

01 Генерация когерентных атомных состояний при рассеянии света на БЭК

© Ю.А. Аветисян¹, Е.Д. Трифонов²

¹ Институт проблем точной механики и управления, Саратовский Федеральный исследовательский центр РАН, Саратов, Россия

² Российский государственный педагогический университет им. А.И. Герцена, Санкт-Петербург, Россия

e-mail: yuaavetisyan@mail.ru, thphys@herzen.spb.ru

Поступила в редакцию 01.08.2024 г.

В окончательной редакции 16.09.2024 г.

Принята к публикации 23.09.2024 г.

С помощью решения системы уравнений Максвелла-Шрёдингера исследуется когерентность атомных состояний, возникающих в процессе рассеяния света на бозе-эйнштейновском конденсате разреженного газа, заключенного в гармоническую ловушку.

Ключевые слова: бозе-эйнштейновский конденсат, когерентные атомные состояния, сверхизлучательное рассеяние света.

DOI: 10.61011/OS.2024.10.59412.5986-24

Введение

Впервые сверхизлучательное рассеяние света на бозе-эйнштейновском конденсате (БЭК) разреженного атомарного газа наблюдалось группой Кеттерле в MIT [1–3]. В эксперименте [4] БЭК атомов Rb, удерживаемый в магнитной ловушке, облучался парой встречных лазерных пучков. В результате многократных актов рассеяния атомы БЭК получали импульсы поступательного движения, близкие к значениям $j\hbar k_0$ ($j = \pm 2, \pm 4, \dots$), где k_0 — абсолютная величина волнового вектора поля накачки, что приводило к появлению серии движущихся атомных облаков. Авторами [4] было уделено особое внимание на точность измерения импульсов фотонной отдачи, получаемых атомами, и на отклонения их от значений, кратных удвоенному импульсу фотона.

Теория сверхизлучательного рассеяния на БЭК рассматривалась ранее в работах [5–25]. В настоящей статье мы акцентируем внимание на влиянии гармонического потенциала ловушки на кинетику атомных облаков и показываем, насколько генерируемые в результате рассеяния света квантовые состояния атомов близки к квантовым когерентным состояниям, впервые предложенным Е. Шрёдингером [26] и позже детально исследованным и успешно примененным Р. Глаубером [27] в области квантовой оптики. Когерентные свойства атомных волн использовались в работе [4] при измерении импульса фотонной отдачи с помощью интерференционного эффекта.

Постановка задачи. Основные уравнения

Атом, принадлежащий БЭК, моделируется нами двухуровневой бозе-частицей с основным $|a\rangle$ и возбужденным $|b\rangle$ электронными состояниями с учетом его поступательного движения вдоль направления встречной лазерной накачки как в эксперименте [4]. Далее мы ограничимся одномерной моделью конденсата, считая в пределах гармонической ловушки зависимость от координат, ортогональных к направлению лазерного возбуждения, однородной.

Одноатомная волновая функция ищется в виде

$$\Psi(x, t) = \sum_{j=0, \pm 2, \dots} \left\{ a_j(x, t) e^{ij k_0 x} |a\rangle + e^{-i\omega_0 t} b_{j+1}(x, t) e^{i(j+1)k_0 x} |b\rangle \right\}, \quad (1)$$

где x — координата поступательного движения атома вдоль направления лазерной накачки, ω_0 и $k_0 = \omega_0/c$ — соответственно частота и волновой вектор лазерного поля, $a_j(x, t)$ и $b_j(x, t)$ искомые амплитуды волновых функций соответственно основного и возбужденного атомных состояний.

Для модели идеального газа волновые функции всех атомов БЭК можно принять одинаковыми и удовлетворяющими уравнению Шрёдингера:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi(x, t) = \left[\hat{H}^0 - \frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \hat{\mathbf{d}} \cdot \mathbf{E}(x, t) + \frac{1}{2} m \Omega^2 x^2 \right] \Psi(x, t). \quad (2)$$

Здесь \hat{H}^0 — гамильтониан электронного состояния свободного атома, m — масса атома, $\hat{\mathbf{d}}$ — оператор дипольного момента атома, $\mathbf{E}(x, t)$ — вектор напряженности полного электрического поля (возбуждающего лазерного поля и „вторичного“ поля, создаваемого наведенной поляризованностью конденсата), $m\Omega^2 x^2/2$ — потенциальная энергия атома в одномерной гармонической ловушке с собственной частотой Ω .

Возбуждающее лазерное поле представим в виде

$$E_0(x, t) = E_0(t) \exp\left(-i\omega_0\left(1 - \frac{x}{c}\right)\right) + E_0(t) \exp\left(-i\omega_0\left(1 + \frac{x}{c}\right)\right) + \text{с.с.} \quad (3)$$

Вектор поляризации поля будем считать как и в эксперименте [4] перпендикулярным к направлению лазерного возбуждения.

Поляризованность конденсата определим как квантово-механическое среднее оператора

$$\hat{P}(x, x') = N\hat{d}\delta(x - x'), \quad (4)$$

где для нашей одномерной модели N — число атомов конденсата, относящееся к единице площади облучаемой грани ловушки. Тогда для квантово-механического среднего поляризованности конденсата получим

$$\begin{aligned} P(x, t) &= \int_{-\infty}^{\infty} \Psi^*(x', t) N\hat{d}\delta(x - x') \Psi(x', t) dx' \\ &= N d_{ab} \sum_{j=0, \pm 2, \dots} \sum_{m=0, \pm 2} b_{j+1}(x, t) a_m^*(x, t) \\ &\quad \times \exp[-i\omega_0 t + ik_0 x(j + 1 - m)] + \text{с.с.}, \end{aligned} \quad (5)$$

где d_{ab} — дипольный момент электронного перехода $a \leftrightarrow b$. Индуцированное этой поляризованностью „вторичное“ электромагнитное поле в силу уравнений Максвелла подчиняется неоднородному волновому уравнению

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) E'(x, t) = \frac{4\pi}{c^2} \frac{\partial^2 P(x, t)}{\partial t^2} \quad (6)$$

и может быть представлено [28] в виде

$$E'(x, t) = -\frac{2\pi}{c} \int_{-\infty}^{\infty} dx' \frac{\partial}{\partial t} P\left(x', t - \frac{|x - x'|}{c}\right). \quad (7)$$

Используя в приближении медленного изменения амплитуд выражение поляризованности (5), для полного поля с помощью (3) и (7) получаем

$$\begin{aligned} E(x, t) &= E^+(x, t) \exp\left[-i\omega\left(t - \frac{x}{c}\right)\right] \\ &\quad + E^-(x, t) \exp\left[-i\omega\left(t + \frac{x}{c}\right)\right] + \text{с.с.}, \end{aligned} \quad (8)$$

где

$$\begin{aligned} E^+(x, t) &= E_0^+(t) + i2\pi k_0 d_{ab} N \int_{-\infty}^x dx' \\ &\quad \times \sum_{j=0, \pm 2, \dots} b_{j+1}(x', t') \bar{a}_j(x', t'), \end{aligned} \quad (8a)$$

$$\begin{aligned} E^-(x, t) &= E_0^-(t) + i2\pi k_0 d_{ab} N \int_x^{\infty} dx' \\ &\quad \sum_{j=0, \pm 2, \dots} b_{j-1}(x', t') \bar{a}_j(x', t'). \end{aligned} \quad (8b)$$

Далее будем использовать систему единиц, в которой за единицу длины принята „полуширина“ основного состояния гармонического осциллятора, $L = 2(\eta \ln 2/m\Omega)^{1/2}$, за единицу времени — „время сверхизлучения“ $\tau_R = \eta/(\pi d_{ab}^2 k_0 N)$, за единицу энергии соответственно $\hbar\tau_R^{-1}$.

При пренебрежении запаздыванием система уравнений Максвелла-Шрёдингера (1), (2), (8) может быть записана в виде

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial t} + v_j \frac{\partial}{\partial x}\right) a_j \\ = -i\varepsilon_j a_j - iux^2 a_j + b_{j+1} \bar{E}^+ + b_{j-1} \bar{E}^-, \end{aligned} \quad (9a)$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial t} + v_{j+1} \frac{\partial}{\partial x}\right) b_{j+1} = \\ = i\left(\Delta - \varepsilon_{j+1} - ux^2 + i\frac{\gamma}{2}\right) b_{j+1} - a_j E^+ - a_{j+2} E^-, \end{aligned} \quad (9b)$$

$$\begin{aligned} E^+(x, t) &= E_0^+(t) \\ &\quad + 2 \int_{-\infty}^x dx' \sum_{j=0, \pm 2, \dots} b_{j+1}(x', t) \bar{a}_j(x', t), \end{aligned} \quad (9c)$$

$$\begin{aligned} E^-(x, t) &= E_0^-(t) \\ &\quad + 2 \int_x^{\infty} dx' \sum_{j=0, \pm 2, \dots} b_{j-1}(x', t) \bar{a}_j(x', t). \end{aligned} \quad (9d)$$

Здесь $\varepsilon_j = \hbar j^2 k_0^2 \tau_R / (2m)$ и $v_j = \eta j k_0 \tau_R / (mL)$ — соответственно кинетическая энергия (в единицах частоты) и скорость атома массой m с импульсом $j\hbar k_0$, $\Delta = (\omega_0 - \omega_{ab})\tau_R$ — отстройка частоты накачки ω_0 от резонансной частоты оптического перехода ω_{ab} , амплитуды напряженности электрического поля выражены в единицах $\eta/(d_{ab}\tau_R)$, $\gamma = \Gamma\tau_R$, где Γ — радиационная константа возбужденного электронного состояния, $u = 0.5m\tau_R(\Omega L)^2/\hbar$.

Рассеянные атомные волны

При решении системы уравнений (9) мы использовали значения параметров задачи такого же порядка, как в эксперименте [4]. Циклическая частота излучения лазера $\omega_0 = 2.4 \cdot 10^{15} \text{ s}^{-1}$, радиационная константа электронного перехода $\Gamma = 0.38 \cdot 10^8 \text{ s}^{-1}$, длина волны и дипольный момент этого перехода соответственно $\lambda = 780 \text{ nm}$ и $d_{ab} = 2.53 \cdot 10^{-29} \text{ C} \cdot \text{m}$, $N = 1.4 \cdot 10^{10} \text{ cm}^{-2}$, собственная частота гармонической ловушки $\Omega/2\pi = 20 \text{ Hz}$, масса атома Rb $m = 1.44 \cdot 10^{-22} \text{ g}$. Для этих условий сверхизлучательное время оценивается как $\tau_R \sim 5 \text{ ns}$ и тогда для значений параметров в уравнениях (9) в наших единицах приближённо получаем $\varepsilon_j = 1.2 \cdot 10^{-4} j^2$, $\nu_j = 7.5 \cdot 10^{-6} j$, $\gamma = 0.19$, $u = 8.62 \cdot 10^{-7}$. Возбуждение конденсата моделировалось двумя встречными лазерными импульсами продолжительностью $t_p \sim 4 \mu\text{s}$ (в наших единицах $t_p \sim 800$). Решение системы уравнений (9) было выполнено при учете образования 11 атомных состояний: $a_0, b_{\pm 1}, a_{\pm 2}, b_{\pm 3}, a_{\pm 4}, b_{\pm 5}$. Амплитуда накачки E_0 выбиралась (в зависимости от отстройки) такой, чтобы за время возбуждения доля атомов в основном состоянии конденсата оставалась на уровне значения 0.9. Единственное ненулевое начальное условие при решении уравнений (9) задавалось для амплитуды a_0 как волновой функции основного состояния гармонического осциллятора.

Мы ограничимся здесь приведением результатов, полученных при отстройке $\Delta_{ab}/2\pi = -50 \text{ MHz}$ (в наших единицах ~ -1.6) для наиболее заселенных из рассеянных атомных состояний $a_{\pm 2}$. Согласно эксперименту [4] и нашим расчетам населенности атомных состояний $a_{\pm 4}, a_{\pm 6}, \dots$, соответствующие 2-, 3-кратным и большей кратности актам рассеяния, оказываются пренебрежимо малыми. Так, в момент t_p отключения накачки населенности состояний $a_{\pm 4}$ оказываются менее 1% от значения населенностей состояний $a_{\pm 2}$.

Пространственные распределения населенности облака a_2 , зарегистрированные в два момента времени, приведены на рис. 1.

Смещение с течением времени атомного облака a_2 обусловлено приобретением атомом импульса фотонной отдачи. Распределение для облака a_{-2} имеет симметричное смещение в противоположном направлении. При этом форма атомных облаков приблизительно сохраняется и близка к форме основного состояния гармонического осциллятора. Скорость перемещения максимума облака a_2 приблизительно соответствует оценке фотонной отдачи, $2\hbar k_0$, которая учтена нами в исходном выражении (1) для волновой функции. Уточнение скорости облаков можно найти, вычисляя преобразование Фурье

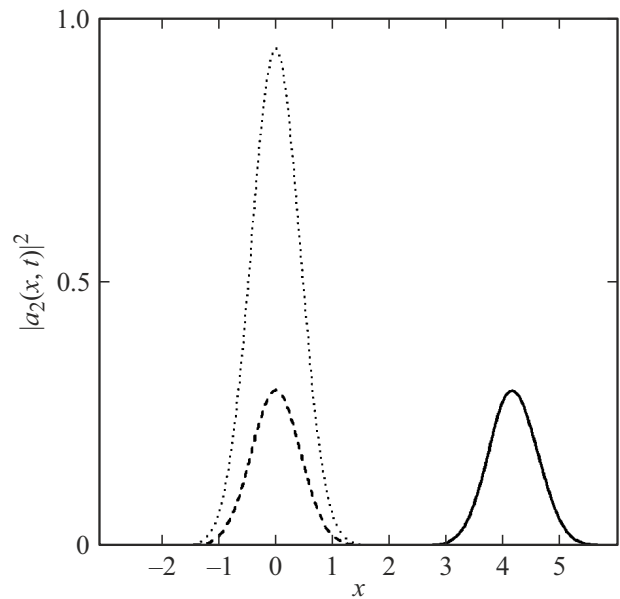


Рис. 1. Штриховая и сплошная кривые описывают распределение населенности $|a_2(x, t)|^2 \cdot 10$ в моменты времени $t = t_p$ и $t = 350t_p$ соответственно. Пунктирной кривой представлено начальное распределение населенности БЭК $|a_0(x, t = 0)|^2$.

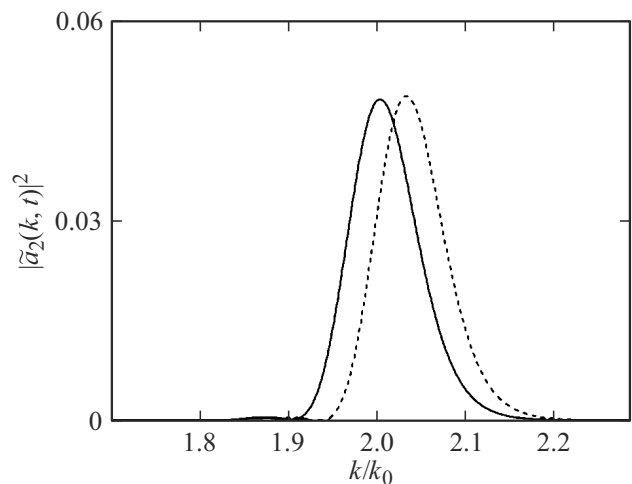


Рис. 2. Форма импульсного распределения облака a_2 в два момента времени: $t = t_p$ — штриховая кривая, $t = 350t_p$ — сплошная кривая.

амплитуд $a_{\pm j}(x, t) \exp(\pm i j k_0 x)$:

$$\tilde{a}_{\pm j}(k, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-ikx) \times a_{\pm j}(x, t) \exp(\pm i j k_0 x) dx. \quad (10)$$

Полученные результаты для облака a_2 показаны на рис. 2.

Как мы выяснили, положительный сдвиг максимума распределения по отношению к значению $2\hbar k_0$, который

демонстрируется в момент времени $t = t_p$, обусловлен воздействием на конденсат вторичного поля E' , индуцированного поляризованностью среды. Замедление скорости движения облака a_2 к моменту времени $t = 350t_p$ вызвано влиянием потенциала ловушки.

Оценка когерентности рассеянных атомных состояний

Сравним рассеянные атомные состояния с когерентными состояниями гармонического осциллятора [27].

Напомним, что квантовыми когерентными состояниями осциллятора называют собственные функции оператора понижения

$$\hat{a} = \sqrt{\frac{m\Omega}{2\hbar}} \left(x + \frac{\hbar}{m\Omega} \frac{\partial}{\partial x} \right), \quad (11)$$

$$\hat{a}\psi_a(x) = a\psi_a(x),$$

где m — масса осциллятора, Ω — собственная частота гармонической ловушки, $a = \alpha + i\beta$ — комплексное собственное значение. Легко убедиться непосредственной подстановкой, что решение уравнения (11) может быть выражено через волновую функцию основного состояния гармонического осциллятора со смещенным значением аргумента:

$$\psi_a(x) = \left(\frac{m\Omega}{\hbar\pi} \right)^{1/4} e^{-\beta^2} e^{-[(\frac{m\Omega}{2\hbar})^{1/2}x - a]^2}$$

$$= \left(\frac{m\Omega}{\hbar\pi} \right)^{1/4} e^{-[(\frac{m\Omega}{2\hbar})^{1/2}x - a]^2} e^{2i\beta[(\frac{m\Omega}{2\hbar})^{1/2}x - a]}. \quad (12)$$

Применяя к функции (12) преобразование Фурье, получаем волновую функцию когерентного состояния гармонического осциллятора в импульсном представлении:

$$\Phi_a(p) = (\pi\hbar m\Omega)^{-1/4} e^{-\beta^2} e^{-[\frac{p}{\sqrt{2\hbar m\Omega}} + ia]^2} e^{-a^2}$$

$$= (\pi\hbar m\Omega)^{-1/4} e^{-[\frac{p}{\sqrt{2\hbar m\Omega}} - \beta]^2} e^{-2i\alpha[\frac{p}{\sqrt{2\hbar m\Omega}}]}. \quad (13)$$

Если атом, находящийся в основном состоянии гармонической ловушки, получает дополнительный импульс p_0 , то его состояние можно описать волновой функцией

$$\Phi(p - p_0) = (\pi\hbar m\Omega)^{-1/4} e^{-[\frac{p - p_0}{\sqrt{2\hbar m\Omega}}]^2}. \quad (14)$$

Мы видим, что это состояние совпадает с когерентным состоянием при

$$ia = -\frac{p_0}{\sqrt{2\hbar m\Omega}}, \quad (15)$$

т.е. $\alpha = 0$, $\beta = \frac{p_0}{\sqrt{2\hbar m\Omega}}$ в этом случае $e^{-a^2} = e^{\beta^2}$.

Развитие во времени когерентного состояния осуществляется заменой $a \rightarrow ae^{-i\Omega t}$ [27], в нашем случае

$$a = \frac{ip_0}{\sqrt{2\hbar m\Omega}} \rightarrow \frac{ip_0e^{-i\Omega t}}{\sqrt{2\hbar m\Omega}}$$

$$= \frac{p_0 \sin \Omega t}{\sqrt{2\hbar m\Omega}} + i \frac{p_0 \cos \Omega t}{\sqrt{2\hbar m\Omega}}. \quad (16)$$

Следовательно, в момент времени t параметры a и b будут иметь значения

$$\alpha(t) = \frac{p_0 \sin \Omega t}{\sqrt{2\hbar m\Omega}},$$

$$\beta(t) = \frac{p_0 \cos \Omega t}{\sqrt{2\hbar m\Omega}}, \quad (17)$$

и волновые функции (12) и (13) принимают вид

$$\psi(x, t) = \left(\frac{m\Omega}{\hbar\pi} \right)^{1/4} e^{-\frac{m\Omega}{2\hbar} [x - \frac{p_0}{m\Omega} \sin \Omega t]^2}$$

$$\times e^{i\frac{p_0 x}{\hbar} \cos \Omega t} e^{-i\frac{p_0^2}{\hbar m\Omega} \sin \Omega t \cos \Omega t}, \quad (18)$$

$$\varphi(p, t) = (\pi\hbar m\Omega)^{-1/4}$$

$$\times e^{\frac{(p - p_0 \cos \Omega t)^2}{2\hbar m\Omega}} e^{-i\frac{p_0 p \sin \Omega t}{\hbar m\Omega}}. \quad (19)$$

Для квадратов модулей этих функций имеем

$$|\psi(x, t)|^2 = \left(\frac{m\Omega}{\hbar\pi} \right)^{1/2}$$

$$\times e^{-\frac{(m\Omega)}{\hbar} [x - \frac{p_0}{m\Omega} \sin(\Omega t)]^2}, \quad (20)$$

$$|\varphi(p, t)|^2 = (\pi\hbar m\Omega)^{-1/2} e^{-\frac{[p - p_0 \cos(\Omega t)]^2}{\hbar m\Omega}}, \quad (21)$$

откуда следует, что распределения (20) и (21), не меняя формы, совершают гармонические колебания вдоль осей абсцисс с частотой Ω .

Вясним, в какой мере состояния a_j , полученные нами в результате решения системы уравнений Максвелла-Шрёдингера, можно рассматривать как когерентные. Такая возможность вызвана тем, что эти атомные состояния, появляющиеся в результате рассеяния света на БЭК, близки, как мы видели, к основному состоянию гармонического осциллятора, получившего импульс отдачи. Но передача импульса происходит не мгновенно, а в течение конечного времени взаимодействия БЭК с лазерным полем. Этим обусловлено отличие найденных нами состояний a_j от когерентных состояний (18), (19).

Для оценки степени когерентности полученных состояний сравним их длины когерентности с длиной

когерентности $L_{\text{cog}} = \frac{\lambda^2}{\Delta\lambda}$ состояния (19). Эту величину применяют в оптике для определения максимальной разности хода излучения, допускающей интерференцию при заданной неопределенности $\Delta\lambda$ длины волны, [29]. Используя очевидное соотношение $\Delta k = \frac{2\pi}{\lambda^2} \Delta\lambda$, получаем $L_{\text{cog}} = \frac{2\pi}{\Delta k}$. Приняв для оценки неопределенности Δk корень из дисперсии импульсного распределения, для когерентного состояния (19) находим $\Delta k = \sqrt{\frac{m\Omega}{2\hbar}}$. Отметим, что неопределенность волнового числа и длина когерентности в этом случае не зависят от времени. Для выбранных исходно параметров системы имеем $\Delta k/k_0 = 0.0364$ и $L_{\text{cog}}/\lambda = 27.5$.

Вычисления этих характеристик на основании полученных решений системы уравнений Максвелла-Шрёдингера показали, что при увеличении времени наблюдения неопределенность импульса атома увеличивается и длина когерентности рассеянной атомной волны снижается, но всё же остаются близкими к значениям для когерентного состояния. Так, для состояния a_2 в момент времени $t = t_p$ мы получили $\Delta k/k_0 = 0.0417$ и $L_{\text{cog}}/\lambda = 24.0$, а в момент времени $t = 350t_p$ — $\Delta k/k_0 = 0.0422$ и $L_{\text{cog}}/\lambda = 23.7$.

Заключение

С помощью решения системы уравнений Максвелла-Шрёдингера описано образование движущихся атомных облаков при рассеянии света на бозе-эйнштейновском конденсате разреженного газа, заключенного в гармоническую ловушку. Анализ полученных нами результатов показал, насколько генерируемые таким образом атомные состояния близки к когерентным квантовым состояниям гармонического осциллятора с значением импульса, сдвинутым на величину фотонной отдачи. Проведенные нами оценки когерентности позволяют рассматривать генерируемые таким образом атомные состояния перспективными для использования их в области атомной интерферометрии.

Благодарности

Авторы выражают благодарность А.С. Трошину за обсуждение.

Финансирование работы

Работа Ю.А. Аветисяна выполнена в рамках государственного задания Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (тема № 121022000123-8).

Список литературы

- [1] S. Inouye, A.P. Chikkatur, D.M. Stamper-Kurn, J. Stenger, D.E. Pritchard, W. Ketterle. *Science*, **285**, 571 (1999). DOI: 10.1126/science.285.5427.571
- [2] S. Inouye, R.F. Löw, S. Gupta, T. Pfau, A. Görlitz, T.L. Gustavson, D.E. Pritchard, W. Ketterle. *Phys. Rev. Lett.*, **85**, 4225 (2000). DOI: 10.1103/PhysRevLett.85.4225
- [3] D. Schneble, Y. Torii, M. Boyd, E.W. Streed, D.E. Pritchard, W. Ketterle. *Science*, **300**, 475 (2003). DOI: 10.1126/science.1083171
- [4] G.K. Campbell, A.E. Leanhardt, J. Mun, M. Boyd, E.W. Streed, W. Ketterle, D.E. Pritchard. *Phys. Rev. Lett.*, **94**, 170403 (2005). DOI: 10.1103/PhysRevLett.94.170403
- [5] M.G. Moore, P. Meystre. *Phys. Rev. Lett.*, **83**, 5202 (1999). DOI: 10.1103/PhysRevLett.83.5202
- [6] Ö.E. Müstecaplıoğlu, L. You. *Phys. Rev. A*, **62**, 063615 (2000). DOI: 10.1103/PhysRevA.62.063615
- [7] Е.Д. Трифонов. *ЖЭТФ*, **120**, 1117 (2001). [E.D. Trifonov. *JETP*, **93**, 969 (2001)].
- [8] S. Gupta, K. Dieckmann, Z. Hadzibabic, D.E. Pritchard. *Phys. Rev. Lett.*, **89**, 140401 (2002). DOI: 10.1103/PhysRevLett.89.140401
- [9] E.D. Trifonov. *Las. Phys.*, **12**, 211 (2002).
- [10] Yu.A. Avetisyan, E.D. Trifonov. *Las. Phys. Lett.*, **1** (7), 373 (2004).
- [11] G.R.M. Robb, N. Piovella, R. Bonifacio. *J. Opt. B*, **7**, 93 (2005). DOI: 10.1088/1464-4266/7/4/002
- [12] Л.П. Питаевский. *УФН*, **176** (4), 345 (2006). DOI: 10.3367/UFNr.0176.200604a.0345 [L.P. Pitaevskii. *Phys. Usp.*, **49**, 333 (2006). DOI: 10.1070/PU2006v049n04ABEH006006].
- [13] Y. Le Coq, J.A. Retter, S. Richard, A. Aspect, P. Bouyer. *Appl. Phys. B*, **84**, 627 (2006). DOI: 10.1007/s00340-006-2363-2
- [14] Ю.А. Аветисян, Е.Д. Трифонов. *ЖЭТФ*, **130**, 771 (2006).
- [15] Ю.А. Аветисян, Е.Д. Трифонов. *Опт. и спектр.*, **105**, 613 (2008).
- [16] O. Zobay. *Las. Phys.*, **19**, 700 (2009). DOI: 10.1134/S1054660X09040252
- [17] Yu.A. Avetisyan, E.D. Trifonov. *Phys. Rev. A*, **88**, 025601 (2013).
- [18] C.J. Zhu, L. Deng, E.W. Hagley, G.X. Huang. *Laser Phys.*, **24**, 065402 (2014). DOI: 10.1088/1054-660X/24/6/065402
- [19] C. Hang, G. Gabadadze, G. Huang. *Phys. Rev. A*, **92**, 033805 (2015). DOI: 10.1103/PhysRevA.96.051603
- [20] Ю.А. Аветисян, Е.Д. Трифонов. *УФН*, **185** (3), 307 (2015). DOI: 10.3367/UFNr.0185.201503c.0307 [Yu.A. Avetisyan, E.D. Trifonov. *Phys. Usp.*, **58**, 286 (2015). DOI: 10.3367/UFNe.0185.201503c.0307].
- [21] I. Dimitrova, W. Lunden, J. Amato-Grill, N. Jepsen, Y. Yu, M. Messer, T. Rigaldo, G. Puentes, D. Weld, W. Ketterle. *Phys. Rev. A*, **96**, 051603(R) (2017). DOI: 10.1103/PhysRevA.96.051603
- [22] Yu.A. Avetisyan, V.A. Malyshev, E.D. Trifonov. *J. Phys. B*, **50**, 085002 (2017).
- [23] R. Ayllon, J.T. Mendonça, A.T. Gisbert, N. Piovella, G.R.M. Robb. *Phys. Rev. A*, **100**, 023630 (2019). DOI: 10.1103/PhysRevA.100.023630
- [24] V.B. Bobrov, S.A. Trigger. *J. of Low Temp. Phys.*, **200**, 118 (2020). DOI: 10.1007/s10909-020-02473-8
- [25] Ю.А. Аветисян, В.А. Малышев, Е.Д. Трифонов. *ЖЭТФ*, **157**, 454 (2020). DOI: 10.31857/S0044451020030062

- [26] E. Schrödinger. *Naturwissenschaften*, **14**, 664 (1926).
- [27] Р. Глаубер. *Оптическая когерентность и статистика фотонов* (Мир, М., 1966).
- [28] M.G. Benedict, A.M. Ermolaev, V.A. Malyshev, I.V. Sokolov, E.D. Trifonov. *Super-radiance: Multiatomic Coherent Emission* (IOP Publishing, Bristol, 1996).
- [29] M. Born, E. Wolf. *Principles of optics* (Pergamon Press, 1968). [М. Борн, Э. Вольф. *Основы оптики* (Наука, М., 1973)].