

09

## Двулучепреломление и дихроизм вакуума в поле стоячей электромагнитной волны

© И.А. Александров<sup>1,2</sup>, Д.В. Чубуков<sup>3</sup>, А.Г. Ткачев<sup>1</sup>, А.И. Клочай<sup>1</sup>

<sup>1</sup> Санкт-Петербургский государственный университет,  
Санкт-Петербург, Россия

<sup>2</sup> ФТИ им. А.Ф. Иоффе,  
Санкт-Петербург, Россия

<sup>3</sup> Университет ИТМО,  
Санкт-Петербург, Россия

e-mail: i.aleksandrov@spbu.ru

Поступила в редакцию 30.08.2024 г.

В окончательной редакции 30.08.2024 г.

Принята к публикации 16.09.2024 г.

Исследованы вакуумное двулучепреломление и дихроизм в задаче, в которой пробный фотон пересекает сильную стоячую электромагнитную волну, образованную двумя встречными плоскими лазерными пучками. Анализ основан на вычислении поляризационного тензора. Рассматривается как режим относительно низких лазерных частот и энергий фотона, так и область, где энергии имеют порядок энергии покоя электрона. В первом случае, если внешнее поле достаточно слабое, можно получать очень точные предсказания с использованием локальных значений вклада старшего порядка в эффективном лагранжиане Гейзенберга-Эйлера. Однако для рассмотрения режимов высокой энергии и сильного поля необходимо применять другие методы. Здесь использовано приближение локально постоянного поля (locally-constant field approximation, LCFA) и вычислены вещественная и мнимая части поляризационного тензора при изменении направления распространения пробного фотона. Показано, что если ось распространения фотона параллельна оси распространения лазерных пучков, то эффекты полностью определяются встречным пучком, в то время как сопутствующий пучок не влияет на рассматриваемые процессы. Если фотон движется перпендикулярно оси лазерных пучков, то обе плоские волны одинаково значимы. В этом случае в рамках приближения Гейзенберга-Эйлера достаточно умножить соответствующий результат, полученный для одиночного пучка, на 2, тогда как предсказания LCFA менее тривиальны, поскольку они включают нелинейные вклады более высоких порядков.

**Ключевые слова:** вакуумное двулучепреломление, дихроизм, квантовая электродинамика, сильные поля, нелинейные эффекты.

DOI: 10.61011/OS.2024.09.59194.7009-24

### 1. Введение

В рамках квантовой электродинамики (КЭД) вакуумное состояние нельзя рассматривать как тривиальное пустое пространство из-за наличия вакуумных флуктуаций, которые проявляются, например, в нелинейных явлениях, происходящих во внешних электромагнитных полях. Классическая теория Максвелла приобретает квантовые поправки, приводящие к нетривиальным поляризационным свойствам вакуума [1–8] и к эффектам вакуумного двулучепреломления и дихроизма. В данной работе мы исследуем эти явления в суперпозиции двух встречных лазерных пучков, образующих стоячую электромагнитную волну.

С точки зрения эксперимента, в режиме низких частот лазера и низких частот пробного фотона (по сравнению с энергией покоя электрона, деленной на приведенную постоянную Планка) можно попытаться воспользоваться наличием высокоточных экспериментальных методов в соответствующей области [9–19]. Для получения точных

теоретических предсказаний в таком режиме достаточно рассматривать внешнее поле как локально постоянное и использовать замкнутое выражение для эффективного лагранжиана Гейзенберга-Эйлера. Если внешнее поле относительно слабое, можно рассмотреть только квантовую поправку старшего порядка, включенную в эффективный лагранжиан [20]. Если внешнее поле сильное, так что приближение Гейзенберга-Эйлера в старшем порядке больше не справедливо, то можно произвести расчет на основе локальных значений поляризационного оператора, полученного в постоянных скрещенных полях [21–25]. Такой непертурбативный подход называется приближением локально постоянного поля (locally-constant field approximation, LCFA). Оказывается, что LCFA также позволяет частично исследовать область высоких лазерных частот и высокоэнергетических пробных фотонов [26]. С экспериментальной точки зрения этот режим может также оказаться весьма многообещающим, поскольку он, как правило, отвечает бóльшим значениям сигнала [25,27,28]. Более того, LCFA также

предсказывает ненулевую мнимую часть поляризаационного оператора  $\hat{\epsilon}$ , таким образом, учитывает эффект вакуумного дихроизма. Согласно оптической теореме, мнимая часть определяет полную вероятность распада фотона на электрон-позитронную пару, которую можно рассматривать как вероятность поглощения фотона. Если данная величина зависит от поляризации пробного фотона, то квантовый вакуум проявляет дихроичные свойства при наличии соответствующего электромагнитного фонового поля.

В этой работе мы будем использовать как LCFA, так и приближение Гейзенберга-Эйлера для исследования явлений вакуумного двулучепреломления и дихроизма в поле стоячей электромагнитной волны. Наша цель — сравнить два теоретических подхода в широком диапазоне параметров поля для различных значений энергии (частоты) пробного фотона. Чтобы получить новую информацию о рассматриваемых нелинейных эффектах, мы также будем менять направление распространения фотона и проводить сравнение стоячей волны со сценарием, включающим только одну плоскую электромагнитную волну.

Работа имеет следующую структуру. В разд. 2 описывается постановка задачи. В разд. 3 обсуждается, как исследовать вакуумное двулучепреломление при помощи эффективного лагранжиана Гейзенберга-Эйлера. В разд. 4 формулируется приближенный метод, основанный на LCFA. Разд. 5 содержит результаты наших расчетов. В разд. 6 приводятся выводы.

В тексте статьи мы используем единицы измерения  $\hbar = c = 1$ ,  $\alpha = e^2/(4\pi)$  ( $\alpha$  — постоянная тонкой структуры),  $e < 0$ .

## 2. Параметры внешнего поля и пробного фотона

Постановка задачи включает пробный фотон с энергией  $q^0 = q_0$  и стоячую электромагнитную волну, которая описывается векторным потенциалом следующего вида:

$$\mathcal{A}(t, z) = \frac{\mathcal{E}_0}{\omega} \sin \omega t \cos \omega z \mathbf{e}_x, \quad (1)$$

где  $\omega$  — частота волны,  $\mathcal{E}_0$  — амплитуда напряженности поля, а единичные векторы вдоль декартовых осей обозначены как  $\{\mathbf{e}_i\}$  ( $\mathbf{x} = x\mathbf{e}_x + y\mathbf{e}_y + z\mathbf{e}_z$ ). Скалярный потенциал  $\mathcal{A}_0$  равен нулю. Векторный потенциал (1) соответствует следующим выражениям для компонент электрического и магнитного полей:

$$\mathbf{E}(t, z) = -(\partial_t \mathcal{A}_x) \mathbf{e}_x = -\mathcal{E}_0 \cos \omega t \cos \omega z \mathbf{e}_x, \quad (2)$$

$$\mathbf{B}(t, z) = (\partial_z \mathcal{A}_x) \mathbf{e}_y = -\mathcal{E}_0 \sin \omega t \sin \omega z \mathbf{e}_y. \quad (3)$$

Стоячая электромагнитная волна образована двумя встречными линейно поляризованными лазерными пучками, распространяющимися вдоль направления оси  $z$ :

$$\mathcal{A}(t, z) = \frac{(\mathcal{E}_0/2)}{\omega} [\sin \omega(t+z) + \sin \omega(t-z)] \mathbf{e}_x. \quad (4)$$

В рассматриваемой задаче отсутствуют постоянные компоненты электромагнитного поля (возможность экспериментального наблюдения двулучепреломления в магнитном поле исследовалась, например, в работах [29,30]).

Пробный фотон распространяется в произвольном направлении, определяемом углами  $\theta$  и  $\varphi$ , то есть 4-импульс  $q^\mu$  выбирается в виде  $q^\mu = q_0 (1, \sin \theta \cos \varphi, \sin \theta \sin \varphi, \cos \theta)^t$ . Конечный 4-импульс фотона обозначим  $k^\mu$ .

В дальнейшем будет удобно использовать следующие безразмерные параметры:

$$\xi = \frac{|e\mathcal{E}_0|}{m\omega}, \quad \chi_0 = \frac{|e\mathcal{E}_0|q^0}{m^3}. \quad (5)$$

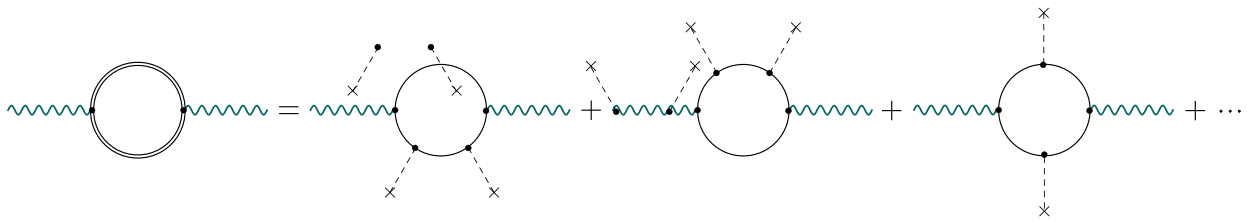
Первый параметр называется релятивистским параметром амплитуды поля (его также часто обозначают как  $a_0$ ). Если  $\xi \gtrsim 1$ , то внешнее поле ускоряет электроны до релятивистских энергий. Постоянная Планка не входит в определение  $\xi$ . Второй параметр в (5) — это так называемый квантовый параметр нелинейности, который играет центральную роль в анализе КЭД-эффектов в сильных внешних полях (он пропорционален  $\hbar$ ).

В старшем порядке по постоянной тонкой структуре  $\alpha$  эффекты вакуумного двулучепреломления и дихроизма содержатся в диаграмме Фейнмана, изображенной на рис. 1. Начальное и конечное состояния фотона (волнистые линии) могут отличаться за счет учета вакуумной петли, содержащей электронные функции Грина в заданном внешнем поле. В правой части рисунка представлены вклады старшего порядка по напряженности внешнего поля  $\mathcal{E}_0$ . Эти слагаемые будут вычислены приближенно при помощи подхода, основанного на использовании однопетлевого эффективного лагранжиана Гейзенберга-Эйлера. Диаграмма в левой части будет рассчитана при помощи приближения локально постоянного поля (LCFA).

В соответствии с правилами Фейнмана в КЭД амплитуду, отвечающую диаграмме в левой части рис. 1, можно в общем случае представить в виде

$$\mathcal{S}(q, k) = \frac{i}{\sqrt{4q_0k_0}} \varepsilon_\mu(q) \Pi^{\mu\nu}(q, k) \varepsilon_\nu^*(k), \quad (6)$$

где  $\Pi^{\mu\nu}$  — поляризаационный тензор во внешнем поле, а  $\varepsilon_\mu(q)$  и  $\varepsilon_\nu(k)$  — 4-векторы поляризации, отвечающие начальному и конечному состояниям фотона соответственно. Мы будем обсуждать только зависящую от поля часть этого тензора, которая описывает рассматриваемые эффекты. Несмотря на то, что фермионная петля в фейнмановской диаграмме может приводить к ненулевой передаче энергии-импульса, то есть  $k^\mu$  может отличаться от  $q^\mu$ , в дальнейшем мы сосредоточимся на упругом процессе ( $k = q$ ), который соответствует явлениям двулучепреломления и дихроизма.



**Рис. 1.** Диаграмма Фейнмана, описывающая эффекты вакуумного дихроизма и двулучепреломления, и ее разложение по напряженности внешнего поля. Вклад нулевого порядка не учитывается. Двойные линии отвечают электронным функциям Грина во внешнем поле, одинарные линии — пропагаторам свободных электронов, волнистые линии — начальному и конечному фотону, а вершины с крестиками — взаимодействию с внешним классическим полем.

### 3. Приближение Гейзенберга-Эйлера в старшем порядке

В этом разделе мы рассмотрим подход, основанный на пертурбативном разложении поляризаационного тензора по напряженности поля. Его можно вывести из однопетлевого эффективного лагранжиана в присутствии постоянного электромагнитного поля (см. [20]). Три диаграммы Фейнмана, изображенные в правой части рис. 1, можно приближенно вычислить при помощи замкнутого выражения для соответствующего лагранжиана в старшем порядке. В рамках этого подхода поляризаационный тензор можно представить в следующем виде [20]:

$$\begin{aligned}
 \Pi_{\text{HE}}^{\mu\nu}(q, k) &= \frac{\alpha}{45\pi} \frac{e^2}{m^4} \int d^4x e^{i(k-q)x} \\
 &\times [4(qF)^\mu(kF)^\nu + 7(qG)^\mu(kG)^\nu], \quad (7)
 \end{aligned}$$

где  $x = (t, \mathbf{x})$ ,  $(kF)^\mu \equiv k_\lambda F^{\lambda\mu}$ , а тензоры  $F^{\mu\nu}$  и  $G^{\mu\nu}$  зависят от  $x$ . Здесь мы используем стандартное выражение для электромагнитного тензора,  $F_{\mu\nu} = \partial_\mu \mathcal{A}_\nu - \partial_\nu \mathcal{A}_\mu$ . Дуальный тензор определяется как  $G_{\mu\nu} = (1/2)\epsilon_{\mu\nu\lambda\sigma} F^{\lambda\sigma}$ , где  $\epsilon_{\mu\nu\lambda\sigma}$  — тензор Леви-Чивиты. Вычисление интеграла в уравнении (7) приводит к законам сохранения, изменяющим импульс и энергию фотона на  $\pm 2\omega$  или оставляющим их неизменными. Поскольку нас интересует только упругое рассеяние, мы сохраним только члены, содержащие  $\delta^{(4)}(k - q)$ . Можно напрямую получить

$$\Pi_{\text{HE, elastic}}^{\mu\nu}(q, k) = \frac{16\pi^3 \alpha}{45} m^2 \chi_0^2 \delta^{(4)}(k - q) \mathcal{P}_{\text{HE}}^{\mu\nu}, \quad (8)$$

$$\mathcal{P}_{\text{HE}}^{\mu\nu} =$$

$$\begin{pmatrix}
 \sin^2 \theta & & & \\
 \times \left( 1 + \frac{3}{4} \sin^2 \varphi \right) & \sin \theta \cos \varphi & \frac{7}{4} \sin \theta \sin \varphi & 0 \\
 \sin \theta \cos \varphi & 1 + \cos^2 \theta & 0 & -\frac{1}{2} \sin 2\theta \cos \varphi \\
 \frac{7}{4} \sin \theta \sin \varphi & 0 & \frac{7}{4} (1 + \cos^2 \theta) & -\frac{7}{8} \sin 2\theta \sin \varphi \\
 0 & -\frac{1}{2} \sin 2\theta \cos \varphi & -\frac{7}{8} \sin 2\theta \sin \varphi & \sin^2 \theta \\
 & & & \times \left( 1 + \frac{3}{4} \sin^2 \varphi \right)
 \end{pmatrix}. \quad (9)$$

Физически наблюдаемые величины определяются амплитудой процесса (6). Для исследования эффекта вакуумного двулучепреломления необходимо вычислить ненулевую разность двух амплитуд для двух перпендикулярных 4-векторов поляризации  $\epsilon_\mu^{(w)}$  ( $w = 1, 2$ ) пробного фотона. Введем

$$\epsilon_\mu^{(1)} = (0, \cos \theta \cos \varphi, \cos \theta \sin \varphi, -\sin \theta)^t, \quad (10)$$

$$\epsilon_\mu^{(2)} = (0, -\sin \varphi, \cos \varphi, 0)^t. \quad (11)$$

Амплитуда (6) пропорциональна  $\epsilon_\mu(q) \mathcal{P}^{\mu\nu} \epsilon_\nu^*(k)$ , поэтому далее мы будем обсуждать наши результаты в терминах следующих величин:

$$A_{\text{HE}}^{(1)} = \epsilon_\mu^{(1)} \mathcal{P}_{\text{HE}}^{\mu\nu} \epsilon_\nu^{(1)} = (1 + \cos^2 \theta) \left( 1 + \frac{3}{4} \sin^2 \varphi \right), \quad (12)$$

$$A_{\text{HE}}^{(2)} = \epsilon_\mu^{(2)} \mathcal{P}_{\text{HE}}^{\mu\nu} \epsilon_\nu^{(2)} = (1 + \cos^2 \theta) \left( 1 + \frac{3}{4} \cos^2 \varphi \right). \quad (13)$$

Видно, что зависимости от  $\theta$  и  $\varphi$  факторизуются. Разность имеет вид

$$\Delta_{\text{HE}} \equiv A_{\text{HE}}^{(2)} - A_{\text{HE}}^{(1)} = \frac{3}{4} (1 + \cos^2 \theta) \cos 2\varphi. \quad (14)$$

Из этого выражения следует, что в приближении Гейзенберга-Эйлера двулучепреломление вакуума в стоячей волне максимально, если пробный фотон распространяется вдоль или против направления  $z$ . Эффект пропадает, если пробный фотон распространяется вдоль биссектрис плоскости  $xy$  ( $\varphi = \pi/4 + \pi n/2$ ).

В дальнейшем мы также сравним наши результаты для стоячей волны с результатами, полученными при учете только первого члена в уравнении (4). Это соответствует плоской волне, распространяющейся вдоль отрицательного направления оси  $z$ . В случае  $\theta = \varphi = 0$  результаты можно найти, например, в работе [26]. Для произвольных углов поляризаационный тензор имеет вид

$$\Pi_{\text{HE, PW, elastic}}^{\mu\nu}(q, k) = \frac{16\pi^3 \alpha}{45} m^2 \chi_0^2 \delta^{(4)}(k - q) \mathcal{P}_{\text{HE, PW}}^{\mu\nu}, \quad (15)$$

$$\mathcal{P}_{\text{HE, PW}}^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \sin^2 \theta \left(1 + \frac{3}{4} \sin^2 \varphi\right) & \frac{1}{2} \sin \theta \cos \varphi (1 + \cos \theta) & \frac{7}{8} \sin \theta \sin \varphi (1 + \cos \theta) & \frac{1}{2} \sin^2 \theta \left(\frac{3}{4} \sin^2 \varphi - 1\right) \\ \frac{1}{2} \sin \theta \cos \varphi (1 + \cos \theta) & 2 \cos^4 \theta / 2 & 0 & -\frac{1}{2} \sin \theta \cos \varphi (1 + \cos \theta) \\ \frac{7}{8} \sin \theta \sin \varphi (1 + \cos \theta) & 0 & \frac{7}{2} \cos^4 \theta / 2 & -\frac{7}{8} \sin \theta \sin \varphi (1 + \cos \theta) \\ \frac{1}{2} \sin^2 \theta \left(\frac{3}{4} \sin^2 \varphi - 1\right) & -\frac{1}{2} \sin \theta \cos \varphi (1 + \cos \theta) & -\frac{7}{8} \sin \theta \sin \varphi (1 + \cos \theta) & \frac{1}{2} \sin^2 \theta \left(1 + \frac{3}{4} \sin^2 \varphi\right) \end{pmatrix}. \quad (16)$$

Отсюда

$$A_{\text{HE, PW}}^{(1)} = \frac{1}{2} (1 + \cos \theta)^2 \left(1 + \frac{3}{4} \sin^2 \varphi\right), \quad (17)$$

$$A_{\text{HE, PW}}^{(2)} = \frac{1}{2} (1 + \cos \theta)^2 \left(1 + \frac{3}{4} \cos^2 \varphi\right). \quad (18)$$

$$\Delta_{\text{HE, PW}} \equiv A_{\text{HE, PW}}^{(2)} - A_{\text{HE, PW}}^{(1)} = \frac{3}{8} (1 + \cos \theta)^2 \cos 2\varphi. \quad (19)$$

При  $\theta = 0$  результаты для плоской волны совпадают с результатами, полученными для случая стоячей волны (12)–(14).

#### 4. Приближение локально постоянного поля (LCFA)

Оказывается, что при рассмотрении внешнего поля как локально постоянного можно учесть вклады более высоких порядков по напряженности поля за счет оценки диаграммы в левой части рис. 1, т.е. не используя пертурбативное разложение в правой части. Для этого можно применить выражение для поляризованного тензора, полученное в случае постоянных скрещенных полей [21–23], а затем проинтегрировать его по  $x$ , используя реальную пространственно-временную зависимость внешнего поля [24]. Для нашего случая вклад упругого процесса имеет вид

$$\Pi_{\text{LCFA, elastic}}^{\mu\nu}(q, k) = \frac{16\pi^3 \alpha}{3} m^2 \delta^{(4)}(k - q) \times \langle \chi^{2/3} \{ (A - B) \mathcal{F}^{\mu\nu} + (A + 2B) \mathcal{G}^{\mu\nu} \} \rangle_{t,z}, \quad (20)$$

где

$$\chi = \frac{|e| \sqrt{-(kF)^2}}{m^3} \quad (21)$$

представляет собой локальное значение квантового параметра нелинейности  $[(kF)^2 \equiv (kF)^\mu (kF)_\mu]$ . В формуле (20) мы также используем следующие определения:

$$\mathcal{F}^{\mu\nu} = \frac{(kF)^\mu (kF)^\nu}{(kF)^2}, \quad \mathcal{G}^{\mu\nu} = \frac{(kG)^\mu (kG)^\nu}{(kG)^2}, \quad (22)$$

$$A = \int_{-1}^1 dv v w^{1/3} f'(u), \quad B = \int_{-1}^1 dv w^{-2/3} f'(u), \quad (23)$$

$$w = \frac{4}{1 - v^2}, \quad u = \left(\frac{w}{\chi}\right)^{2/3}, \quad (24)$$

$$f(u) = i \int_0^\infty d\tau e^{-i(u\tau + \tau^3/3)} = \pi \text{Gi}(u) + i\pi \text{Ai}(u). \quad (25)$$

Здесь  $\text{Gi}(u)$  и  $\text{Ai}(u)$  — функции Скорера [31] и Эйри соответственно. Значение параметра  $\chi$  меняется в пространстве и времени и определяется локальными значениями внешнего поля  $F^{\mu\nu}$ . Соответственно,  $u$  также зависит от времени  $t$  и пространственной координаты  $z$ . Среднее значение по  $t$  и  $z$  в выражении (20) (угловые скобки) показывает, что результаты должны быть усреднены по временному и пространственному периоду стоячей волны. Это следует из классического выражения  $z(t) = z_0 + t \cos \theta$  для „траектории фотона“, где необходимо усреднять по  $z_0$  и  $t$ . Простая замена переменных с переходом от  $z_0$  к  $z$  приводит к описанному выше рецепту.

Если локальные значения  $\chi$  малы, то можно использовать следующие асимптотические разложения:

$$A = -\chi^{4/3} \left[ \frac{1}{3} + \frac{4}{35} \chi^2 + \frac{20}{99} \chi^4 + \mathcal{O}(\chi^6) \right] - \frac{i\pi}{2} \sqrt{\frac{3}{2}} \chi^{1/3} e^{-8/(3\chi)} [1 + \mathcal{O}(\chi)], \quad (26)$$

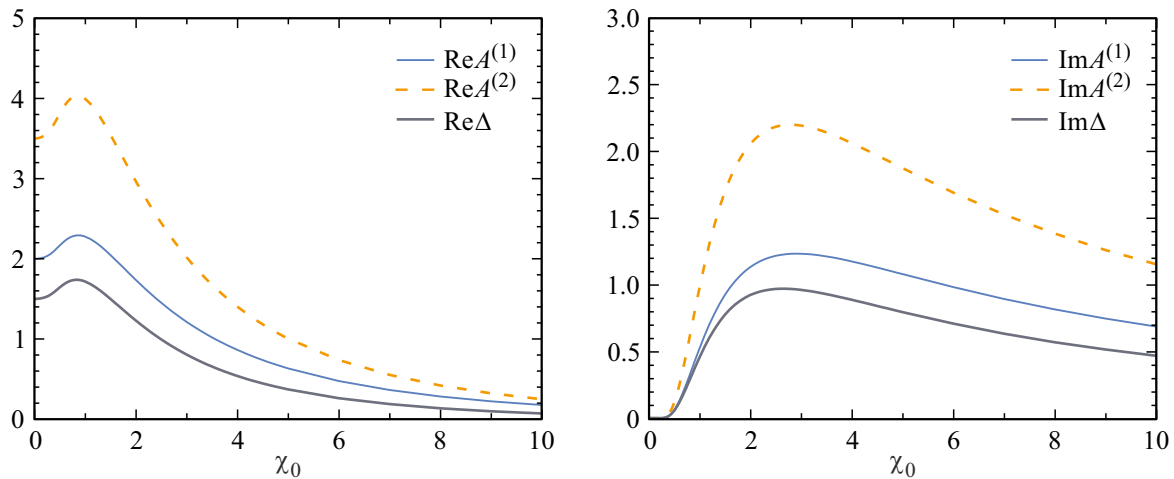
$$B = -\chi^{4/3} \left[ \frac{1}{15} + \frac{8}{315} \chi^2 + \frac{20}{429} \chi^4 + \mathcal{O}(\chi^6) \right] - \frac{i\pi}{8} \sqrt{\frac{3}{2}} \chi^{1/3} e^{-8/(3\chi)} [1 + \mathcal{O}(\chi)]. \quad (27)$$

Мы видим, что мнимая часть поляризованного тензора сильно подавлена в режиме  $\chi \ll 1$ . Раскладывая в ряд выражение (20), мы находим, что вклад старшего порядка в точности совпадает с приближением Гейзенберга-Эйлера (8), (9).

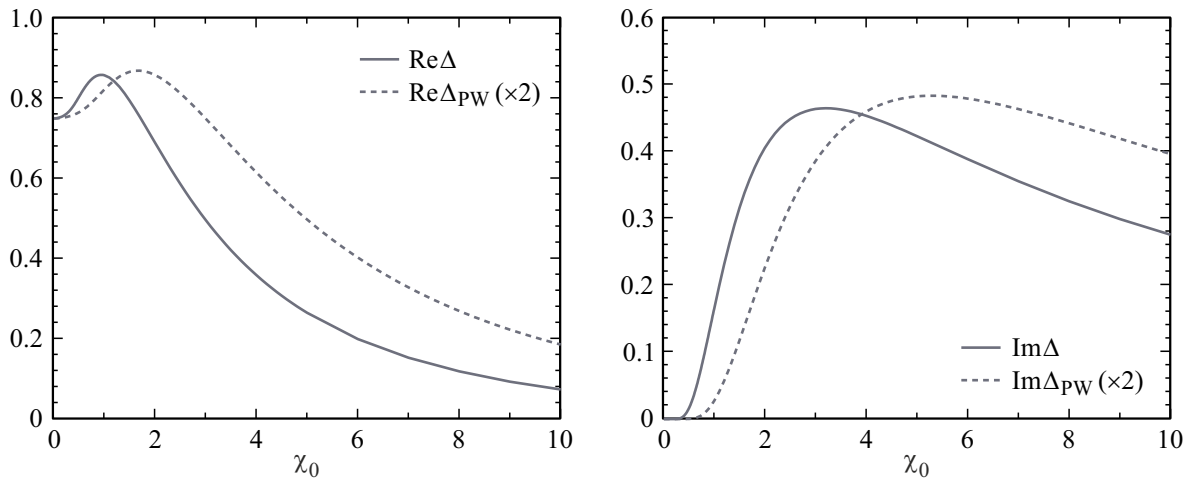
Также упомянем, что локальные приближения в различных формах могут быть использованы для описания других КЭД-явлений в сильных полях. Например, эффект Заутера-Швингера, связанный с вакуумным рождением электрон-позитронных пар может быть исследован с помощью LCFA [32–41].

#### 5. Численные результаты

Начнем наш численный анализ с наиболее простого случая  $\theta = \varphi = 0$ , соответствующего пробному фотону, распространяющемуся вдоль оси  $z$  и поляризованному либо вдоль направления  $x$  ( $\varepsilon^{(1)}$ ), либо вдоль направления  $y$  ( $\varepsilon^{(2)}$ ). Во-первых, как было указано выше, в приближении Гейзенберга-Эйлера результат для стоячей



**Рис. 2.** Вещественные и мнимые части безразмерных величин  $A^{(1)}$ ,  $A^{(2)}$  и  $\Delta$ , вычисленные в рамках LCFA в зависимости от квантового параметра нелинейности  $\chi_0$  в случае  $\theta = \varphi = 0$ . Согласно формулам (12)–(14), приближение Гейзенберга-Эйлера дает  $A_{\text{HE}}^{(1)} = 2$ ,  $A_{\text{HE}}^{(2)} = 7/2$  и  $\Delta_{\text{HE}} = 3/2$  независимо от  $\chi_0$ .



**Рис. 3.** Вещественная и мнимая части разности  $\Delta$ , вычисленные в рамках LCFA в поле стоячей волны (1) и в поле одиночной плоской волны, распространяющейся в отрицательном направлении оси  $z$ . Значения для плоской волны умножаются на коэффициент 2. Пробный фотон движется вдоль оси  $x$  ( $\theta = \pi/2$ ,  $\varphi = 0$ ).

волны (9) в точности равен выражению для плоской волны (16) с учетом амплитуд  $\mathcal{E}_0$  и  $\mathcal{E}_0/2$ , выбранных соответственно для этих двух сценариев. Это означает, что второй член в уравнении (4) совершенно не важен, т.е. на свойства пробного фотона никак не влияет попутный лазерный импульс. Более того, это справедливо и в рамках LCFA. На рис. 2 изображены вещественные и мнимые части величин  $A^{(1)}$ ,  $A^{(2)}$  и  $\Delta$  как функции  $\chi_0$ . В случае плосковолнового поля наши численные результаты оказались точно такими же, как и полученные в случае стоячей волны (1). Во-вторых, согласно рис. 2 мы видим, что приближение Гейзенберга-Эйлера является точным только в области малых  $\chi_0$ ; для  $\chi_0 = 0.5$  вещественная часть  $\Delta_{\text{HE}}$  отличается от предсказания LCFA  $\Delta$  на 9%. Мнимая часть равна нулю в старшем порядке, поэтому для описания эффекта

вакуумного дихроизма необходимо учитывать вклады старших порядков, например, посредством LCFA (20).

Теперь рассмотрим ненулевые углы  $\theta$  и  $\varphi$  в режиме слабого поля (низких энергий)  $\chi_0 \ll 1$ . Теперь выражение для плоской волны (16) и результат для стоячей волны (9) не совпадают, поскольку оба члена в уравнении (4) дают ненулевые вклады. Например, с увеличением  $\theta$  сигналы двулучепреломления (14) и (19) начинают заметно отличаться друг от друга. Для  $\theta = \pi/2$  выражения для стоячей волны (12)–(14) в два раза больше результатов для плоской волны (17)–(19).

Чтобы провести анализ при произвольных  $\chi_0$ , построим зависимость  $\Delta$  от  $\chi_0$  для  $\theta = \pi/2$ ,  $\varphi = 0$ , что соответствует пробному фотону, движущемуся вдоль оси  $x$  (рис. 3). Результаты, полученные для плосковолнового сценария, умножаются на коэффициент 2. В то время

как для  $\chi_0 \ll 1$  конфигурация с одной плоской волной эквивалентна стоячей волне (1), для больших  $\chi_0$  это уже не так. Это говорит о том, что поскольку процесс нелинейный, эффект от двух одинаковых плоских волн в уравнении (4) не совпадает с результатом для одной волны, умноженным просто на множитель 2. В старшем порядке рассматриваемый упругий процесс включает поглощение и испускание одного и того же фотона — это либо квант первого лазерного пучка, либо квант второго пучка. Это означает, что две плоские волны действуют независимо, чего не наблюдается во вкладах более высоких порядков, включающих несколько актов испускания и поглощения. Приближение LCFA включает все эти члены и явно указывает на их значимость в режиме  $\chi_0 \gtrsim 1$ . Еще раз подчеркнем, что мнимая часть всегда отсутствует в старших слагаемых на рис. 1. Наконец, отметим, что для количественной оценки эффектов вакуумного двулучепреломления и дихроизма следует учитывать префактор в (8), который содержит  $\chi_0^2$ .

Поскольку приближение Гейзенберга-Эйлера в старшем порядке представляет собой предел малых  $\chi_0$  в LCFA, оно оправдано для описания вакуумного двулучепреломления, если справедливо само LCFA и  $\chi_0 \ll 1$ , как это видно из аналитических выражений и наших численных примеров. Хотя LCFA по своей сути непертурбативно по отношению к классическому полю, это по-прежнему приближенный метод, поскольку в рамках LCFA предполагается, что внешнее поле можно рассматривать как локально постоянное и локально скрещенное. Точность LCFA, очевидно, зависит от  $\omega$ ,  $\mathcal{E}_0$  и энергии пробного фотона  $k^0$ . Согласно, например, работе [26], в случае плосковолнового поля применение LCFA оправдано, если  $\xi$  значительно превышает  $\chi_0$ , что на практике означает  $\xi \gg 1$  или же  $\chi_0 \ll \xi \lesssim 1$ .

## 6. Заключение

В данной работе был вычислен поляризационный тензор в поле стоячей электромагнитной волны с помощью приближения локально постоянного поля (LCFA) и приближения Гейзенберга-Эйлера. Вещественная и мнимая части этого тензора отвечают соответственно за вакуумное двулучепреломление и дихроизм. Было показано, что при малых значениях квантового параметра нелинейности ( $\chi_0 \ll 1$ ) последний подход дает точные и простые предсказания: вещественная часть поляризационного тензора тривиально зависит от  $\chi_0$  и может быть легко связана с результатами для одного лазерного пучка (например, в случае поперечного распространения ответ следует просто умножить на 2). Если условие  $\chi_0 \ll 1$  перестает выполняться, то необходимо выйти за рамки приближения Гейзенберга-Эйлера. В этом случае, принимая во внимание вклады более высоких порядков посредством LCFA, мы получаем нетривиальную зависимость как вещественной, так и мнимой частей от параметра  $\chi_0$ . Результаты, полученные для стоячей

волны, начинают принципиально отличаться от расчетов в случае одиночного плосковолнового пучка.

Поскольку стоячая электромагнитная волна представляет собой значительно более интересную конфигурацию, чем плоская волна, является целесообразным сравнение локальных приближений с точными результатами для этого случая. Данный вопрос является важным направлением для наших будущих исследований.

## Финансирование работы

Исследование выполнено при финансовой поддержке Российского научного фонда (РНФ) в рамках проекта № 23-72-01068.

## Конфликт интересов

Авторы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

## Список литературы

- [1] H. Euler, B. Kockel, *Naturwiss.*, **23**, 246 (1935).
- [2] W. Heisenberg, H. Euler, *Z. Phys.*, **98**, 714 (1936).
- [3] J. Schwinger, *Phys. Rev.*, **82**, 664 (1951). DOI: 10.1103/PhysRev.82.664
- [4] J.S. Toll, Ph.D. thesis, Princeton Univ., 1952.
- [5] R. Baier, P. Breitenlohner, *Acta Phys. Austriaca*, **25**, 212 (1967).
- [6] R. Baier, P. Breitenlohner, *Nuovo Cimento B*, **47**, 117 (1967). DOI: 10.1007/BF02712312
- [7] В.Н. Байер, А.И. Мильштейн, В.М. Страховенко, *ЖЭТФ*, **69**, 1893 (1975).
- [8] W. Becker, H. Mitter, *J. Phys. A*, **8**, 1638 (1975). DOI: 10.1088/0305-4470/8/10/017
- [9] Е.Б. Александров, А.А. Ансельм, А.Н. Москалев, *ЖЭТФ*, **89**, 1181 (1985).
- [10] A. Di Piazza, K.Z. Hatsagortsyan, C.H. Keitel, *Phys. Rev. Lett.*, **97**, 083603 (2006). DOI: 10.1103/PhysRevLett.97.083603
- [11] T. Heinzl, B. Liesfeld, K.U. Amthor, H. Schwöerer, R. Sauerbrey, A. Wipf, *Opt. Commun.*, **267**, 318 (2006). DOI: 10.1016/j.optcom.2006.06.053
- [12] V. Dinu, T. Heinzl, A. Ilderton, M. Marklund, G. Torgrimsson, *Phys. Rev. D*, **89**, 125003 (2014). DOI: 10.1103/PhysRevD.89.125003
- [13] F. Karbstein, E.A. Mosman, *Phys. Rev. D*, **101**, 113002 (2020). DOI: 10.1103/PhysRevD.101.113002
- [14] F. Karbstein, *Annalen Phys.*, **534**, 2100137 (2022). DOI: 10.1002/andp.202100137
- [15] F. Karbstein, H. Gies, M. Reuter, M. Zepf, *Phys. Rev. D*, **92**, 071301(R) (2015). DOI: 10.1103/PhysRevD.92.071301
- [16] H.-P. Schlenvoigt, T. Heinzl, U. Schramm, T.E. Cowan, R. Sauerbrey, *Phys. Scr.*, **91**, 023010 (2016). DOI: 10.1088/0031-8949/91/2/023010
- [17] N. Ahmadiaz, T.E. Cowan, R. Sauerbrey, U. Schramm, H.-P. Schlenvoigt, R. Schützhold, *Phys. Rev. D*, **101**, 116019 (2020). DOI: 10.1103/PhysRevD.101.116019
- [18] F. Karbstein, D. Ullmann, E.A. Mosman, M. Zepf, *Phys. Rev. Lett.*, **129**, 061802 (2022).

- DOI: 10.1103/PhysRevLett.129.061802
- [19] N. Ahmadinia, T. E. Cowan, J. Grenzer, S. Franchino-Viñas, A. Laso Garcia, M. Šmíd, T. Toncian, M.A. Trejo, R. Schützhold, *Phys. Rev. D*, **108**, 076005 (2023). DOI: 10.1103/PhysRevD.108.076005
- [20] F. Karbstein, R. Shaisultanov, *Phys. Rev. D*, **91**, 085027 (2015). DOI: 10.1103/PhysRevD.91.085027
- [21] И.А. Баталин, А.Е. Шабад, Препр. ФИАН, **166** (1968).
- [22] Н.Б. Нарожный, *ЖЭТФ*, **55**, 714 (1968).
- [23] V.I. Ritus, *Ann. Phys.*, **69**, 555 (1972). DOI: 10.1016/0003-4916(72)90191-1
- [24] S. Meuren, C.H. Keitel, A. Di Piazza, *Phys. Rev. D*, **88**, 013007 (2013). DOI: 10.1103/PhysRevD.88.013007
- [25] S. Bragin, S. Meuren, C.H. Keitel, A. Di Piazza, *Phys. Rev. Lett.*, **119**, 250403 (2017). DOI: 10.1103/PhysRevLett.119.250403
- [26] I.A. Aleksandrov, V.M. Shabaev, *ЖЭТФ*, **166**, 182 (2024). DOI: 10.31857/S0044451024080042
- [27] B. King, N. Elkina, *Phys. Rev. A*, **94**, 062102 (2016). DOI: 10.1103/PhysRevA.94.062102
- [28] Y. Nakamiya, K. Homma, *Phys. Rev. D*, **96**, 053002 (2017). DOI: 10.1103/PhysRevD.96.053002
- [29] F. Della Valle, A. Ejlli, U. Gastaldi, G. Messineo, E. Milotti, R. Pengo, G. Ruoso, G. Zavattini, *Eur. Phys. J. C*, **76**, 24 (2016). DOI: 10.1140/epjc/s10052-015-3869-8
- [30] G. Zavattini, F. Della Valle, A. Ejlli, G. Ruoso, *Eur. Phys. J. C*, **76**, 294 (2016). DOI: 10.1140/epjc/s10052-016-4139-0
- [31] R.S. Scorer, *Q. J. Mech. Appl. Math.*, **3**, 107 (1950). DOI: 10.1093/qjmam/3.1.107
- [32] Н.Б. Нарожный, С.С. Буланов, В.Д. Мур, В.С. Попов, *Письма в ЖЭТФ*, **80**, 434 (2004). DOI: 10.1134/1.1830652
- [33] С.С. Буланов, Н.Б. Нарожный, В.Д. Мур, В.С. Попов, *ЖЭТФ*, **129**, 14 (2006).
- [34] F. Hebenstreit, R. Alkofer, H. Gies, *Phys. Rev. D*, **78**, 061701(R) (2008). DOI: 10.1103/PhysRevD.78.061701
- [35] S.S. Bulanov, V.D. Mur, N.B. Narozhny, J. Nees, V.S. Popov, *Phys. Rev. Lett.*, **104**, 220404 (2010). DOI: 10.1103/PhysRevLett.104.220404
- [36] S.P. Gavrilov, D.M. Gitman, *Phys. Rev. D*, **95**, 076013 (2017). DOI: 10.1103/PhysRevD.95.076013
- [37] I.A. Aleksandrov, G. Plunien, V.M. Shabaev, *Phys. Rev. D*, **99**, 016020 (2019). DOI: 10.1103/PhysRevD.99.016020
- [38] D.G. Sevostyanov, I.A. Aleksandrov, G. Plunien, V.M. Shabaev, *Phys. Rev. D*, **104**, 076014 (2021). DOI: 10.1103/PhysRevD.104.076014
- [39] I.A. Aleksandrov, D.G. Sevostyanov, V.M. Shabaev, *Symmetry*, **14**, 2444 (2022). DOI: 10.3390/sym14112444
- [40] I.A. Aleksandrov, D.G. Sevostyanov, V.M. Shabaev, arXiv:2210.15626.
- [41] A.G. Tkachev, I.A. Aleksandrov, V.M. Shabaev, arXiv:2408.04084.