

09

## Сравнение скорости и точности алгоритмов оптимизации волоконно-оптических линий связи

© И.П. Чебыкин,<sup>1,2</sup> Д.Д. Старых,<sup>1</sup> О.Е. Наний,<sup>1,3</sup> Г.А. Андреев,<sup>1,2</sup> В.Н. Трещиков<sup>1</sup>

<sup>1</sup> Научно-технический центр Т8,  
107076 Москва, Россия

<sup>2</sup> Московский физико-технический институт (национальный исследовательский университет),  
141701 Долгопрудный, Московская обл., Россия

<sup>3</sup> Физический факультет Московского государственного университета им. М.В. Ломоносова,  
119991 Москва, Россия  
e-mail: chebykin@t8.ru

Поступило в Редакцию 7 марта 2024 г.

В окончательной редакции 25 августа 2024 г.

Принято к публикации 12 сентября 2024 г.

Рассмотрена задача повышения качества передаваемого оптического сигнала, мерой которого является величина превышения отношения сигнал/шум над его критическим значением. Она сводится к поиску экстремума функции многих переменных, уникальной для каждой волоконно-оптической линии связи. Проведено сравнение различных алгоритмов оптимизации с целью нахождения наиболее подходящих для этого семейства функций. Была продемонстрирована применимость к данной задаче алгоритмов на основе байесовской оптимизации. Затраты времени на нахождение решения при использовании предложенных алгоритмов меньше, чем при использовании детерминированных алгоритмов глобальной оптимизации, а отклонение от абсолютного оптимума остается на приемлемом уровне.

**Ключевые слова:** волоконно-оптическая линия, сигнал/шум, алгоритм оптимизации, байесовский алгоритм.

DOI: 10.61011/JTF.2024.11.59102.78-24

### Введение

С ростом числа пользователей Интернета, устройств IoT (Internet of Things) и стремительным развитием облачных технологий увеличивается спрос на емкость и пропускную способность волоконно-оптических линий связи (ВОЛС), лежащих в основе опорных сетей Интернета (Internet backbone). Необходимо развитие инфраструктуры, строительство новых ВОЛС и модернизация существующих. Все это требует предварительного моделирования и подбора оптимального набора оборудования и его настроек (проектирования) [1].

Одной из наиболее сложных задач, возникающих при проектировании линий связи, является точный учет эффектов, влияющих на сигнал в оптическом волокне, в том числе нелинейных. Для оценки их влияния на качество передачи сигнала необходимо решение нелинейного уравнения Шредингера (НУШ). Необходимо отметить, что не существует аналитического решения НУШ, а сложность численного решения быстро возрастает с повышением точности, поэтому этот подход не применим на практике в связи с ограничениями вычислительной мощности. Для ускорения расчетов применяются различные приближенные методы оценки нелинейного воздействия, но наибольшее распространение до сих пор имеет оценка с применением GN-модели [2], полученной из первого порядка теории возмущений [3]. Как было показано в работе [4], для когерентных каналов связи без компенсации дисперсии по мере распространения по

волокну все компоненты электромагнитного поля приобретают одинаковое статистически независимое гауссово распределение, поэтому в GN-модели воздействие рассматривается как аддитивный гауссов шум.

Помимо нелинейных эффектов, на соотношение сигнал/шум (SNR) на приеме, а значит, и на качество передачи сигнала влияют и другие зависящие от различных параметров ВОЛС факторы: полные мощности на входе в кабельные участки и характеристики используемого в них оптического волокна, типы используемых усилителей, их коэффициенты усиления (КУ), частота расстановки эквалайзеров и используемое предскажжение спектра сигнала. Процесс проектирования можно представить как нахождение глобального экстремума функции качества передачи сигнала, которая зависит от всех этих параметров. Для упрощения задачи проектирования применяются усечения параметров целевой функции, когда некоторая часть из них фиксируется, и их значения заменяются предварительной оценкой. Это сокращает число независимых переменных и сужает область поиска оптимума. Применяются различные методы усечения параметров функции. Например, в работе [5] приведен способ оценки КУ усилителей, с использованием которого функцию качества передачи приводят к функции одной переменной — мощности на выходе из первого усилителя, что значительно упрощает задачу поиска оптимальной точки работы линии. Но анализ результатов оптимизации функции качества передачи сигнала с усечением параметров до одного показал,

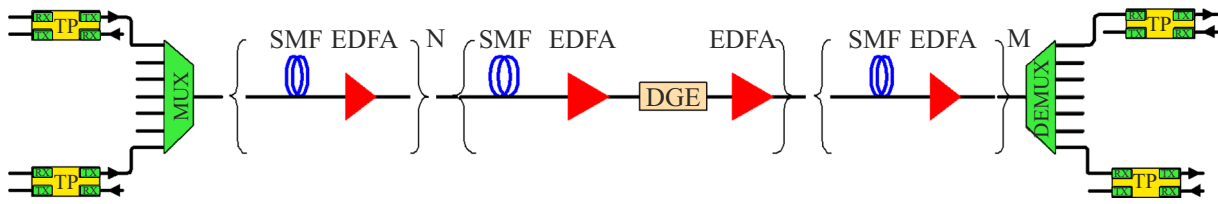


Рис. 1. Общая схема рассматриваемой ВОЛС. Пролеты отмечены фигурными скобками.

что отклонение достигаемого качества от глобального максимума может достигать 1 dB [6]. Применение этого метода усечения могло приводить, по расчетам, к проигрышу до 1 dB SNR на приеме из-за нахождения локального экстремума вместо глобального при оптимизации. Таким образом, выбор подходящего усечения параметров целевой функции качества передачи сигнала является важной частью задачи проектирования ВОЛС.

В настоящей работе предложен новый метод усечения параметров целевой функции. В качестве основных параметров были взяты мощности на входе в каждый кабельный участок. При расчете качества передачи сигнала на основе выбранных мощностей рассчитывались КУ усилителей и подбирались оптимальные по значению шум-фактора усилители с учетом ограничений по входной и выходной мощностям. Это позволяет найти наилучший общий шум-фактор ВОЛС для каждого отдельного случая для заданного общего набора типов усилителей. Формулы для расчета качества передачи сигнала приведены в разд. 1.

Полученная целевая функция качества передачи сигнала не имеет общей аналитической формы и по сути является кусочно-заданной из-за ограниченного набора типа усилителей. Ее градиент определен не во всех точках, поэтому для поиска экстремума этой функции не применимы методы на базе градиентного спуска. В работе [7] приводится сравнение различных методов оптимизации, в том числе сравнение глобальной и локальной оптимизации применительно к параметрам ВОЛС и показано, что для решения этой задачи применяются эвристические и стохастические алгоритмы, машинное обучение, аналитические и другие подходы. Выбор алгоритма определяет усечение и позволяет рассматривать задачу либо как глобальную оптимизацию профилей входных мощностей в волоконные участки, либо как поиск оптимальной конфигурации рабочих точек усилителей. Цель настоящей работы состояла в подборе оптимального метода поиска глобального экстремума для описанного выше усечения функции качества передачи сигнала.

В разд. 1 настоящей работы описан вывод используемой усеченной функции качества передачи. В разд. 2 приведены оптимизационные алгоритмы, которые использовались для нахождения экстремума этой целевой функции. В разд. 3 описаны задачи, использованные для сравнения работы алгоритмов. Разд. 4 посвящен

результатам сравнения и рекомендациям по выбору алгоритма

## 1. Модель ВОЛС

В настоящей работе рассматривается топология ВОЛС вида точка-точка, схема которой представлена на рис. 1. Она состоит из устройств приема-передачи и пролетов, содержащих кабельные участки и оборудования между ними — усилители, эквалайзеры.

Основными эффектами, ухудшающими качество передачи сигнала в когерентных ВОЛС, являются шумы усиленного спонтанного излучения эрбиевых усилителей (ASE) и нелинейные искажения сигнала в волокне из-за эффектов фазовой самомодуляции и кроссмодуляции, которые в GN-модели рассматриваются как нелинейный шум. В рамках GN-модели оба типа шума считаются гауссовыми и аддитивными [2], так что полный шум в линии можно представить в виде суммы двух компонент:

$$P_{\Sigma} = P_{ASE} + P_{NL}. \quad (1)$$

Тогда критерием работоспособности линии является неравенство

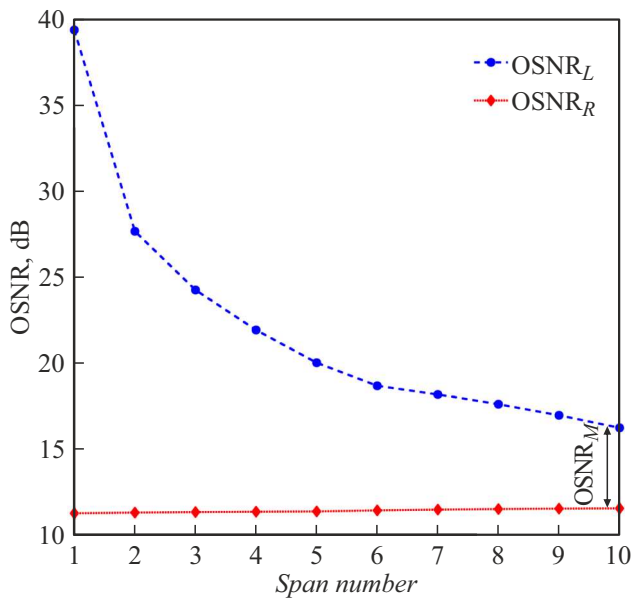
$$P_{\Sigma} \leq P_{cr},$$

где  $P_{cr}$  — это критический уровень шумов на приеме в трансивере, при котором возможна демодуляция принятого сигнала. Если разделить левую и правую части неравенства на мощность сигнала, то можно записать выражение (1) в терминах отношений сигнал/шум. В таком виде критерий работоспособности удобнее для расчета, так как не требует учета эволюции мощностей вдоль линии связи:

$$\frac{1}{OSNR_L} + \frac{1}{OSNR_{NL}} \leq \frac{1}{OSNR_{BtB}},$$

где  $OSNR_L$  — отношение мощности сигнала к мощности шумов ASE в полосе 0.1 nm;  $OSNR_{NL}$  — отношение мощности сигнала к мощности нелинейных шумов в полосе 0.1 nm;  $OSNR_{BtB}$  — минимальное допустимое оптическое отношение сигнал/шум, при котором возможна демодуляция сигнала с заданным уровнем ошибок.

Удобно [1] ввести понятие требуемого оптического отношения сигнал/шум  $OSNR_R$ , которое задает минимальное необходимое для приема сигнала оптическое



**Рис. 2.** Изменение  $OSNR_L$  и  $OSNR_R$  по мере распространения сигнала по пролетам. Разница между ними в дБ есть величина  $OSNR_M$ .

отношение мощности сигнала к мощности шумов ASE при наличии нелинейных шумов в линии:

$$\frac{1}{OSNR_R} = \frac{1}{OSNR_{BTB}} - \frac{1}{OSNR_{NL}}. \quad (2)$$

Для того чтобы характеризовать превышение уровня качества передачи сигнала над минимальным требуемым значением, применяется термин запаса по OSNR ( $OSNR_M$ ), определенный по формуле

$$OSNR_M = \frac{OSNR_L}{OSNR_R}. \quad (3)$$

На рис. 2 изображена эволюция требуемого и линейного OSNR в ВОЛС. Условие работоспособности линии связи является отсутствие пересечения этих кривых, его также можно записать в виде неравенства

$$OSNR_M \geq 1. \quad (4)$$

Также для определения  $OSNR$  используют переход к дБ, тогда формула (4) записывается в виде

$$osnr_M = 10 \log_{10}(OSNR_M) \geq 0. \quad (5)$$

Таким образом, запас по  $OSNR$  является метрикой, отражающей качество передачи сигнала, и оптимизацию работы ВОЛС можно представить как нахождение максимума  $OSNR_M$  при вариации параметров оптической линии. Как следует из формул (2) и (3), для расчета запаса необходимо знать  $OSNR_L$ ,  $OSNR_{NL}$  и  $OSNR_{BTB}$ . Рассмотрим подробнее расчет линейного и нелинейного  $OSNR$ , так как  $OSNR_{BTB}$  является характеристикой приемопередатчика и не зависит от параметров ВОЛС.

$OSNR_L$  сигнала для каждого канала, прошедшего через несколько промежуточных пролетов, может быть рассчитан по формуле обратных  $OSNR$ :

$$\frac{1}{OSNR_L^\Sigma} = \sum_i \frac{1}{OSNR_L^i},$$

где  $OSNR_L^\Sigma$  — суммарный  $OSNR_L$ , а  $OSNR_L^i$  — линейный  $OSNR$   $i$ -го пролета, который по определению равен отношению мощности сигнала  $P_s$  и мощности  $P_{ASE}$ , или

$$OSNR_L^i = \frac{P_s}{P_{ASE}} = \frac{G^i P_{in}^i}{(F_{EQ}^i G^i - 1) h \nu \Delta \nu},$$

где  $G^i$  — полный КУ пролета,  $h \nu \Delta \nu$  — мощность квантового шума в полосе  $\Delta \nu$ ,  $P_{in}^i$  — мощность на входе в пролет,  $F_{EQ}^i$  — эквивалентный шум-фактор пролета. Для расчета эквивалентного канального шум-фактора всего пролета используется формула Фрииса

$$F_{EQ} = F_1 + \sum_{i=2}^N \frac{F_i - 1}{\prod_{j=1}^{i-1} G_j},$$

где  $F_{EQ}$  — эквивалентный шум-фактор всей группы элементов,  $F_i$  — шум-фактор каждого из элементов и  $G_j$  — КУ элементов. В настоящей работе при расчете шум-фактора усилителя использовалась кусочно-заданная функция, зависящая от входной мощности  $P_{in}^i$ , это позволило получить значения шум-фактора, близкие к измеряемым в эксперименте.

Для расчета  $OSNR_{NL}$  была применена модифицированная модель GNCFF [8]. Для каждого пролета применялась формула

$$OSNR_{NL}^i = \frac{1}{\eta^i (P_{in}^i)^2},$$

где  $\eta^i$  — коэффициент нелинейности соответствующего кабельного участка. Суммарное значение на приеме рассчитывалось по формуле когерентного суммирования

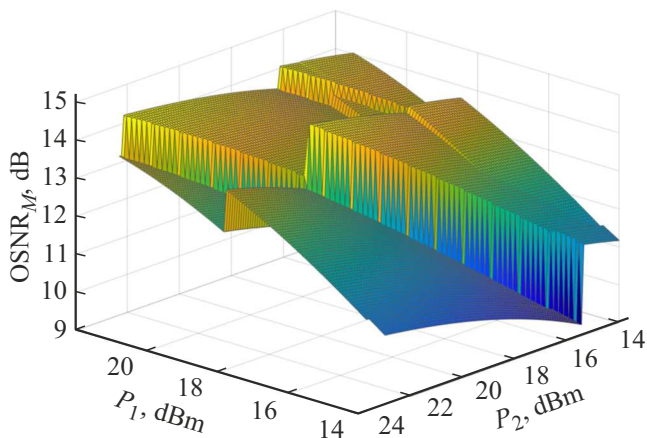
$$\frac{1}{OSNR_{NL}^\Sigma} = \left[ \sum_i \left( \frac{1}{OSNR_{NL}^i} \right)^{\frac{1}{1+\varepsilon}} \right]^{1+\varepsilon},$$

где  $\varepsilon$  — коэффициент когерентности шума. Данная модель расчета шума была экспериментально верифицирована [9].

$OSNR_L^\Sigma$ ,  $OSNR_{NL}^\Sigma$  и  $OSNR_M$  являются функциями от входных мощностей в каждый пролет. Частный случай функции запаса от входных мощностей в случае только двух пролетов представлен на рис. 3. В общем случае размерность функции может быть выше, так как определяется числом пролетов.

## 2. Алгоритмы поиска экстремума

Рассматриваемая целевая функция запаса по  $OSNR$ , зависящая от входных мощностей в пролеты, является



**Рис. 3.** Функция запаса по  $OSNR$  для ВОЛС, содержащей два волоконных пролета.  $P_1$  — мощность на входе в первый кабельный участок,  $P_2$  — во второй. Разрывы в функции связаны с переходом на другие типы усилителей в связи с их ограничениями по входной и выходной мощности.

многомерной. На каждое значение входной мощности накладываем ограничение, связанное с допустимыми выходными мощностями усилителей. Из-за наличия разрывов в функции ее градиент определен не во всех точках, значит, при ее оптимизации желательно применять прямые методы, которые не используют градиент при расчетах. Еще одним способом оптимизации может быть использование заранее заданного типа усилителя в каждом пролете, тогда в области определения функции разрывы будут отсутствовать. Но такой метод потребует дополнительного перебора усилителей и, по сути, внесет необходимость дополнительной оптимизации, в которой аргументами будут являться типы усилителей. Первый подход позволяет найти оптимальные усилители и настройки за одну оптимизацию, поэтому в работе был выбран именно он. Таким образом, для определенной ранее задачи оптимизации запаса от входных мощностей в пролеты подходящим является алгоритм многомерной, условной, прямой оптимизации.

Так как задачей настоящей работы является выбор оптимального алгоритма оптимизации, а не написание или модификация существующего, для сравнения использовались доступные реализации алгоритмов, которые удовлетворяли необходимым условиям на многомерность и не гладкость функции, наличие ограничений, а также, по возможности, поиск глобального минимума. Использовались алгоритмы из пакетов SciPy, BayessOpt и HyperOpt, AX, доступных для Python. После предварительного сравнения результатов на одной из расчетных задач были отобраны 4 алгоритма для более подробного сравнения.

Первый алгоритм из пакета BayessOpt является развитием случайного поиска, позволяющим уменьшить число итераций при поиске оптимума — это алгоритм байесовской оптимизации [10]. В его основе лежат

вероятностная модель и функция сбора данных. Первая используется для приближения оптимизируемой задачи, что позволяет уменьшить количество расчетов исходной функции и в итоге уменьшить время поиска оптимума. На каждом шаге оптимизации находится значение расчетной функции в определенной точке, и по нему обновляется вероятностная модель. Далее с помощью функции сбора данных определяется следующая точка для расчета оптимизируемой функции. Оптимизация завершается после достижения ограничения по итерациям, которое задается пользователем. В настоящей работе использовались несколько различных модификаций алгоритма, отличающихся между собой вероятностной моделью, один из пакета AX, а второй из пакета BayessOpt.

Второй алгоритм, использованный в настоящей работе, это TPE (Tree-structured Parzen Estimator) [11]. Он также является стохастическим прямым алгоритмом, но в отличие от предыдущего перед оптимизацией в нем проводится несколько дополнительных итераций случайного поиска. Они необходимы для формирования двух распределений для „удачных“ и „неудачных“ точек. „Удачным“ считается какой-то процент лучших по метрике оптимизации, например, 10% наборов мощностей на входе во все пролеты, для которых получен наилучший запас по  $OSNR$ . Выбор новой точки происходит за счет максимизации функции ожидаемого улучшения, или отношения вероятности нахождения новой точки в каждом из двух распределений. Критерием завершения также является ограничение по итерациям.

Последним из выбранных был алгоритм DIRECT [12]. Это детерминированный алгоритм оптимизации, основанный на оптимизации Шуберта. Для работы алгоритма Шуберта задается максимальный коэффициент наклона функции — константа Липшица, по ней и значениям функции на границах определяется точка минимального значения функции, и область определения делится на две части, для каждой из которых алгоритм повторяется. Алгоритм останавливается, когда после деления область становится меньше заданной величины, либо число итераций не превысит критическое значение.

### 3. Задачи для тестирования

Для сравнения скорости и точности работы алгоритмов оптимизации было решено выбрать несколько типовых задач проектирования многопролетных ВОЛС, в которых были рассмотрены линии связи с различными длинами пролетов, их количеством и форматом модуляции. В табл. 1 приведены параметры четырех задач, использованных для расчетов, вторая и третья задачи отличаются между собой только распределением длин волокон в пролетах.

Первая конфигурация представляет собой модельную линию, содержащую только 10 идентичных пролетов по 100 km с затуханием 20 dB. Вторая и тре-

**Таблица 1.** Список параметров тестовых задач

№	Протяженность ВОЛС, km	Длины пролетов, km	Число пролетов	Формат модуляции
1	1000	100	10	DP-QPSK
2	1000	70–130	10	DP-QPSK
3	1000	70–130	10	DP-QPSK
4	500	55–115	5	DP-16QAM

твья конфигурации более приближены к реальности, в них такая же полная длина линии, но случайное распределение длины между пролетами, коэффициент затухания волокна совпадает с первой конфигурацией — 0.2 dB/km. Последняя конфигурация содержит пять пролетов со случайно распределенной длиной, но для приемо-передатчиков моделируется другой формат модуляции, DP-16QAM.

Во всех задачах расчеты велись для 80 когерентных DWDM-каналов. Максимальная длина пролета составила 130 km, она была ограничена используемыми в расчете усилителями. Для компенсации эффектов искажения формы сигнала за счет ВКР перекачки мощности и неравномерности спектра пропускания волокна использовались эквалайзеры, которые были установлены после каждого третьего пролета.

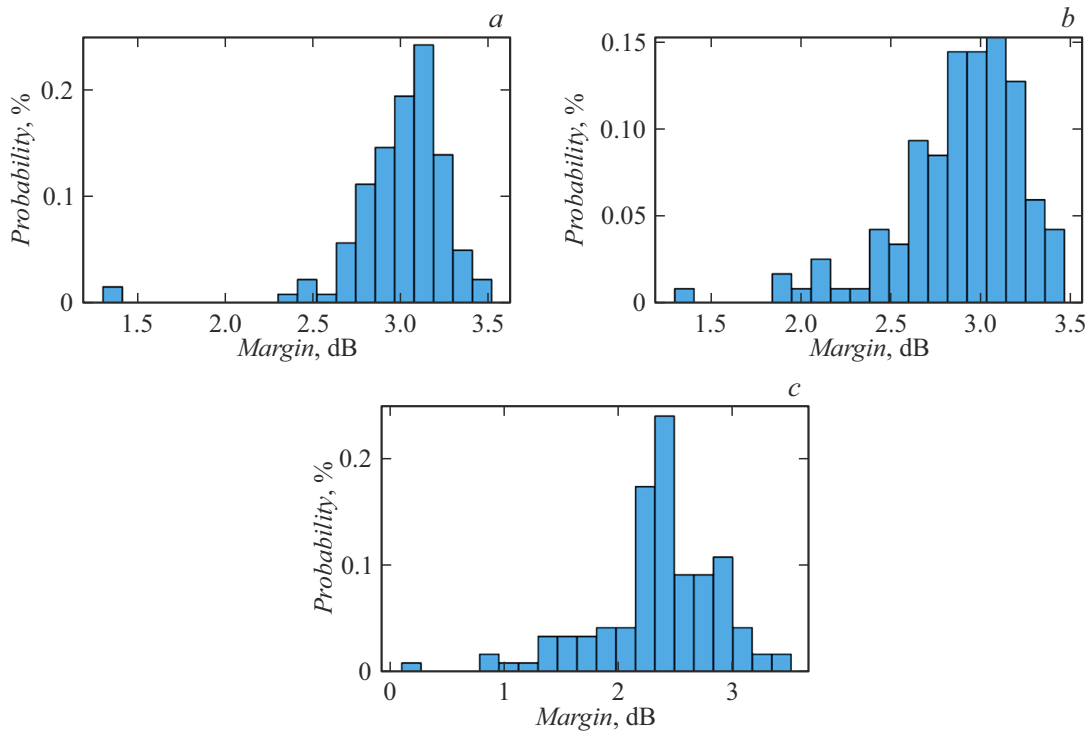
**Таблица 2.** Запас по OSNR в dB, среднее значение и доверительный интервал для стохастических алгоритмов, и значение для DIRECT

Задача/Алгоритм	Байесовская оптимизация (bayes-opt)	Байесовская оптимизация (AX)	TPE (hyperopt)	Direct
1	2.3 ± 1.1	2.9 ± 0.7	3 ± 1	3.7
2	0 ± 2.4	0.4 ± 0.6	0.6 ± 0.3	1.2
3	0.9 ± 1	1.4 ± 2.1	1.6 ± 0.8	2.2
4	0.1 ± 0.5	0.6 ± 0.1	0.4 ± 0.1	0.6

### 4. Обсуждение результатов

Для каждой задачи был рассчитан запас на приеме различными алгоритмами, чтобы сравнить их применимость и точность для разных задач. Алгоритм DIRECT является детерминированным, поэтому результатом его работы является одно значение оптимальной величины, а остальные алгоритмы являются стохастическими, поэтому расчет каждым из них был проведен 150 раз для формирования выборки результатов.

В табл. 2 приведены результаты сравнения алгоритмов оптимизации запаса по OSNR в dB для четырех различных задач, описание которых представлено в разд. 3. На рис. 4 показаны распределения вероятностей для



**Рис. 4.** Распределение по запасам, рассчитанным различными стохастическими алгоритмами для первой задачи из табл. 2: *a* — hyperopt, *b* — ax, *c* — bayes-opt.

результатов расчетов запаса по  $OSNR$  в задаче с 10 пролетами равной длины стохастическими алгоритмами.

Видно, что стохастические алгоритмы в среднем всегда уступают детерминированному, но их преимуществом является на порядок более высокая скорость работы. Среднее время расчета алгоритмом DIRECT составило 30 min, при этом стохастические алгоритмы позволяли получить результат за минуту за счет заметного снижения общего количества расчетов. Время работы напрямую связано с общим числом расчетов оптимизируемой функции, так как время расчета одной итерации слабо зависит от входных параметров. Критерием прекращения работы стохастических алгоритмом является завершение расчета фиксированного числа итераций, так что для них возможно гибко настраивать требуемую точность расчета за счет полного времени работы.

Величина доверительного интервала слабо зависит от типа задачи, для задач с пролетами случайной длины он был меньше для AX и Hyperopt, но для bayesopt наибольший доверительный интервал был получен именно для такой задачи. Присутствует снижение доверительного интервала при уменьшении числа пролетов, а значит, ошибка нахождения оптимума относительно глобального минимума для стохастических алгоритмов может увеличиваться с ростом числа пролетов, т.е. для проектирования более длинных линий требуется повышение числа итераций.

## Заключение

В работе был проведен отбор и сравнение четырех наиболее эффективных алгоритмов поиска экстремума функции многих переменных в задаче проектирования ВОЛС. Оптимизация мощностей на входе в пролеты с помощью алгоритма DIRECT позволила получить наибольший запас по  $OSNR$  во всех рассмотренных задачах. Время расчета нелинейно возрастает с увеличением числа пролетов и составляет больше 30 min для 10 пролетов. Оптимизация мощностей с использованием стохастических алгоритмов позволила достигнуть компромисса, уменьшив время расчета на порядок — до 1 min, при этом ухудшение качества определения запаса составило не более 0.7 dB при учете среднего значения для TPE алгоритма. Наблюдалось увеличение доверительного интервала результатов с ростом числа пролетов для стохастических алгоритмов, их применимость для такого класса задач находится за рамками данного исследования.

## Конфликт интересов

Авторы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

## Список литературы

- [1] V.A. Konyshov, A.V. Leonov, O.E. Nani, A.G. Novikov, V.N. Treshikov, R.R. Ubaydullaev. *Quantum Elec.*, **46** (12), 1121 (2016). DOI: 10.1070/QEL16219
- [2] P. Poggiolini, G. Bosco, A. Carena, V. Curri, Y. Jiang, F. Forghieri. *J. Lightwave Technol.*, **32** (4), 694 (2014). DOI: 10.1109/JLT.2013.2295208
- [3] A. Bononi, R. Dar, M. Secondini, P. Serena, P. Poggiolini. *Fiber Nonlinearity and Optical System Performance*. In B. Mukherjee, I. Tomkos, M. Tornatore, P. Winzer, Y. Zhao (eds). *Springer Handbook of Optical Networks*. Springer Handbooks (Springer, Cham., 2020), p. 287–351. DOI: 10.1007/978-3-030-16250-4\_9
- [4] A. Carena, G. Bosco, V. Curri, P. Poggiolini, M.T. Taiba, F. Forghieri. *Statistical characterization of PM-QPSK signals after propagation in uncompensated fiber links*. In *36th European Conference and Exhibition on Optical Communication*, IEEE, Sep. 2010, pp. 1–3. DOI: 10.1109/ECOC.2010.5621509
- [5] J.-L. Auge, V. Curri, E. Le Rouzic. *Open Design for Multi-Vendor Optical Networks*, 2019. [Online]. Available: <https://telecominfraproject.com/>
- [6] R. Hashemi, H. Beyranvand, H. Rabbani. *Opt. Commun.*, **475**, 126212 (2020). DOI: 10.1016/j.optcom.2020.126212
- [7] G. Borraccini, S. Straullu, A. D'Amico, F. Aquilino, S. Piciaccia, A. Tanzi, G. Galimberti, V. Curri. *J. Opt. Commun. Networking*, **16** (5), B60 (2024). DOI: 10.1364/JOCN.512049
- [8] P. Poggiolini, M.R. Zefreh, G. Bosco, F. Forghieri, S. Piciaccia. *Accurate Non-Linearity Fully-Closed-Form Formula based on the GN/EGN Model and Large-Data-Set Fitting*. In *Optical Fiber Communication Conference (OFC) 2019*, Washington, D.C.: OSA, 2019, p. M11.4. DOI: 10.1364/OFC.2019.M11.4
- [9] Д.Д. Старых, Л.А. Самоделькин, О.Е. Наний, В.Н. Трещиков. *ЖТФ*, **93** (11), 1637 (2023). DOI: 10.61011/JTF.2023.11.56496.123-23 [D.D. Starykh, L.A. Samodelkin, O.E. Naniy, V.N. Treshikov. *Tech. Phys.*, **68** (11), 1519 (2023). DOI: 10.61011/TP.2023.11.57504.123-23]
- [10] J. Mockus. *J. Global Optimization*, **4** (4), 347 (1994). DOI: 10.1007/BF01099263
- [11] J. Bergstra, R. Bardenet, Y. Bengio, B. Kégl. *Algorithms for Hyper-Parameter Optimization*. In J. Shawe-Taylor, R. Zemel, P. Bartlett, F. Pereira, K.Q. Weinberger (eds). *Advances in Neural Information Processing Systems 24 (NIPS 2011)*
- [12] D.R. Jones, C.D. Perttunen, B.E. Stuckman. *J. Optim. Theory Appl.*, **79** (1), 157 (1993) [Online]. Available: <https://link.springer.com/article/10.1007/BF00941892>