarrow (k_1, k_2, k_3).$$

Для регулярных функций преобразование Фурье имеет вид:

$$\mathsf{F}[f(x_1, x_2, z)] = \bar{f}(k_1, k_2, k_3) = \int_{R^3} f(x_1, x_2, z) \times e^{i(x_1k_1 + x_2k_2 + zk_3)}dx_1dx_2dz,$$

Обратное преобразование Фурье:

$$\mathsf{F}^{-1}[\bar{f}(k_1, k_2, k_3)] = f(x_1, x_2, z) = \frac{1}{(2\pi)^3}\int_{R^3} \bar{f}(k_1, k_2, k_3)e^{-i(x_1k_1 + x_2k_2 + zk_3)}dk_1dk_2dk_3. \quad (6)$$

Используя свойство преобразования Фурье производной: $\partial_j \Leftrightarrow -ik_j$, и дельта-функции: $F[\delta(x_1)\delta(x_2)\delta(z)] = 1$, получим систему линейных алгебраических уравнений для определения компонент преобразование тензора Грина:

$$\mathbf{M}(-ik_1, -ik_2, -ik_z)\bar{\mathbf{U}}(k_1, k_2, k_3) = \{\delta_{ij}\}_{6\times 6}. \quad (7)$$

Здесь $\mathbf{M}(-ik_1, -ik_2, -ik_z)$ — преобразование Фурье транспортного дифференциального оператора Максвелла:

$$\mathbf{M}(-ik_1, -ik_2, -ik_z) = \begin{pmatrix} 0 & ik_3 & -ik_2 & -ik_3V\mu\mu_0 & 0 & 0 \\ -ik_3 & 0 & ik_1 & 0 & -ik_3V\mu\mu_0 & 0 \\ ik_2 & -ik_1 & 0 & 0 & 0 & -ik_3V\mu\mu_0 \\ ik_3V\varepsilon\varepsilon_0 & 0 & 0 & 0 & ik_3 & -ik_2 \\ 0 & ik_3V\varepsilon\varepsilon_0 & 0 & -ik_3 & 0 & ik_1 \\ 0 & 0 & ik_3V\varepsilon\varepsilon_0 & ik_2 & -ik_1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (8)$$

Решение уравнений (7) имеет вид обратной матрицы:

$$\bar{\mathbf{U}}(k_1, k_2, k_3) = \big(\mathbf{M}(-ik_1, -ik_2, -ik_z)\big)^{-1}, \quad (9)$$

столбцы которой — компоненты тензора Грина при сверхсветовых скоростях представлены ниже:

$$\{\bar{U}_{m1}\} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{-ik_3}{k_1^2+k_2^2-k_3^2m^2} \\ \frac{ik_2}{k_1^2+k_2^2-k_3^2m^2} \\ \frac{ik_1^2-ik_3^2M^2}{V\varepsilon\varepsilon_0k_3(k_1^2+k_2^2-k_3^2m^2)} \\ \frac{ik_1k_2}{V\varepsilon\varepsilon_0k_3(k_1^2+k_2^2-k_3^2m^2)} \\ \frac{ik_1}{V\varepsilon\varepsilon_0(k_1^2+k_2^2-k_3^2m^2)} \end{bmatrix}, \{\bar{U}_{m2}\} = \begin{bmatrix} \frac{ik_3}{k_1^2+k_2^2-k_3^2m^2} \\ 0 \\ \frac{-ik_1}{k_1^2+k_2^2-k_3^2m^2} \\ \frac{ik_1k_2}{V\varepsilon\varepsilon_0k_3(k_1^2+k_2^2-k_3^2m^2)} \\ \frac{ik_2^2-ik_3^2M^2}{V\varepsilon\varepsilon_0k_3(k_1^2+k_2^2-k_3^2m^2)} \\ \frac{ik_2}{V\varepsilon\varepsilon_0(k_1^2+k_2^2-k_3^2m^2)} \end{bmatrix},$$

$$\{\bar{U}_{m3}\} = \begin{bmatrix} \frac{-ik_2}{k_1^2+k_2^2-k_3^2m^2} \\ \frac{ik_1}{k_1^2+k_2^2-k_3^2m^2} \\ 0 \\ \frac{ik_1}{V\varepsilon\varepsilon_0(k_1^2+k_2^2-k_3^2m^2)} \\ \frac{ik_2}{V\varepsilon\varepsilon_0(k_1^2+k_2^2-k_3^2m^2)} \\ \frac{-ik_3m^2}{V\varepsilon\varepsilon_0(k_1^2+k_2^2-k_3^2m^2)} \end{bmatrix}, \{\bar{U}_{m4}\} = \begin{bmatrix} -\frac{ik_1^2-ik_3^2M^2}{V\mu\mu_0k_3(k_1^2+k_2^2-k_3^2m^2)} \\ -\frac{ik_2k_1}{V\mu\mu_0k_3(k_1^2+k_2^2-k_3^2m^2)} \\ -\frac{ik_1}{V\mu\mu_0(k_1^2+k_2^2-k_3^2m^2)} \\ 0 \\ \frac{-ik_3}{k_1^2+k_2^2-k_3^2m^2} \\ \frac{ik_2}{k_1^2+k_2^2-k_3^2m^2} \end{bmatrix},$$

$$\{\bar{U}_{m5}\} = \begin{bmatrix} \frac{-ik_2k_1}{V\mu\mu_0k_3(k_1^2+k_2^2-k_3^2m^2)} \\ \frac{-ik_2^2-ik_3^2M^2}{V\mu\mu_0k_3(k_1^2+k_2^2-k_3^2m^2)} \\ \frac{-ik_2}{V\mu\mu_0(k_1^2+k_2^2-k_3^2m^2)} \\ \frac{ik_3}{k_1^2+k_2^2-k_3^2m^2} \\ 0 \\ -\frac{ik_1}{k_1^2+k_2^2-k_3^2m^2} \end{bmatrix}, \{\bar{U}_{m6}\} = \begin{bmatrix} \frac{ik_1}{V\mu\mu_0(k_1^2+k_2^2-k_3^2m^2)} \\ \frac{ik_2}{V\mu\mu_0(k_1^2+k_2^2-k_3^2m^2)} \\ \frac{-ik_3m^2}{V\mu\mu_0(k_1^2+k_2^2-k_3^2m^2)} \\ \frac{-ik_2}{k_1^2+k_2^2-k_3^2m^2} \\ \frac{ik_1}{k_1^2+k_2^2-k_3^2m^2} \\ 0 \end{bmatrix}.$$

В знаменателях, приводя подобные члены при $M > 1$, так как $1 - M^2 < 0$, получим

$$k_1^2 + k_2^2 + k_3^2 - M^2k_3^2 = k_1^2 + k_2^2 - m^2k_3^2, \; m = \sqrt{M^2 - 1}.$$

Заметим, что компоненты тензора Грина выражаются через следующие базисные функции и их оригиналы:

$$\bar{f}_0(k_1, k_2, k_3) = \frac{1}{k_1^2 + k_2^2 - m^2k_3^2} \Leftrightarrow f_0(x_1, x_2, z), \quad (10)$$

$$\bar{f}_1(k_1, k_2, k_3) = -\frac{1}{ik_3}\bar{f}_0(k_1, k_2, k_3) \Leftrightarrow f_0(x_1, x_2, z)$$
$$= \partial_z f_1(x_1, x_2, z). \quad (11)$$

Используя их, свойства преобразования Фурье производных представим оригинал $\mathbf{U}(x_1, x_2, z)$ через эти базисные функции:

$$\{\bar{U}_{m1}\} = \begin{bmatrix} 0 \\ -ik_3\bar{f}_0(k_1, k_2, k_3) \\ ik_2\bar{f}_0(k_1, k_2, k_3) \\ \frac{ik_1^2-ik_3^2M^2}{\varepsilon\varepsilon_0V}\,\bar{f}_1(k_1, k_2, k_3) \\ \frac{k_1k_2}{\varepsilon\varepsilon_0V}\,\bar{f}_1(k_1, k_2, k_3) \\ \frac{ik_1}{\varepsilon\varepsilon_0V}\,\bar{f}_0(k_1, k_2, k_3) \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \{U_{m1}\} = \begin{bmatrix} 0 \\ \partial_z f_0(x_1, x_2, z) \\ -\partial_2 f_0(x_1, x_2, z) \\ \frac{1}{\varepsilon\varepsilon_0V}\,(\partial_1^2 - M^2\partial_z^2)f_1(x_1, x_2, z) \\ \frac{1}{\varepsilon\varepsilon_0V}\,\partial_1\partial_2 f_1(x_1, x_2, z) \\ -\frac{1}{\varepsilon\varepsilon_0V}\,\partial_1 f_0(x_1, x_2, z) \end{bmatrix},$$

$$\{\bar{U}_{m2}\} = \begin{bmatrix} ik_3\bar{f}_0(k_1,k_2,k_3) \\ 0 \\ -ik_1\bar{f}_0(k_1,k_2,k_3) \\ \frac{k_1k_2}{\varepsilon\varepsilon_0 V}\,\bar{f}_1(k_1,k_2,k_3) \\ \frac{ik_2^2-ik_3^2M^2}{\varepsilon\varepsilon_0 V}\,\bar{f}_1(k_1,k_2,k_3) \\ \frac{ik_2}{\varepsilon\varepsilon_0 V}\,\bar{f}_0(k_1,k_2,k_3) \end{bmatrix} \Rightarrow \{U_{m2}\} = \begin{bmatrix} -\partial_z f_0(x_1,x_2,z) \\ 0 \\ \partial_1 f_0(x_1,x_2,z) \\ -\frac{1}{\varepsilon\varepsilon_0 V}\,\partial_1\partial_2 f_1(x_1,x_2,z) \\ -\frac{1}{\varepsilon\varepsilon_0 V}\,(\partial_2^2-M^2\partial_z^2)f_1(x_1,x_2,z) \\ -\frac{1}{\varepsilon\varepsilon_0 V}\,\partial_2 f_0(x_1,x_2,z) \end{bmatrix},$$

$$\{\bar{U}_{m3}\} = \begin{bmatrix} -ik_2\bar{f}_0(k_1,k_2,k_3) \\ ik_1\bar{f}_0(k_1,k_2,k_3) \\ 0 \\ -\frac{ik_1}{\varepsilon\varepsilon_0 V}\,\bar{f}_0(k_1,k_2,k_3) \\ -\frac{ik_2}{\varepsilon\varepsilon_0 V}\,\bar{f}_0(k_1,k_2,k_3) \\ \frac{ik_3m^2}{\varepsilon\varepsilon_0 V}\,\bar{f}_0(k_1,k_2,k_3) \end{bmatrix} \Rightarrow \{U_{m3}\} = \begin{bmatrix} \partial_2 f_0(x_1,x_2,z) \\ -\partial_1 f_0(x_1,x_2,z) \\ 0 \\ \frac{1}{\varepsilon\varepsilon_0 V}\,\partial_1 f_0(x_1,x_2,z) \\ \frac{1}{\varepsilon\varepsilon_0 V}\,\partial_2 f_0(x_1,x_2,z) \\ \frac{m^2}{\varepsilon\varepsilon_0 V}\,\partial_z f_0(x_1,x_2,z) \end{bmatrix},$$

$$\{\bar{U}_{m4}\} = \begin{bmatrix} \frac{ik_1^2-ik_3^2M^2}{\mu\mu_0 V}\,\bar{f}_1(k_1,k_2,k_3) \\ \frac{k_1k_2}{\mu\mu_0 V}\,\bar{f}_1(k_1,k_2,k_3) \\ \frac{ik_1}{\mu\mu_0 V}\,\bar{f}_0(k_1,k_2,k_3) \\ 0 \\ -ik_3\bar{f}_0(k_1,k_2,k_3) \\ ik_2\bar{f}_0(k_1,k_2,k_3) \end{bmatrix} \Rightarrow \{U_{m4}\} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\mu\mu_0 V}\,(\partial_1^2-M^2\partial_z^2)f_1(x_1,x_2,z) \\ \frac{1}{\mu\mu_0 V}\,\partial_1\partial_2 f_1(x_1,x_2,z) \\ -\frac{1}{\mu\mu_0 V}\,\partial_1 f_0(x_1,x_2,z) \\ 0 \\ \partial_z f_0(x_1,x_2,z) \\ -\partial_2 f_0(x_1,x_2,z) \end{bmatrix},$$

$$\{\bar{U}_{m5}\} = \begin{bmatrix} \frac{k_1k_2}{\mu\mu_0 V}\,\bar{f}_1(k_1,k_2,k_3) \\ \frac{-ik_3^2M^2+ik_2^2}{\mu\mu_0 V}\,\bar{f}_1(k_1,k_2,k_3) \\ \frac{ik_2}{\mu\mu_0 V}\,\bar{f}_0(k_1,k_2,k_3) \\ ik_3\bar{f}_0(k_1,k_2,k_3) \\ 0 \\ -ik_1\bar{f}_0(k_1,k_2,k_3) \end{bmatrix} \Rightarrow \{U_{m5}\} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\mu\mu_0 V}\,\partial_1\partial_2 f_1(x_1,x_2,z) \\ \frac{-1}{\mu\mu_0 V}\,(M^2\partial_z^2-\partial_2^2)f_1(x_1,x_2,z) \\ \frac{-1}{\mu\mu_0 V}\,\partial_2 f_0(x_1,x_2,z) \\ -\partial_z f_0(x_1,x_2,z) \\ 0 \\ \partial_1 f_0(x_1,x_2,z) \end{bmatrix},$$

$$\{\bar{U}_{m6}\} = \begin{bmatrix} \frac{-ik_1}{\mu\mu_0 V}\,\bar{f}_0(k_1,k_2,k_3) \\ \frac{-ik_2}{\mu\mu_0 V}\,\bar{f}_0(k_1,k_2,k_3) \\ \frac{-ik_3m^2}{\mu\mu_0 V}\,\bar{f}_0(k_1,k_2,k_3) \\ -ik_2\bar{f}_0(k_1,k_2,k_3) \\ ik_1\bar{f}_0(k_1,k_2,k_3) \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \{U_{m6}\} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\mu\mu_0 V}\,\partial_1 f_0(x_1,x_2,z) \\ \frac{1}{\mu\mu_0 V}\,\partial_2 f_0(x_1,x_2,z) \\ \frac{m^2}{\mu\mu_0 V}\,\partial_3 f_0(x_1,x_2,z) \\ \partial_2 f_0(x_1,x_2,z) \\ -\partial_1 f_0(x_1,x_2,z) \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (12)$$

Отсюда следует, что компоненты тензора Грина определяются через оригиналы базовых функций. Построим их.

3. Построение оригиналов базовых функций при $M > 1$

Рассмотрим преобразование Фурье базисной функции:

$$\bar{f}_0(k_1, k_2, k_3) = \frac{1}{k_1^2 + k_2^2 - m^2 k_3^2}, \tag{13}$$

которая является преобразованием Фурье фундаментального решения уравнения:

$$\frac{\partial^2 f_0}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 f_0}{\partial x_2^2} - m^2 \frac{\partial^2 f_0}{\partial x_3^2} = \delta(x_1)\delta(x_2)\delta(x_3). \tag{14}$$

Это гиперболическое волновое уравнение. Для построения его решения используем фундаментальное решение волнового уравнения в $2D$ пространстве [16,17]:

$$\left(\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x_2^2}\right) - a^{-2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} = \delta(x_1)\delta(x_2)\delta(t), \tag{15}$$

$$\Psi(x_1, x_2, t) = -\frac{aH(at - r)}{2\pi\sqrt{a^2 t^2 - r^2}}, \quad r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}, \tag{16}$$

которое удовлетворяет условиям излучения

$$\Psi(x_1, x_2, t) = 0 \quad \text{при} \;\; t < 0 \text{ и } \; r > at. \tag{17}$$

Сравнивая с (14), получим оригинал первой базисной функции:

$$f_0(x_1, x_2, z) = -\frac{H(z - mr)}{2\pi\sqrt{z^2 - m^2 r^2}}. \tag{18}$$

Здесь $H(z)$ — функция Хевисайда.

Далее найдем $f_1(x_1, x_2, z)$, используя свертку $(*)$ с функцией Хевисайда. В силу (11) и свойства $H'(z) = \delta(z)$:

$$\begin{aligned} f_1(x_1, x_2, z) &= f_0(x_1, x_2, z)_z * H(z) \\ &= -\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{H(\xi - mr)}{\sqrt{\xi^2 - m^2 r^2}} H(z - \xi) d\xi \\ &= -\frac{H(z)}{2\pi}\int\limits_{mr}^{z} \frac{1}{\sqrt{\xi^2 - m^2 r^2}} d\xi \\ &= -\frac{H(z - mr)}{2\pi} \ln\left(\frac{z + \sqrt{z^2 - m^2 r^2}}{mr}\right). \end{aligned} \tag{19}$$

Базисные функции построены. Заметим, что носителем их является внутренность конуса: $z > mr$, вне которого $\mathbf{U}(x_1, x_2, z) = 0$. То есть поверхность конуса Маха $z = mr$ является фронтом ударной ЭМ волны, на котором компоненты тензора Грина сингулярны, так как $f_0(x_1, x_2, z) \to \infty$ при $r \to \frac{z}{m}$.

Итак, все компоненты тензора Грина построены. Используя свойство тензора Грина, построим решения этих уравнений при произвольной правой части.

4. Построение транспортных решений УМ при $M > 1$

Решение, с точностью до решения однородной системы уравнений, имеет вид тензорно-функциональной свертки правой части уравнений (4) с тензором Грина:

$$\mathbf{u}(x, z) = \mathbf{U}(x, z) * \mathbf{J}(x, z), \tag{20}$$

$$\begin{pmatrix} \mathbf{E}(x, z) \\ \mathbf{H}(x, z) \end{pmatrix} = \mathbf{U}(x, z) * \begin{pmatrix} \mathbf{j}^m(x, z) \\ \mathbf{j}^e(x, z) \end{pmatrix},$$

или покомпонентно

$$u_i(x, z) = \sum_{k=1}^{6} U_{ik}(x, z) * j_k(x, z), \quad i = 1, \ldots, 6. \tag{21}$$

Формула (20) содержит свертки базисных функций и их производных с компонентами токов вида:

$$u_1(x, z) = f_k * g(x, z), \quad k = 0, 1,$$

$$u_2(x, z) = \partial_j f_k * g(x, z), \quad j = 1, 2, z,$$

$$u_3(x, z) = \partial_j \partial_m f_k * g(x, z), \quad m = 1, 2, z.$$

Здесь через $g(x_1, x_2, z)$ условно обозначаем компоненты токов $j_k(x_1, x_2, z)$, где $k = 1, \ldots, 6$.

Поскольку

$$\partial_z H(z - mr) = \delta(z - mr),$$

$$\partial_j H(z - mr) = -mr_{,j}\delta(z - mr),$$

где $\delta(z - mr)$ — простой слой на световом конусе — сингулярная обобщенная функция, поэтому производные базисных функций также сингулярны:

$$\partial_z f_0 = \frac{H(z - mr)}{2\pi\sqrt{z^2 - m^2 r^2}} = -\frac{zH(z - mr)}{2\pi\left(\sqrt{z^2 - m^2 r^2}\right)^3} - \frac{1}{2\pi\sqrt{z^2 - m^2 r^2}}\delta(z - mr),$$

$$\partial_j f_0 = \frac{H(z - mr)}{2\pi\sqrt{z^2 - m^2 r^2}} = \frac{m^2 x_j H(z - mr)}{2\pi\left(\sqrt{z^2 - m^2 r^2}\right)^3} + \frac{mr_{,j}}{2\pi\sqrt{z^2 - m^2 r^2}}\delta(z - mr).$$

Здесь и далее $r_{,j} = \partial r / \partial x_j = \frac{x_j}{r}$.

Как видим, здесь плотность простого слоя на конусе равна бесконечности, что не позволяет прямо дифференцировать базисные функции. Поэтому при вычислении сверток следует использовать свойство дифференцирования свертки [16,17]:

$$u_2(x,z)=\partial_j\big(f_k*g(x,z)\big)=\big(f_k*\partial_j g(x,z)\big)$$
$$=\partial_j f_k*g(x,z),$$

$$u_3(x,z)=\partial_j\partial_m f_k*g(x,z)=\partial_j\partial_m\big(f_k*g(x,z)\big). \qquad (22)$$

То есть решения УМ (21), для которых $\mathbf{j}^m(x,z)=(0,0,0)$, имеют вид

$$E_x=\frac{1}{\epsilon\epsilon_0 V}\big\{(\partial_1^2-M^2\partial_3^2)(f_1*j_1^e)+\partial_1\partial_2(f_1*j_2^e)$$
$$-\partial_1(f_0*j_z^e)\big\},$$

$$E_y=-\frac{1}{\epsilon\epsilon_0 V}\big\{\partial_1\partial_2(f_1*j_1^e)+(\partial_1^2-M^2\partial_3^2)(f_1*j_2^e)$$
$$+\partial_2(f_0*j_z^e)\big\},$$

$$E_z=\frac{1}{\epsilon\epsilon_0 V}\left\{\partial_1(f_0*j_1^e)+\partial_2(f_0*j_2^e)-(1-M^2)\partial_3(f_0*j_z^e)\right\}, \qquad (23)$$

$$H_x=\partial_3(f_0*j_2^e)-\partial_2(f_0*j_z^e),$$
$$H_y=-\partial_3(f_0*j_1^e)+\partial_1(f_0*j_z^e),$$
$$H_z=\partial_2(f_0*j_1^e)-\partial_1(f_0*j_2^e). \qquad (24)$$

Если $\mathbf{j}^e(x,z)$ — регулярные функции, то решение можно представить в интегральном виде, используя интегральное представление сверток (22):

$$u_1(x,z)=\big(f_k*g(x,z)\big)$$
$$=H(z)\int\limits_{r\le\frac{z}{m}}\left(\int\limits_{mr(x,y)}^{z} f_k(x-y,\xi)g(y,z-\xi)\,d\xi\right)dy_1\,dy_2,$$

$$u_2(x,z)=\partial_j\big(f_k*g(x,z)\big)$$
$$=H(z)\partial_j\int\limits_{r\le z/m}\left(\int\limits_{mr(x,y)}^{z} f_k(x-y,\xi)g(y,z-\xi)d\xi\right)dy_1dy_2,$$

$$u_3(x,z)=\partial_i\partial_j\big(f_k*g(x,z)\big)$$
$$=H(z)\partial_i\partial_j\int\limits_{r\le z/m}\left(\int\limits_{mr(x,y)}^{z} f_k(x-y,\xi)g(y,z-\xi)d\xi\right)dy_1dy_2,$$

где

$$x=(x_1,x_2),\quad y=(y_1,y_2),\quad r(x,y)=\|x-y\|.$$

Здесь внешний интеграл по области $y\in\mathbb{R}^2$: $r(x,y)\le\frac{z}{m}$ — это круг радиуса z/m с центром в точке x. Введение производной под знак интеграла зависит от свойств дифференцируемости компонент плотности электрических токов $\mathbf{j}^e(x,z)$.

Если токи дифференцируемые, то при вычислении сверток (22) следует использовать формулы

$$u_2(x,z)=\partial_j f_k*g(x,z)=f_k*\partial_j g(x,z),$$

$$u_3(x,z)=\partial_j\partial_m f_k*g(x,z)=f_k*\partial_j\partial_m g(x,z). \qquad (25)$$

Тогда в интегральном представление этих сверток будут стоять не $g(x,z)$, а их производные. Если компоненты сингулярные обобщенные функции, то свертки в решении (21) следует брать согласно определению сверток в пространстве обобщенных функций [16,17].

Отметим также, что формулы (23), (24), помимо распределенных в $3D$-пространстве токов, позволяют строить решения транспортных УМ для излучателей ЭМ волн, носители которых сосредоточены в точках, на нитях или поверхностях произвольных форм, которые можно моделировать сингулярными обобщенными функциями типа простых и многомерных слоев и поверхностей разных размерностей аналогично, как показано нами для досветовых скоростей в [15].

5. Ударные ЭМ волны как обобщенные решения УМ. Условия на фронтах

При сверхсветовых скоростях система транспортных УМ является строго гиперболической. Поэтому помимо гладких дифференцируемых решений, она может иметь недифференцируемые решения, разрывные на характеристических поверхностях.

Рассмотрим такие решения, которые описывают ударные ЭМ волны, на фронтах которых решения и их производные терпят скачки. Для определения условий на фронтах ударных волн используем Метод Обобщенных Функций [18–20]. Для этого рассмотрим систему УМ на пространстве обобщенных вектор-функций, компоненты которых принадлежат классу обобщенных функций $D'(R^3)$ [16,17]:

$$\mathbf{M}(\partial_1,\partial_2,\partial_z)\begin{pmatrix}\hat{\mathbf{E}}\\ \hat{\mathbf{H}}\end{pmatrix}=\mathbf{M}(\partial_1,\partial_2,\partial_z)\begin{pmatrix}\mathbf{E}\\ \mathbf{H}\end{pmatrix}$$
$$+\mathbf{M}(n_1,n_2,n_z)\left[\begin{pmatrix}\mathbf{E}\\ \mathbf{H}\end{pmatrix}\right]_F\delta_F(x_2,z)$$
$$=\hat{\mathbf{j}}(x,z)+\mathbf{M}(n_1,n_2,n_z)\left[\begin{pmatrix}\mathbf{E}(x,z)\\ \mathbf{H}(x,z)\end{pmatrix}\right]_F\delta_F(x_2,z), \qquad (26)$$

где

$$M(n_1,n_2,n_z)=$$
$$\begin{pmatrix}0 & -n_z & n_2 & V\mu\mu_0 n_z & 0 & 0\\ n_z & 0 & -n_1 & 0 & V\mu\mu_0 n_z & 0\\ -n_2 & n_1 & 0 & 0 & 0 & V\mu\mu_0 n_z\\ -V\varepsilon\varepsilon_0 n_z & 0 & 0 & 0 & -n_z & n_2\\ 0 & -V\varepsilon\varepsilon_0 n_z & 0 & n_z & 0 & -n_1\\ 0 & 0 & -V\varepsilon\varepsilon_0 n_z & -n_2 & n_1 & 0\end{pmatrix}.$$

Здесь шапочка сверху обозначает обобщенную вектор-функцию. Используя свойство дифференцирования разрывных регулярных функций в $D'(R^3)$, получим правую часть (26), в которой стоит простой слой на поверхности F — фронте ударной ЭМ волны:

$$\mathbf{M}(n_1, n_2, n_z)\left[\begin{pmatrix}\mathbf{E}(x,z)\\ \mathbf{H}(x,z)\end{pmatrix}\right]_F \delta_F(x_2, z),$$

плотность которого определяется скачком векторов напряженности электрического и магнитного поля на F. Для того чтобы $\hat{\mathbf{E}}(x,z), \hat{\mathbf{H}}(x,z)$ были обобщенным решением УМ (4), необходимо, чтобы его плотность равнялась нулю:

$$\mathbf{M}(n_1, n_2, n_z)\left[\begin{pmatrix}\mathbf{E}(x,z)\\ \mathbf{H}(x,z)\end{pmatrix}\right]_F = \mathbf{0}. \tag{27}$$

Отсюда следуют условия на скачки компонент $\mathbf{E}(x,z), \mathbf{H}(x,z)$ на фронте ударной ЭМ волны:

$$\begin{aligned}
-n_z[E_2] + n_2[E_3] + V\mu\mu_0 n_z[H_1] &= 0,\\
-V\epsilon\epsilon_0 n_z[E_1] - n_z[H_2] + n_2[H_z] &= 0,\\
n_z[E_1] - n_1[E_3] + V\mu\mu_0 n_z[H_2] &= 0,\\
-V\epsilon\epsilon_0 n_z[E_2] + n_z[H_1] - n_1[H_z] &= 0,\\
-n_2[E_1] + n_1[E_2] + V\mu\mu_0 n_z[H_3] &= 0,\\
-V\epsilon\epsilon_0 n_z[E_3] - n_2[H_1] + n_1[H_2] &= 0.
\end{aligned} \tag{28}$$

Уравнения (28) удобно представить в векторном виде:

$$\begin{aligned}
V\mu\mu_0[\mathbf{H}(x,z)] &= [[\mathbf{E}]_F, \mathbf{n}(x,z)],\\
V\epsilon\epsilon_0[\mathbf{E}(x,z)]_F &= [[\mathbf{H}]_F, \mathbf{n}(x,z)],
\end{aligned} \tag{29}$$

где справа в уравнениях стоят векторные произведения скачка вектора напряженности на фронте волны на нормаль к фронту. Отсюда следует, что скачки напряженности электрического поля и магнитного поля ортогональны друг другу и ортогональны нормали к фронту волны. Если перед фронтом волны среда невозмущена, то из (29) следует:

$$\begin{aligned}
V\mu\mu_0\,\mathbf{H}(x,z)|_F &= [\mathbf{E}_F, \mathbf{n}(x,z)],\\
V\epsilon\epsilon_0\,\mathbf{E}(x,z)|_F &= [\mathbf{H}_F, \mathbf{n}(x,z)].
\end{aligned} \tag{30}$$

Здесь $\mathbf{E}(x,z)|_F = \mathbf{E}_F$, $\mathbf{H}_F = \mathbf{H}(x,z)|_F$ — значение напряженностей на фронте ударной ЭМ волны.

Как следует из этих соотношений, ударные ЭМ волны являются поперечными и вектора электрической и магнитной напряженности на фронте ударной волны ортогональны друг другу и лежат в касательном расслоении к нему.

Этот факт хорошо известен для фазовых поверхностей электрической и магнитной напряженности ЭМ волн [1–7]. Для разрывных решений УМ, которые описывают ударные ЭМ волны, это показано нами в [20]. Здесь это свойство ЭМ волн доказано для сверхзвуковых транспортных решений уравнений УМ.

6. Тензор Грина при световой скорости движения источника излучения

При $V = c$, $M = 1$. В формулах (9) $m = 0$. Преобразование Фурье базисной функции

$$f(k_1, k_2, k_3) = \frac{1}{k_1^2 + k_2^2} \tag{31}$$

является преобразованием Фурье фундаментального решения уравнения Лапласа:

$$\frac{\partial^2 f_0}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 f_0}{\partial x_2^2} = \delta(x)\delta(z). \tag{32}$$

Его решение имеет вид

$$f_0(x_1, x_2, z) = -\frac{\ln r}{2\pi}\delta(z), \tag{33}$$

$$f_1(x_1, x_2, z) = f_0(x_1, x_2, z)_z * H(z) = -\frac{1}{2\pi}H(z)\ln r. \tag{34}$$

Заметим, что носителем этих функций является полупространство: $z > 0$ — вне которого $\mathbf{U}(x_1, x_2, z) = 0$. Т.е. плоскость $z = 0$ является фронтом ударной электромагнитной волны, на котором компоненты тензора Грина разрывны. Решение УМ будут иметь аналогичный вид (20), (23) и (24), только в качестве базисных функций следует взять функции (33), (34). Условия на фронте ударной волны излучателя имеют вид (29), где $V = \frac{1}{\sqrt{\mu\mu_0\varepsilon\varepsilon_0}}$.

Заключение

В работе [15] и в настоящей работе построены транспортные решения УМ во всем диапазоне скоростей, от досветовых до сверхсветовых, которые позволяют рассчитывать ЭМ поля от излучателей произвольных форм, которые можно моделировать с помощью как регулярных, так и сингулярных функций, как в отсутствии магнитных токов, так и при их наличии. Возникает вопрос, когда и где следует использовать сверхсветовые транспортные решения УМ.

Известно, что заряженные частицы, которые движутся в жидкой среде со скоростью выше скорости света в этой среде, вызывают конусообразное свечение, которое получило название *излучение Вавилова–Черенкова*, или просто *черенковское излучение* [8,21–24]. Опыты Черенкова наглядно демонстрирует наличие таких ударных волн [21]. Конус Черенкова — это и есть фронт ударной волны, который является огибающей конусов Маха на ее фронте.

Для математического описания этого явления использовались гармонические волны, фазовая скорость которых превышала световую скорость в рассматриваемой ЭМ среде (см. [8]). Построенные здесь решения позволяют описать этот эффект для любых сверхсветовых излучателей, а наличие черенковского излучения уже говорит о том, что полученные в работе решения можно использовать для исследования ЭМ полей в самых разных средах, и не только в жидких, но и в телах и тканях при лазерном и других видах облучения.

Черенковское излучение используется в атомной промышленности [24], где представленные здесь исследования могут стать очень полезными для использования.

Отметим также, что полученные решения можно использовать для решения дифракционных краевых задач в ЭМ средах, ограниченных цилиндрическими поверхностями и оболочками. Ранее такой класс дозвуковых и сверхзвуковых транспортных краевых задач для изотропной упругой среды нами рассмотрен и опубликован в [25–27]. Предполагаем подобный класс транспортных краевых задач в цилиндрических областях рассмотреть и для ЭМ сред. Эти работы уже ведутся нами в рамках указанного грантового проекта.

Финансирование работы

Работа выполнена при финансовой поддержке Комитета Науки Министерства Науки и Высшего образования Республики Казахстан (грант AP19674789, 2023-2025).

Конфликт интересов

Авторы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

Список литературы

[1] Дж.К. Максвелл. *Трактат об электричестве и магнетизме* (Наука, М., 1989), т. 1,2.
[2] Дж. Джексон. *Классическая электродинамика* (Мир, М. 1965)
[3] И.И. Тамм. *Основы теории электричества* (Наука, М. 1976)
[4] Р. Фейнман, Р. Лейтон, М. Сэндс. *Фейнмановские лекции по физике. Электричество и магнетизм* (Мир, М., 1965), т. 5.
[5] Р. Фейнман, Р. Лейтон, М. Сэндс. *Фейнмановские лекции по физике. Электродинамика* (Мир, М., 1966), т. 6.
[6] Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. *Теория поля. Теоретическая физика* (Физматлит, М., 2003), т. 2.
[7] И.В. Савельев. *Курс общей физики. Электричество* (Наука, М., 1970), т. 2.
[8] В.Л. Гинзбург, В.Н. Цитович. *Переходное излучение и переходное рассеяние* (Наука, М., 1984)
[9] J. Heras. Phys. Lett., **237** (6), 343 (1998). https://doi.org/10.1016/s0375-9601(98)00734-8
[10] A. Heras. Am. J. Phys., **62** (12), 11091115 (1994). https://doi.org/10.1119/1.17759
[11] J.A. Heras. Phys. Lett., A, **249** (1), 1 (1998). https://doi.org/10.1016/S0375-9601(98)00712-9
[12] O. Dushek, S.V. Kuzmin. Europ. J. Phys., **25** (3), (2004). DOI: 10.1088/0143-0807/25/3/001
[13] V. Hnizdo. Eur. J. Phys., **25**, 351 (2004). DOI: 10.1088/0143-0807/25/3/002
[14] S.S. Sautbekov, K.N. Baysalova, Y.K. Sirenko. AIP Advances **11**, 105012 (2021).
[15] Л.А. Алексеева, И.А. Канымгазиева. ЖТФ, **94** (4), 539 (2024). DOI: 10.61011/JTF.2024.04.57523.174-23
[16] В.С. Владимиров. *Уравнения математической физики* (Наука, М., 1981)
[17] В.С. Владимиров. *Обобщенные функции в математической физике* (Наука, М., 1979)
[18] Л.А. Алексеева. Математический журнал, **6** (1), 16 (2006).
[19] L.A. Alexeyeva. *Boundary integral equations of nonstationary BVP for wave equations* Book of abstracts. Int. Congress of Mathematicians (Madrid, 2006), p. 436.
[20] L.A. Alexeyeva. Comp. Mathem. Mathem. Phys., **42** (1), 75 (2002).
[21] П.А. Черенков. УФН, **93**, 385 (1967).
[22] И.Е. Тамм, И.М. Франк. ДАН СССР, **14** (e3), 107 (1937).
[23] Дж. Джелли. *Черенковское излучение* (ИЛ, М., 1960)
[24] В.П. Зрелов. *Излучение Вавилова–Черенкова и его применение в физике высоких энергий* (Атомиздат, М., 1968)
[25] Л.А. Алексеева. Дифференциальные уравнения, **46** (4), 512 (2010).
[26] Л.А. Алексеева. Дифференциальные уравнения, **53** (3), 327 (2017).
[27] L.A. Alexeyeva. *General Functions Method in Transport Boundary Value Problems of Elasticity Theory* / Intech Open. In the Book Differential equations. Theory and current researches. Ch. 8, 129 (2018).