13

Динамическая сила Казимира–Полдера при релятивистском движении атома вблизи поверхности толстой пластины

© Г.В. Дедков, А.А. Кясов

Кабардино-Балкарский государственный университет,
Нальчик, Россия

E-mail: gv_dedkov@mail.ru

(Поступила в Редакцию 4 октября 2011 г.)

Рассчитывается динамическая сила Казимира–Полдера между нейтральным атомом (в основном состоянии) и толстой пластиной при релятивистском движении атома параллельно поверхности. Материальные свойства учитываются в рамках осцилляторной модели атома и диэлектрической функции Друде для пластины. Рассмотрены предельные случаи нерелятивистской скорости и идеально проводящего материала пластины. Обнаружена сложная зависимость силы от скорости (энергии), расстояния и материальных свойств поверхности.

1. Введение

Силой Казимира–Полдера обычно называют силу статического взаимодействия немагнитного атома, находящегося в основном состоянии, с поверхностью толстой металлической пластины (полупространства, ограниченного плоской поверхностью) на расстояниях z_0, удовлетворяющих условию сильного запаздывания флуктуационно-электромагнитного взаимодействия $\lambda_0 = \omega_0 z_0/c \gg 1$, где ω_0 — характерная частота в спектре поглощения атома. Предполагается также, что система имеет нулевую температуру. В этом случае сила взаимодействия не зависит от материальных свойств пластины и оказывается равной $F_z = -\frac{3}{2\pi}\frac{\hbar\alpha(0)c}{z_0^5}$ [1], где $\alpha(0)$ статическая поляризуемость атома, а отрицательный знак свидетельствует о притяжении атома к поверхности. В работе Казимира и Полдера [1] показано, что сила F_z обусловлена нулевыми флуктуациями электромагнитного поля. В другом предельном случае — $\lambda_0 = \omega_0 z_0/c \ll 1$ (в отсутствие запаздывания) — сила взаимодействия определяется выражением $F_z = -\frac{3\hbar\alpha(0)\tilde{\omega}_0}{8z_0^4}$, где $\tilde{\omega}_0 = \omega_0$ для идеально проводящей пластины. Зависимость $F_z \propto z_0^{-4}$ характеризует силу Ван-дер-Ваальса. При учете материальных свойств пластины общее выражение для силы Казимира–Полдера–Ван-дер-Ваальса обычно получают из формулы Лифшица [2] для флуктуационно-электромагнитного взаимодействия двух плоскопараллельных пластин, разделенных вакуумной щелью. Для этого делается предельный переход к разреженной среде для вещества одной из пластин [3]. В недавних обзорных работах [4–6] рассмотрены последние достижения теории и эксперимента в области сил Казимира для различной геометрии взаимодействующих тел.

Несмотря на фундаментальный характер проблемы, до последнего времени практически все расчеты сил Казимира–Полдера проводились в статическом приближении, когда атом покоится. Первый расчет динамической силы Ван-дер-Ваальса при движении атома параллельно поверхности был сделан в работе [7] в предположении $V \ll c$ (где V — скорость атома), а при релятивистской скорости атома — в работе [8]. В обеих работах переход от статики к динамике осуществлялся введением доплеровского частотного сдвига в выражение для поляризуемости движущейся частицы, что в общем случае некорректно [9,10]. Целью настоящей работы является последовательный релятивистский расчет динамической силы Казимира–Полдера, базирующийся на общей теории флуктуационно-электромагнитного взаимодействия при движении малой частицы вблизи поверхности, учитывающей материальные свойства [11]. Таким образом, результаты данной работы являются естественным обобщением наших недавних расчетов нерелятивистской динамической силы Ван-дер-Ваальса [10].

2. Общие теоретические соотношения

Рассмотрим случай адиабатического движения малой нейтральной частицы (атома) с постоянной скоростью V в вакууме параллельно поверхности пластины (рис. 1). Частица характеризуется дипольной электрической $\alpha_e(\omega)$ и (или) магнитной $\alpha_m(\omega)$ поляризуемостями,

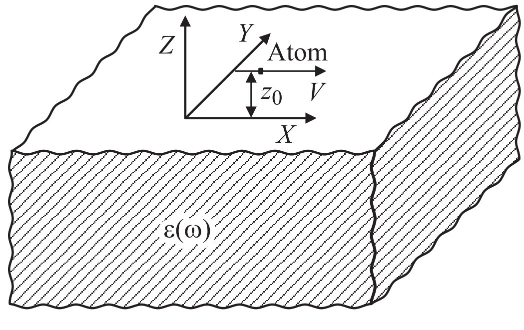

Рис. 1. Схема взаимодействия атома с поверхностью.

зависящими от частоты ω, а пластина — диэлектричекой $\varepsilon(\omega)$ и магнитной $\mu(\omega)$ проницаемостями. Температура частицы принимается равной T_1, а температура пластины и окружающего вакуумного фона — T_2. Система в целом предполагается стационарной, хотя глобальное тепловое равновесие отсутствует. Исходным выражением для силы флуктуационно-электромагнитного взаимодействия частицы с пластиной является

$$\mathbf{F} = \left\langle \int \left(\rho\mathbf{E} + \frac{1}{c}\mathbf{j}\times\mathbf{B}\right) d^3r \right\rangle, \tag{1}$$

где ρ и $\mathbf{j}$ — локальные плотность заряда и электрического тока в объеме частицы; $\mathbf{E}$, $\mathbf{B}$ — векторы флуктуационного электромагнитного поля, удовлетворяющие уравнениям Максвелла и необходимым граничным условиям на поверхности пластины; угловые скобки означают полное квантово-статистическое усреднение. В рассматриваемом далее дипольном приближении формула (1) приводится к виду [11]

$$F_z = \left\langle \nabla_z \left(\mathbf{d}^{\mathrm{sp}}\mathbf{E}^{\mathrm{ind}} + \mathbf{d}^{\mathrm{ind}}\mathbf{E}^{\mathrm{sp}} + \mathbf{m}^{\mathrm{sp}}\mathbf{B}^{\mathrm{ind}} + \mathbf{m}^{\mathrm{ind}}\mathbf{B}^{\mathrm{sp}}\right)\right\rangle, \tag{2}$$

где индексы sp и ind обозначают спонтанные и индуцированные компоненты поля и дипольных моментов частицы. Дальнейшие преобразования (2) делаются без каких-либо дополнительных упрощений и приводят к выражению [11]

$$F_z = -\frac{\hbar\gamma}{2\pi^2}\int_0^\infty d\omega \int_{-\infty}^{+\infty} dk_x \int_{-\infty}^{+\infty} dk_y \Bigg\{\alpha_e''(\gamma\omega^+)\mathrm{Re}$$

$$\times\,[\exp(-2q_0z)R_e(\omega,\mathbf{k})]\coth\left(\frac{\gamma\hbar\omega^+}{2k_{\mathrm{B}}T_1}\right) + \alpha_e'(\gamma\omega^+)$$

$$\times\,\mathrm{Im}[\exp(-2q_0z)R_e(\omega,\mathbf{k})]\coth\left(\frac{\hbar\omega}{2k_{\mathrm{B}}T_2}\right) + (e\leftrightarrow m)\Bigg\}, \tag{3}$$

$$R_e(\omega,\mathbf{k}) = \Delta_e(\omega)\Big[2(k^2 - k_x^2\beta^2)(1-\omega^2/k^2c^2) + (\omega^+)^2/c^2\Big]$$

$$+\,\Delta_m(\omega)[2k_y^2\beta^2(1-\omega^2/k^2c^2) + (\omega^+)^2/c^2], \tag{4}$$

$$R_m(\omega,\mathbf{k}) = \Delta_m(\omega)\Big[2(k^2 - k_x^2\beta^2)(1-\omega^2/k^2c^2) + (\omega^+)^2/c^2\Big]$$

$$+\,\Delta_e(\omega)[2k_y^2\beta^2(1-\omega^2/k^2c^2) + (\omega^+)^2/c^2], \tag{5}$$

$$\Delta_e(\omega) = \frac{q_0\varepsilon(\omega) - q}{q_0\varepsilon(\omega+q)}, \qquad \Delta_m(\omega) = \frac{q_0\mu(\omega) - q}{q_0\mu(\omega)+q},$$

$$q = \left(k^2 - (\omega^2/c^2)\varepsilon(\omega)\mu(\omega)\right)^{1/2},$$

$$q_0 = (k^2 - \omega^2/c^2)^{1/2}, \quad k^2 = k_x^2 + k_y^2, \quad \omega^+ = \omega + k_xV; \tag{6}$$

где слагаемое $(e\leftrightarrow m)$ в фигурных скобках (3) получается путем соответствующей замены индексов в первых двух слагаемых. Учет его соответствует наличию магнитной поляризуемости у частицы. Далее нас будет интересовать случай немагнитной частицы и поверхности, поэтому $\alpha_m(\omega) = 0$, $\mu(\omega) = 1$, а индекс e у поляризуемости частицы опускается. Кроме того, будем рассматривать случай $T_1 = T_2 = 0$. Действуя аналогично [10] и используя предельный переход, выражаемый соотношениями

$$\lim\nolimits_{T_1\to 0}\coth\frac{\hbar(\omega + k_xV)}{2kT_1} = \mathrm{sign}(\omega + k_xV),$$

$$\lim\nolimits_{T_2\to 0}\coth\frac{\hbar\omega}{2kT_2} = \mathrm{sign}\omega,$$

перепишем (3) в виде суммы двух слагаемых, из которых первое представляется в виде интеграла по мнимым частотам, а второе — в виде интеграла по действительным частотам:

$$F_z = F_z^{(0)} + F_z^{(1)}, \tag{7}$$

$$F_z^{(0)} = -\frac{\hbar\gamma}{2\pi^2}\int_{-\infty}^{+\infty} dk_x \int_{-\infty}^{+\infty} dk_y$$

$$\times\,\mathrm{Im}\Bigg\{\int_0^\infty d\xi \exp\left(-2\sqrt{k^2+\xi^2/c^2}z_0\right)\alpha\left(\gamma(i\xi + k_xV)\right)$$

$$\times\left[iR_e^{(1)}(i\xi,k) - 2\beta k_x\frac{\xi}{c}\left(\Delta_e(i\xi)\right) + \Delta_m(i\xi)\right]\Bigg\}, \tag{8}$$

$$F_z^{(1)} = \frac{2\hbar\gamma}{\pi^2}\int_0^\infty dk_x \int_0^\infty dk_y \int_0^{k_xV} d\omega\alpha''\left(\gamma(\omega - k_xV)\right)$$

$$\times\,\mathrm{Re}\Bigg\{\exp\left(-2\sqrt{k^2-\omega^2/c^2}z_0\right)$$

$$\times\left[R_e^{(1)}(\omega,k) - 2\beta k_x\frac{\omega}{c}\Big(\Delta_e(\omega) + \Delta_m(\omega)\Big)\right]\Bigg\}, \tag{9}$$

$$R_e^{(1)}(i\xi,k) = \Delta_e(i\xi)(2k^2 + \xi^2/c^2)$$

$$+\,\Delta_m(i\xi)[2\beta^2(k^2+\xi^2/c^2) - \xi^2/c^2]$$

$$-\,\beta^2[\Delta_e(i\xi) + \Delta_m(i\xi)](k^2 + 2\xi^2/c^2)\cos^2\theta, \tag{10}$$

$$R_e^{(1)}(\omega,k) = (\omega^2/c^2 + k^2\beta^2\cos^2\theta)$$

$$\times\,[\Delta_e(\omega) + \Delta_m(\omega)] + 2(k^2 - \omega^2/c^2)$$

$$\times\left[(1-\beta^2\cos^2\theta)\Delta_c(\omega) + \Delta_m(\omega)\beta^2\sin^2\theta\right], \tag{11}$$

где $\cos\theta = k_x/k$, $\beta = V/c$, $\gamma = (1-\beta^2)^{-1/2}$.

Чтобы продвинуться дальше, используем осцилляторную модель атомной поляризуемости

$$\alpha(\gamma\omega) = \frac{\alpha(0)\tilde{\omega}_0^2}{\tilde{\omega}_0^2 - \omega^2 - i0\omega}, \qquad \tilde{\omega}_0 = \omega_0/\gamma, \tag{12}$$

$$\alpha''(\gamma\omega) = \frac{\pi\alpha(0)\tilde{\omega}_0}{2}\left[\delta(\omega - \tilde{\omega}_0) - \delta(\omega + \tilde{\omega}_0)\right], \tag{13}$$

где ω_0 — частота атомного перехода. Подставляя (12), (13) в (8), (9), получим

$$F_z^0 = -\frac{1}{2\pi^2}\hbar\alpha(0)\tilde{\omega}_0^2\gamma \int\limits_{-\infty}^{+\infty} dk_x \int\limits_{-\infty}^{+\infty} dk_y \int\limits_0^{\infty} d\xi \times \frac{\exp\left(-2\sqrt{k^2+\xi^2/c^2 z_0}\right)}{\left[(\tilde{\omega}_0^+)^2+\xi^2\right]\left[(\tilde{\omega}_0^-)^2+\xi^2\right]}\Big[R_e^{(1)}(i\xi,k)(\tilde{\omega}_0^+\tilde{\omega}_0^- + \xi^2) - 4\beta^2 k_x^2\xi^2\left(\Delta_e(i\xi)+\Delta_m(i\xi)\right)\Big], \tag{14}$$

$$F_z^{(1)} = -\frac{1}{\pi}\hbar\alpha(0)\omega_0 \int\limits_{\tilde{\omega}_0/V}^{\infty} dk_x \int\limits_0^{\infty} dk_y \times \mathrm{Re}\Big\{\exp\Big(-2\sqrt{k^2-(\tilde{\omega}_0^-)^2/c^2}z_0\Big)\Big[R_e^{(1)}(-\tilde{\omega}_0^-,k) + 2k_x\beta(\tilde{\omega}_0^-/c)\left(\Delta_e(-\tilde{\omega}_0^-)+\Delta_m(-\tilde{\omega}_0^-)\right)\Big]\Big\}, \tag{15}$$

где $\tilde{\omega}_0^{\pm} = \tilde{\omega}_0 \pm k_x V = \tilde{\omega}_0 \pm kV\cos\theta$. Используя формулы (14), (15), рассмотрим несколько практически важных случаев.

2.1. Нерелятивистское движение атома при отсутствии запаздывания. В пределе $c \to \infty$ сумма выражений (14), (15) приводится к виду

$$F_z = -\frac{\hbar}{\pi^2}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} dk_x \int\limits_{-\infty}^{+\infty} dk_y k^2 \exp(-2kz_0) \times \mathrm{Im}\left[i\int\limits_0^{\infty} d\xi\Delta(i\xi)\alpha(i\xi + k_x V)\right] + \frac{4\hbar}{\pi^2}\int\limits_0^{\infty} dk_x \times \int\limits_0^{\infty} dk_y k^2\exp(-2kz_0)\int\limits_0^{k_x V} d\omega\Delta'(\omega)\alpha''(\omega - k_x V), \tag{16}$$

где $\Delta(\omega) = \left(\varepsilon(\omega)-1\right)/\left(\varepsilon(\omega)+1\right)$. Учитывая соотношение $F_z = -\partial U/\partial z$, в котором $U(z)$ представляет энергию ван-дер-ваальсова взаимодействия движущегося атома с пластиной, нетрудно убедиться, что формула (16) полностью согласуется с нерелятивистским выражением для $U(z)$ [10].

Переходя в (16) к безразмерным переменным $x = 2z_0k_x$, $y = 2z_0k_y$, $p = \xi/\omega_0$ и интегрируя по y, получим

$$F_z = \frac{\hbar\alpha(0)\omega_0}{4\pi^2 z_0^4}\int\limits_0^{\infty} dx\, x^3\frac{d^3K_0(x)}{dx^3}\int\limits_0^{\infty} dp\left[\frac{\varepsilon(ip\omega_0)-1}{\varepsilon(ip\omega_0)+1}\right] \times \frac{(1+p^2-q^2x^2)}{(1+p^2-q^2x^2)^2+4p^2q^2x^2} + \frac{\hbar\alpha(0)\omega_0}{8\pi z_0^4}\int\limits_{1/q}^{\infty} dx\, x^3 \times \frac{d^3K_0(x)}{dx^3}\mathrm{Re}\left[\frac{\varepsilon\left(\omega_0(qx-1)\right)-1}{\varepsilon\left(\omega_0(qx-1)\right)+1}\right], \quad q = V/2\omega_0 z_0, \tag{17}$$

где $K_0(x)$ — функция Макдональда. Отметим полезное для дальнейшего рассмотрения соотношение

$$-d^3K_0(x)/dx^3 = (1+2/x^2)K_1(x) + K_0(x)/x. \tag{18}$$

Весьма компактное выражение для силы F_z получается в случае плазменной модели диэлектрической проницаемости пластины $\varepsilon(\omega) = 1 - \omega_p^2/\omega^2$ (ω_p — плазменная частота). Тогда внутренний интеграл в первом слагаемом вычисляется точно (см. [10]), а формула (17) приводится к виду

$$F_z = \frac{\hbar\omega_s\alpha(0)}{8\pi z_0^4}\int\limits_0^{\infty} x^3\frac{d^3K_0(x)}{dx^3} \times \left[\frac{(1+\eta)\theta(1-qx)}{(1+\eta)^2-q^2x^2} + \frac{\theta(qx-1)}{[1-(\eta+qx)^2]}\right]dx + \frac{h\omega_0\alpha(0)}{8\pi z_0^4}\eta^2\int\limits_{1/q}^{\infty}\frac{d^3K_0(x)}{dx^3}\frac{x^3}{\eta^2-(1-qx)^2}dx,$$

$$\eta = \omega_s/\omega_0, \qquad \omega_s = \omega_p/\sqrt{2}. \tag{19}$$

Случай конечной величины параметра η детально рассмотрен в [10]. Для идеально проводящей металлической пластины $\eta \to \infty$, тогда (19) принимает вид

$$F_z = -\frac{3\hbar\omega_0\alpha(0)}{8z_0^4} - \frac{\hbar\omega_0\alpha(0)}{8\pi z_0^4}\int\limits_{1/q}^{\infty} dx\, x^3\left(-\frac{d^3K_0(x)}{dx^3}\right).$$

При $q \gg 1$, т.е. когда $z_0 \ll V/2\omega_0$ (что соответствует малым расстояниям, поскольку $V \ll c$), интеграл в (20) равен 3π и результирующая величина F_z получается вдвое больше первого слагаемого (20)

$$F_z \cong -\frac{3\hbar\omega_0\alpha(0)}{4z_0^4}, \qquad z_0 \ll V/2\omega_0. \tag{21}$$

В противоположном случае (при $q \ll 1$), используя асимптотику

$$K_0(x) \cong \sqrt{\pi/2x}\exp(-x), \tag{22}$$

из (20) находим

$$F_z \cong -\frac{3\hbar\omega_0\alpha(0)}{8z_0^4} - \frac{3\hbar\omega_0\alpha(0)}{2\sqrt{\pi}z_0^4}\left(\frac{\omega_0 z_0}{V}\right)^{5/2} \times \exp(-2\omega_0 z_0/V), \qquad z_0 \gg V/2\omega_0. \quad (23)$$

Именно второе слагаемое в (23) отвечает за немонотонную зависимость динамической силы Ван-дер-Ваальса от расстояния.

2.2. Идеально проводящая металлическая пластина. В случае идеально проводящей пластины, когда $\varepsilon(\omega) \to \infty$, из (6) следует $\Delta_e(\omega) = 1$, $\Delta_m(\omega) = -1$ и формулы (14), (15) приводятся к виду

$$F_z^{(0)} = -\frac{\hbar}{\pi^2\gamma}\int_{-\infty}^{+\infty} dk_x \int_{-\infty}^{+\infty} dk_y \int_0^{\infty} d\xi (k^2 + \xi^2/c^2) \times \exp(-2\sqrt{k^2+\xi^2/c^2}z_0)\mathrm{Im}\left[i\alpha\big(\gamma(i\xi + k_xV)\big)\right], \quad (24)$$

$$F_z^{(1)} = \frac{4\hbar}{\pi^2\gamma}\int_0^{\infty} dk_x \int_0^{\infty} dk_y \int_0^{\infty} d\omega\alpha''\big(\gamma(\omega - k_xV)\big) \times \mathrm{Re}\left[(k^2 - \omega^2/c^2)\exp(-2\sqrt{k^2-\omega^2/c^2}z_0)\right]. \quad (25)$$

Подставляя (12), (13) в (24), (25) и используя обозначения $\lambda = 2\tilde{\omega}_0 z_0/c = 2\omega_0 z_0/\gamma c \equiv \lambda_0/\gamma$, получим

$$F_z^{(0)} = \frac{4\hbar\alpha(0)\omega_0^5}{\pi^2c^4\gamma^6}\int_0^{\infty} dx \int_0^{\infty} dy \times \frac{(1-\beta^2x^2+y^2)(x^2+y^2)^{3/2}}{[(1+\beta x)^2+y^2]\,[(1-\beta x)^2+y^2]}\left[\frac{d^3K_0(t)}{dt^3}\right]_{t=\lambda\sqrt{x^2+y^2}}, \quad (26)$$

$$F_z^{(1)} = \frac{\hbar\omega_0\alpha(0)}{8\pi z_0^4\gamma}\int_{\lambda/\beta}^{\infty}\frac{dx x^4}{\sqrt{\lambda_0^2+x^2}}\frac{d^3K_0(x)}{dx^3}. \quad (27)$$

Формула (26) дополнительно упрощается в предельных случаях $\beta \to 0$ и $\beta \to 1$, если перейти к полярным координатам $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$. Разлагая зависящую от x, y часть подынтегральной функции (26) в ряд по малым параметрам β и $(1-\beta) \approx 1/2\gamma^2$, имеем

$$A(x,y) = A(r,\theta) \equiv \frac{1-\beta^2x^2+y^2}{[(1+\beta x)^2+y^2]\,[(1-\beta x)^2+y^2]}$$

$$= \frac{1-\beta^2r^2\cos^2\theta+r^2\sin^2\theta}{\left[(1+\beta r\cos\vartheta)^2+r^2\sin^2\theta\right]^2\left[(1-\beta r\cos\vartheta)^2+r^2\sin^2\theta\right]^2}$$

$$= \begin{cases} \dfrac{1}{1+r^2\sin^2\theta} - \dfrac{r^2\cos^2\theta(3r^2-\sin^2\theta-1)}{(1+r^2\sin^2\theta)^3}\beta^2, & \beta \ll 1, \\ \dfrac{1-r^2\cos 2\theta}{(1+r^2)^2-4r^2\cos^2\theta} - \dfrac{1}{\gamma^2} \times \dfrac{r^2\cos^2\theta(1-2r^2-r^4+2r^4\cos 2\theta)}{\big((1+r^2)^2-4r^2\cos^2\theta\big)^2}, & \gamma \gg 1. \end{cases} \quad (28)$$

Подставляя (28) в (26) и учитывая угловые интегралы ($\theta(x)$ — единичная функция Хевисайда),

$$\int_0^{\pi/2} A(r,\theta)d\theta = \begin{cases} \frac{\pi}{2\sqrt{1+r^2}} + \frac{\pi r^2}{4(1+r^2)^{3/2}}\beta^2, & \beta \ll 1\,(\gamma \to 1), \\ \frac{\pi}{2}\,\theta(1-r)(1-r^2/2\gamma^2), & \gamma \gg 1(\beta \to 1), \end{cases} \quad (29)$$

преобразуем (26) к виду

$$F_z^{(0)} \cong \begin{cases} \dfrac{\hbar\omega_0\alpha(0)}{8\pi z_0^4}\displaystyle\int_0^{\infty} dx \frac{x^4}{\sqrt{\lambda^2+x^2}}\frac{d^3K_0(x)}{dx^3} \times \left[1 - \dfrac{(x^2+2\lambda^2)\beta^2}{2(\lambda^2+x^2)}\right], & \beta \ll 1, \\ \dfrac{\hbar c\alpha(0)}{16\pi z_0^5\gamma}\displaystyle\int_0^{\lambda} dx x^4 \frac{d^3K_0(x)}{dx^3}(1-x^2/2\lambda_0^2), & \gamma \gg 1. \end{cases} \quad (30)$$

Из (27), (30) нетрудно получить асимптотические выражения для F_z при различных соотношениях между параметрами λ_0, β и γ. Соответствующие асимптотики, нормированные на величину $\hbar\omega_0\alpha(0)/z_0^4$, приведены в таблице.

Можно констатировать полное согласие между формулой (21) и формулами 1, 5 таблицы при $\beta \ll 1$, $\lambda_0 \ll 1$, за исключением релятивистской поправки $\sim \beta^2$. В случае больших расстояний $z_0 \gg V/2\omega_0$, что эквивалентно условиям $\lambda_0 \gg 1$, $\beta \ll 1$; первый член (23), соответствующий $F_z^{(0)}$, отличается от асимптотической величины, приведенной в таблице (формула 2), описывающей динамическую силу Казимира–Полдера с учетом динамической поправки

$$F_z^{(0)} = -\frac{3}{2\pi}\frac{\hbar c\alpha(0)}{z_0^5}(1-\beta^2/2), \qquad z_0 \gg V/2\omega_0. \quad (31)$$

Это неудивительно, поскольку в рассматриваемом диапазоне расстояний становятся существенными эффекты запаздывания, не учитываемые формулой (23). Динамическая поправка в (31) носит характер силы отталкивания.

Нерелятивистское выражение для $F_z^{(1)}$, соответствующее второму члену в (23), идентично формуле 6 таблицы (также за исключением опущенной там поправки порядка β^2). На рис. 2 *a* и *b* проводится сравнение нормированных значений сил, вычисленных интегрированием формул (27), (30), с асимптотическими формулами для $\beta \ll 1$ и $\gamma \gg 1$, приведенными в таблице.

2.3. Приближение Друде для материала пластины: общий случай. Представляет интерес рассмотрение вопроса о влиянии материальных свойств пластины на динамическую силу Казимира–Полдера. Будем считать, что диэлектрическая проницаемость материала пластины описывается моделью Друде с параметрами, соответствующими золоту ($\omega_p = 1.37 \cdot 10^{16}$ rad/s, Асимптотические выражения для динамической силы Казимира–Полдера

№ п/п	Значения параметров	$F_z^{(0)}$	№ п/п	Значения параметров	$F_z^{(1)}$
1	$\lambda_0 \ll 1, \beta \ll 1$	$-\frac{3}{8}\left(1-\frac{\beta^2}{2}\right)$	5	$\lambda_0 \ll \beta \ll 1$	$-\frac{3}{8}\left(1-\frac{\beta^2}{2}\right)$
2	$\lambda_0 \gg 1, \beta \ll 1$	$-\frac{3}{\pi\lambda_0}\left(1-\frac{\beta^2}{2}\right)$	6	$\beta \ll \lambda_0 \ll 1$	$-\frac{1}{8\sqrt{2\pi}}\frac{\lambda_0^{5/2}}{\beta^{5/2}}\exp(-\lambda_0/\beta)$
3	$\lambda_0 \gg \gamma \gg 1$	$-\frac{3}{\pi}\frac{1}{\lambda_0\gamma}\left(1-\frac{10}{\lambda_0^2}\right)$	7	$\lambda_0 \gg 1 \gg \beta$	$-\frac{1}{8\sqrt{\pi}}\frac{\lambda_0^{5/2}}{\beta^{7/2}}\exp(-\lambda_0/\beta)$
4	$\lambda_0 \ll \gamma,\ \gamma \gg 1$	$-\frac{\lambda_0}{8\pi\gamma^3}$	8	$\lambda_0 \ll 1 \ll \gamma$	$-\frac{3}{8\gamma}$
			9	$\lambda_0 \gg \gamma \gg 1$	$-\frac{1}{8\sqrt{2\pi}}\frac{\lambda_0^{5/2}}{\gamma^{9/2}\beta^{7/2}}\exp(-\lambda_0/\gamma\beta)$
			10	$1 \ll \lambda_0 \ll \gamma$	$-\frac{3}{\pi\lambda_0\gamma}$

$\tau = 1.89 \cdot 10^{-14}$ s):

$$\varepsilon(\omega) = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega(\omega + i/\tau)}. \tag{32}$$

Формулу (14) можно привести к более простому двойному интегралу, используя полярные координаты $(k\,\theta)$ вместо $(k_x,\ k_y)$, и проводя интегрирование по θ. Это делается с использованием тождественных выражений $(a \equiv kV\cos\theta)$

$$\frac{\tilde{\omega}_0^2 + \xi^2 - a^2}{[(\tilde{\omega}_0 + a)^2 + \xi^2]\,[(\tilde{\omega}_0 - a)^2 + \xi^2]} \equiv \frac{1}{4\tilde{\omega}_0}\left[\frac{1}{\tilde{\omega}_0 + i\xi - a} + \frac{1}{\tilde{\omega}_0 - i\xi - a} + \frac{1}{\tilde{\omega}_0 + i\xi + a} + \frac{1}{\tilde{\omega}_0 - i\xi + a}\right], \tag{33}$$

$$\frac{1}{[(\tilde{\omega}_0 + a)^2 + \xi^2]\,[(\tilde{\omega}_0 - a)^2 + \xi^2]} \equiv -\frac{i}{8\xi\tilde{\omega}_0}\left[\frac{1}{(\tilde{\omega}_0 - i\xi)}\left[\frac{1}{\tilde{\omega}_0 - i\xi + a} + \frac{1}{\tilde{\omega}_0 - i\xi - a}\right] - \frac{1}{(\tilde{\omega}_0 + i\xi)}\left[\frac{1}{\tilde{\omega}_0 + i\xi + a} + \frac{1}{\tilde{\omega}_0 + i\xi - a}\right]\right]. \tag{34}$$

Учитывая (33), (34) и переходя к новым переменным интегрирования $x = \omega/\tilde{\omega}_0$, $k^2c^2/\omega^2 = u^2 + 1$, формулу (14) приводим к более удобному виду

$$F_z^{(0)} = -\frac{\hbar\omega_0\alpha(0)}{64\pi^2 z_0^4}\,\frac{1}{\lambda}\int\limits_1^\infty \frac{du}{u^4}\int\limits_0^\infty dt t^4\phi(t/\lambda u, u, \beta)\exp(-t), \tag{35}$$

$$\phi(x, u, \beta) = \sum_{n=1}^{3} A_n(x, u, \beta) Q_n(x, u, \beta), \tag{36}$$

$$A_1(x, u, \beta) = \Delta_e(u, x)\left[(2-\beta^2)(u^2-1) + (1-2\beta^2)\right] + \Delta_m(u, x)\left[\beta^2(u^2-1) - 1\right], \tag{37}$$

$$A_2(x, u, \beta) = (u^2+1)[\Delta_e(u, x) + \Delta_m(u, x)], \tag{38}$$

$$A_3(x, u, \beta) = 2i\beta^2 x(u^2-1)[\Delta_e(u, x) + \Delta_m(u, x)], \tag{39}$$

$$Q_1(x, u, \beta) = f_0(1+ix, \beta x\sqrt{u^2-1}) + f_0(1-ix, \beta x\sqrt{u^2-1}) + f_0(1+ix, -\beta x\sqrt{u^2-1}) + f_0(1-ix, -\beta x\sqrt{u^2-1}), \tag{40}$$

$$Q_2(x, u, \beta) = f_2(1+ix, \beta x\sqrt{u^2-1}) + f_2(1-ix, \beta x\sqrt{u^2-1}) + f_2(1+ix, -\beta x\sqrt{u^2-1}) + f_2(1-ix, -\beta x\sqrt{u^2-1}), \tag{41}$$

$$Q_3(x, u, \beta) = \frac{1}{(1-ix)}\Big[f_0(1-ix, \beta x\sqrt{u^2-1}) - f_2(1-ix, \beta x\sqrt{u^2-1}) + f_0(1-ix, -\beta x\sqrt{u^2-1}) - f_2(1-ix, -\beta x\sqrt{u^2-1})\Big] - \frac{1}{(1+ix)} \times \Big[f_0(1+ix, \beta x\sqrt{u^2-1}) - f_2(1+ix, \beta x\sqrt{u^2-1}) + f_0(1+ix, -\beta x\sqrt{u^2-1}) - f_2(1+ix, -\beta x\sqrt{u^2-1})\Big], \tag{42}$$

где $\lambda = 2\tilde{\omega}_0 z_0/c = 2\omega_0 z_0/\gamma c = \lambda_0/\gamma$, а вспомогательные функции $f_{0,2}(x, y)$ определены соотношениями

$$f_0(x,y) = \int_0^{\pi} \frac{dz}{x + y\cos z} = \frac{\pi}{\sqrt{x^2 - y^2}}$$

$$\times \chi\left[(x-y)\left(\mathrm{Re}\sqrt{x^2-y^2} - i\,\mathrm{Im}\sqrt{x^2-y^2}\right)\right], \quad (43)$$

$$f_2(x,y) = \int_0^{\pi} \frac{\sin^2 z\, dz}{x + y\cos z} = \frac{\pi x}{y^2}\left(1 - \sqrt{1 - y^2/x^2}\right), \quad (44)$$

$$\chi(x) = \begin{cases} 1, & \mathrm{Re}(x) > 0, \\ 1, & \mathrm{Re}(x) = 0,\ \mathrm{Im}(x) > 0, \\ -1, & \mathrm{Re}(x) < 0, \\ -1, & \mathrm{Re}(x) = 0,\ \mathrm{Im}(x) < 0. \end{cases} \quad (45)$$

В формулах (36)–(39) в соответствии с используемыми обозначениями коэффициенты отражения $\Delta_{e,m}(\omega)$ (см.(4)) имеют вид

$$\Delta_e(u,x) = \frac{u\varepsilon(ix) - \sqrt{u^2 + \varepsilon(ix) - 1}}{u\varepsilon(ix) + \sqrt{u^2 + \varepsilon(ix) - 1}},$$

$$\Delta_m(u,x) = \frac{u - \sqrt{u^2 + \varepsilon(ix) - 1}}{u + \sqrt{u^2 + \varepsilon(ix) - 1}}. \quad (46)$$

Отметим, что, несмотря на комплексное представление, подынтегральная функция в (35) является чисто вещественной. Формула (15), в свою очередь рационализируется с помощью замены переменных $x = 2z_0 k_x$, $y = 2z_0 k_y$:

$$F_z^{(1)} = -\frac{\hbar\omega_0\alpha(0)}{16\pi z_0^4} \int_{\lambda/\beta}^{\infty} dx \int_0^{\infty} dy$$

$$\times \mathrm{Re}\left[\exp\left(-\sqrt{x^2 + y^2 - (\lambda - \beta x)^2}\right) B(x,y,\beta,\lambda)\right], \quad (47)$$

$$B(x,y,\beta,\lambda) = \Big[2(x^2 + y^2 - \beta^2 x^2)\Delta_e(x,y,\beta,\lambda)$$

$$+ 2\beta^2 y^2 \Delta_m(x,y,\beta,\lambda)\Big]\left(1 - \frac{(\lambda - \beta x)^2}{x^2 + y^2}\right)$$

$$+ \lambda^2[\Delta_e(x,y,\beta,\lambda) + \Delta_m(x,y,\beta,\lambda)], \quad (48)$$

$$\Delta_e(x,y,\beta,\lambda) =$$

$$= \frac{\sqrt{x^2+y^2-(\lambda-\beta x)^2}\varepsilon(-\tilde{\omega}_0^-) - \sqrt{x^2+y^2-(\lambda-\beta x)^2 - \varepsilon(-\tilde{\omega}_0^-)}}{\sqrt{x^2+y^2-(\lambda-\beta x)^2}\varepsilon(-\tilde{\omega}_0^-) + \sqrt{x^2+y^2-(\lambda-\beta x)^2\varepsilon(-\tilde{\omega}_0^-)}}, \quad (49)$$

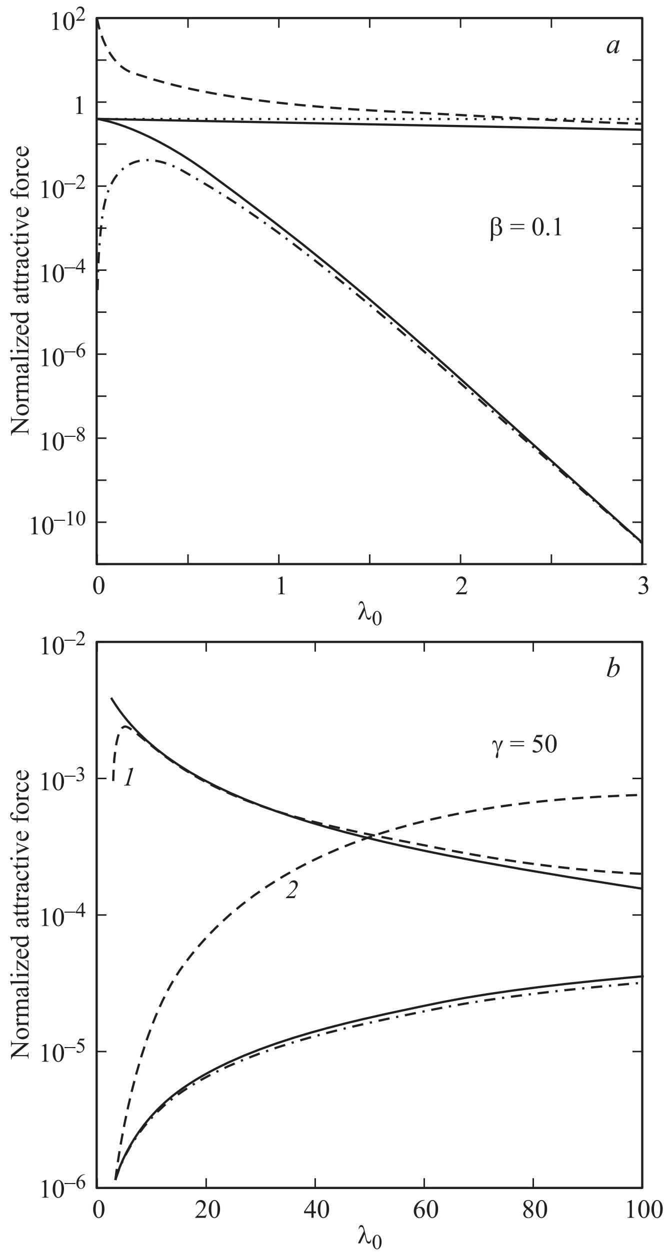

Рис. 2. Сравнение формул (27), (30) с асимптотическими выражениями из таблицы. Значения сил нормированы на величину фактора $\hbar\omega_0\alpha(0)/z_0^4$. *a*) Верхняя сплошная линия — формула (30), нижняя сплошная линия — формула (27), пунктирная линия — формула 1 таблицы, штриховая — формула 2, штрихпунктирная линия — 6; *b*) верхняя сплошная линия — формула (27), нижняя сплошная линия — формула (30), штриховая линия *1* — формула 3 таблицы, штриховая линия *2* — формула 10, штрихпунктирная линия — формула 4.

$$\Delta_m(x,y,\beta,\lambda) =$$

$$= \frac{\sqrt{x^2+y^2-(\lambda-\beta x)^2} - \sqrt{x^2+y^2-(\lambda-\beta x)^2 - \varepsilon(-\tilde{\omega}_0^-)}}{\sqrt{x^2+y^2-(\lambda-\beta x)^2} + \sqrt{x^2+y^2-(\lambda-\beta x)^2\varepsilon(-\tilde{\omega}_0^-)}}, \quad (50)$$

$$\tilde{\omega}_0^- = \tilde{\omega}_0(1 - \beta x/\lambda) = \frac{c}{2z_0}(\lambda - \beta x), \quad \beta = V/c. \quad (51)$$

Нетрудно видеть, что для идеально проводящей металлической пластины при $\Delta_e = 1$, $\Delta_m = -1$ формулы (35), (47) в точности сводятся к (24), (25). Отметим также, что использованная параметризация формул обеспечивает достаточно быструю сходимость двойных интегралов при выполнении численных расчетов, хотя и не является единственно возможной.

3. Результаты численных расчетов

Для иллюстрации результатов в качестве примера мы рассмотрели взаимодействие атомов цезия, находящихся в основном состоянии ($\alpha(0) = 57 \cdot 10^{-30} m^3$, $\omega_0 = 1.44\,\mathrm{eV}$ [12]), с пластиной золота, описываемой моделью Друде.

На рис. 3 и 4 показаны компоненты сил $F_z^{(0)}$, $F_z^{(1)}$ и их сумма, вычисленные в приближении Друде (a) и в случае идеально проводящей пластины (b). Значения сил нормированы на величину фактора $\hbar\omega_0\alpha(0)/z_0^4$ и взяты с противоположным знаком. Здесь представлены зависимости $F_z^{(1)}$, $F_z^{(0)}$ и суммарной величины $F_z^{(0)} + F_z^{(1)}$, вычисленных при $\lambda_0 = 7.5$, от β (рис. 3) и γ (рис. 4). Из этих рисунков можно сделать несколько интересных выводов: 1) появляются локальные минимум и максимум при $\gamma = 5$ и 10 (в случае Друде); 2) компонента $F_z^{(1)}$ вносит доминирующий вклад при $\gamma > 5$ независимо от используемой аппроксимации $\varepsilon(\omega)$; 3) силы, вычисленные с учетом материальных параметров по модели Друде, примерно на порядок величины выше, чем в случае идеально проводящей пластины при $\gamma > 10$. Кроме того, в первом случае сила Казимира–Полдера имеет значительно более длинный „хвост“. В противовес этому компоненты $F_z^{(0)}$ силы, вычисленные в обоих приближениях, оказываются весьма близкими (ср. пунктирные линии на рис. 3, a и b и штрихпунктирные линии на рис. 4, a и b). С уменьшением величины λ_0 (т. е. с уменьшением расстояния) точки экстремумов сдвигаются в сторону меньших значений β (рис. 5, a, $\lambda_0 = 0.75$), а затем в диапазоне скоростей $0.2 < \beta < 0.8$ образуется протяженное

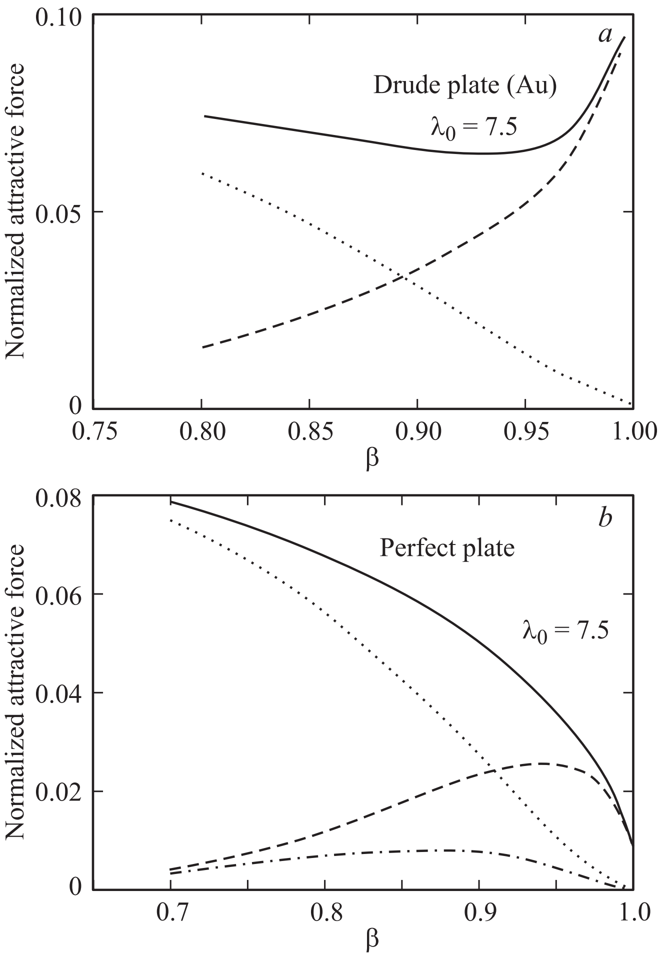

Рис. 3. Зависимость динамической силы Казимира–Полдера от скорости для взаимодействия атома Cs с пластиной Au (a) и с идеально проводящей пластиной (b). Все значения сил даны в нормированном виде аналогично рис. 2 при $\lambda_0 = 7.5$ ($z_0 = 500\,\mathrm{nm}$). Пунктирная, штриховая и сплошная линии соответствуют формулам (35), (47) и их сумме; штрихпунктирная линия на части b соответствует формуле 9 таблицы.

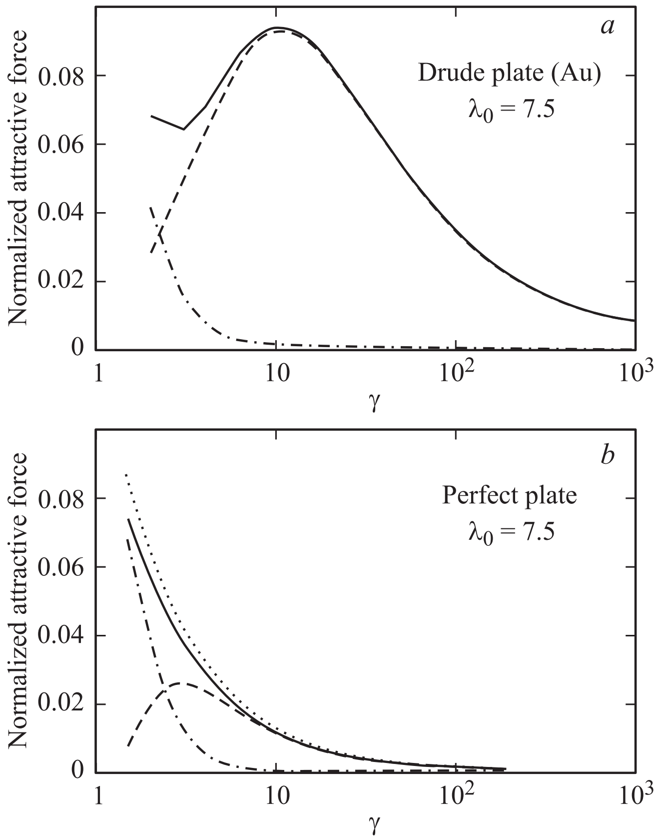

Рис. 4. Зависимость силы Казимира–Полдера от релятивистского фактора γ (атом Cs–пластина Au). Штрихпунктирные, штриховые и сплошные линии соответствуют формулам (35), (47) и их сумме; пунктирная линия на части b соответствует формуле 8 таблицы. a, b — то же, что на рис. 3.

плато ($\lambda_0 = 0.075$, рис. 5, b) и сила почти не зависит от β. При $\beta < 0.2$ (рис. 5, b) сила быстро возрастает и стремится к статическим значениям. Качественно те же особенности имели место при расчетах незапаздывающего потенциала Ван-дер-Ваальса [10]. Таким образом, немонотонная зависимость силы Казимира–Полдера от скорости полностью связана с нелинейным характером вклада $F_z^{(1)}$ и существенным влиянием материальных свойств пластины, обусловливающих сдвиг F_z в сторону больших значений β. Для идеально проводящей пластины второй фактор отсутствует, но тенденция к образованию максимума на зависимости F_z от β также имеет место (рис. 3, b). Качественно такая же зависимость описывается асимптотическими формулами 6, 7 и 9 таблицы.

Чтобы оценить различие между приближениями Друде и идеально проводящей пластины, на рис. 6 показаны зависимости $F_z(z_0)$, рассчитанные при различных значениях фактора γ. Штриховые линии соответствуют $\gamma = 1$ (статическая сила Казимира–Полдера), штрихпунктирные — $\gamma = 5$, сплошные — $\gamma = 50$, пунктирные — $\gamma = 500$. Сопоставляя рис. 6, a и b, можно сделать вывод, что влияние материальных параметров значительно уменьшает различие между статическими и динамическими силами (вне зависимости от величины γ). В результате в диапазоне расстояний $20 < z_0 < 500$ nm

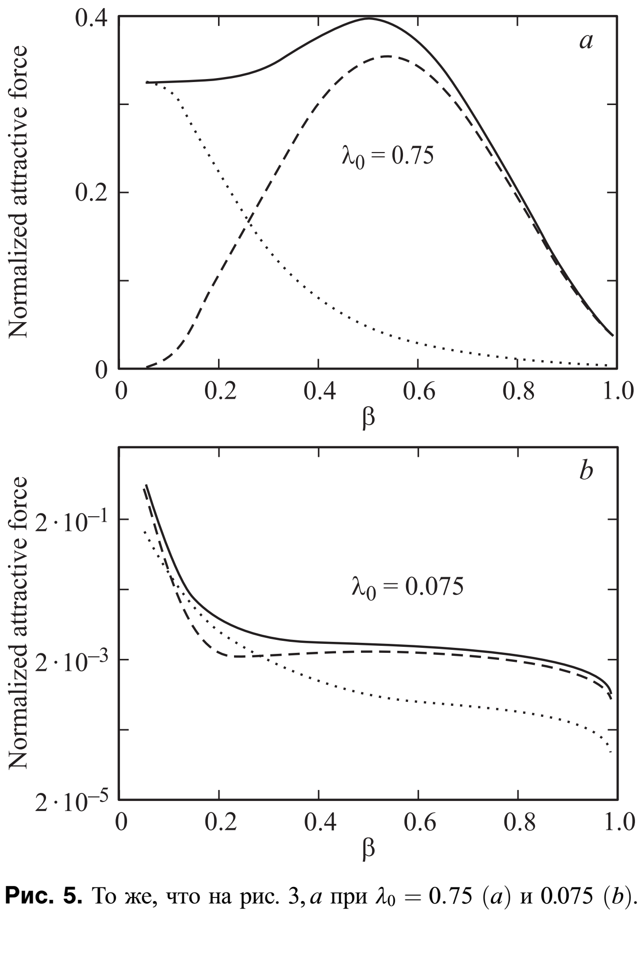

Рис. 5. То же, что на рис. 3, a при $\lambda_0 = 0.75$ (a) и 0.075 (b).

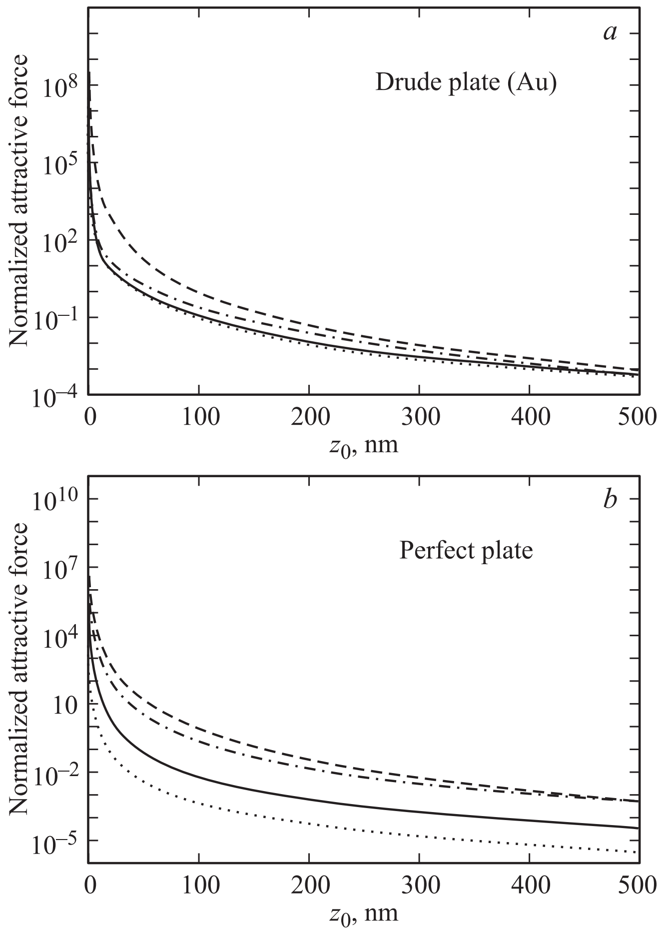

Рис. 6. Зависимость динамической силы Казимира–Полдера от расстояния для взаимодействия атома Cs с пластиной Au (a) и с идеально проводящей пластиной (b). Значения сил нормированы на величину фактора $\hbar\omega_0^5\alpha(0)/c^4$. Штриховые линии — статический случай, $\gamma = 1$, штрихпунктирные — $\gamma = 5$, сплошные — $\gamma = 50$, пунктирные — $\gamma = 500$.

динамические силы в случае модели Друде оказываются на один–три порядка величины больше, чем для идеально проводящей пластины.

4. Заключение

Получены замкнутые выражения для динамической силы Казимира-Полдера, действующей на нейтральный атом, движущийся параллельно плоской поверхности толстой металлической пластины (стенки). Детально рассмотрены случаи идеально проводящей пластины и металлической пластины, описываемой моделью Друде. Показано, что релятивистские формулы согласуются с формулами, получаемыми в нерелятивистском приближении для скорости и без учета запаздывания.

Существенной особенностью проведенного анализа является сложная зависимость динамической силы Казимира–Полдера от скорости (энергии), расстояния и материальных свойств. В частности, зависимость от β,

γ является немонотонной и имеет максимум или широкое плато при увеличении относительной скорости β. В диапазоне расстояний от нескольких десятков до нескольких сотен нанометров динамические силы для металлической пластины в модели Друде оказываются на один-три порядка величины выше, чем для идеально проводящей пластины.

Полученные результаты помимо их фундаментального значения могут быть полезны при теоретической интерпретации экспериментов по прохождению субрелятивистских атомных пучков в узких щелях и при их отражении от поверхности. Экспериментально можно рассмотреть прохождение ускоренных ионов высокой энергии с малой степенью ионизации через газовую мишень или фольгу, электростатически удаляя из пучка ионы, не захватившие электрон, и затем наблюдать отражение (рассеяние) нейтрализованных атомов поверхностью.

Список литературы

[1] H.B.G. Casimir, D. Polder. Phys. Rev. **73**, 360 (1948).
[2] Е.М. Лифшиц. ЖЭТФ **29**, 94 (1955).
[3] Ю.С. Бараш. Силы Ван-дер-Ваальса. Наука. М. (1988). 344 с. M. Antezza, L.P. Pitaevskii, S. Stringari. Phys. Rev. A **70**, 053 619 (2004); G. Bimonte, G.L. Klimchitskaya, V.M. Mostepanenko. Phys. Rev. A **79**, 042 906 (2009).
[4] K.A. Milton. Am. J. Phys. **79**, 697 (2011).
[5] F. Intravaia, C. Henkel, M. Antezza. In: Lecture notes on Casimir physics / Eds D.A.R. Dalvit, P. Milonni, D. Roberts, F. da Rosa. Springer-Verlag (2011). V. 834. P. 345.
[6] D.A.R. Dalvit, P.A. Maia Neto, F.D. Mazzitelli. In: Lecture notes on Casimir physics / Eds D.A.R. Dalvit, P. Milonni, D. Roberts, F. da Rosa. Springer-Verlag (2011). V. 834. P. 419.
[7] T.L. Ferrell, R.H. Ritchie. Phys. Rev. A **21**, 1305 (1980).
[8] A.M. Marvin, F. Toigo. Phys. Rev. A 25, 782 (1982).
[9] Г.В. Дедков, А.А. Кясов. www.ArXiv:1112.5619v1.
[10] G.V. Dedkov, A.A. Kyasov. Surf. Sci. **605**, 1077 (2011).
[11] Г.В. Дедков, А.А. Кясов. ФТТ **44**, *10*, 1729 (2002); **51**, *1*, 3(2009); **52**, *2*, 382(2010); J. Phys.: Cond. Matter **20**, 35, 354 006 (2008); Surf. Sci. **604**, 561 (2010); Наноструктуры. Математическая физика и моделирование **1**, *2*, 5(2009).
[12] А.А. Радциг, Б.М. Смирнов. Справочник по атомной и молекулярной физике. Атомиздат, М. (1980). 240 с.