Метод расчета концентрации релятивистских заряженных частиц

© Л.А. Бакалейников, В.И. Кузнецов, Е.Ю. Флегонтова, Д.П. Барсуков, И.К. Морозов

Физико-технический институт им. А.Ф. Иоффе РАН, Санкт-Петербург, Россия
E-mail: morozov22505@gmail.com

Поступило в Редакцию 24 апреля 2024 г.
В окончательной редакции 11 июля 2024 г.
Принято к публикации 30 октября 2024 г.

Развит Q, G-метод для изучения нестационарных процессов в бесстолкновительной плазме с релятивистскими частицами. Предложен способ расчета концентрации заряженных частиц, которые вылетают с эмиттера и движутся без столкновений в нестационарном электрическом поле произвольного вида. Получены аналитические выражения для концентрации частиц и тока при малом возмущении электрического поля. На основе полученных выражений построена теория устойчивости стационарных состояний релятивистского диода Бурсиана в отсутствие отражения электронов от потенциальных барьеров.

Ключевые слова: плазменный диод, релятивистские пучки электронов и позитронов, устойчивость решений.

DOI: 10.61011/PJTF.2024.24.59435.6385k

Плазма во многих астрофизических объектах [1], а также в лабораторных установках [2] часто содержит заряженные частицы, ускоренные до релятивистских скоростей. Одним из наиболее сложных объектов с релятивистской плазмой являются открытые около 50 лет назад пульсары, природа генерации радиочастотного излучения которых до сих пор не выяснена [3]. Как правило, в указанных объектах потоки заряженных частиц вылетают с поверхности эмиттера с известной функцией распределения по скоростям (ФРС) и движутся без столкновений в нестационарном электрическом поле. В работе [4] предложен Q, G-метод расчета концентрации нерелятивистских частиц. Он основан на использовании аналитического выражения, которое представляет собой интеграл по областям начальных скоростей на эмиттере. По сравнению со стационарным случаем [5] это выражение содержит две дополнительные функции: G и Q, которые связаны с изменением поля во времени. Для них в [4] были получены точные выражения. В настоящей работе такой метод развит для релятивистских частиц. Продемонстрировано, что с его помощью удается исследовать устойчивость стационарных состояний диода Бурсиана с релятивистскими электронами, построенных в работе [5].

Рассматриваем диод плоской геометрии с расстоянием d и разностью потенциалов U между электродами. Считаем, что релятивистский поток электронов поступает с электрода с известной ФРС $f_0(v_0, t_0)$ и движется в нестационарном электрическом поле без столкновений.

Уравнение движения релятивистского электрона с импульсом $p = \gamma m v$ (где $\gamma = \left[1 - v^2/c^2\right]^{-1/2}$ – релятивистский фактор, c – скорость света, m – масса электрона) в электрическом поле $E(z, t)$ имеет вид

$$\frac{dp}{dt} = -eE(z, t) = e\frac{\partial}{\partial z}\varphi(z, t). \tag{1}$$

Здесь e – заряд электрона, $\varphi(z, t)$ – потенциал. Умножая (1) на скорость v и используя выражения для кинетической энергии $W_{kin} = (\gamma - 1)mc^2$ и ее производной $\frac{dW_{kin}}{dt} = v\frac{dp}{dt}$, получим закон сохранения энергии с дополнительным членом в правой части — $eG(z, t; v_0, t_0)$:

$$(\gamma - 1)mc^2 - e\varphi - (\gamma_0 - 1)mc^2$$
$$= -e\int\limits_{t_0}^{t} dt' \frac{\partial}{\partial t'}\varphi(z, t')\Big|_{z=z(t'; v_0, t_0)} \equiv eG(z, t; v_0, t_0). \tag{2}$$

Здесь γ_0 – релятивистский фактор на эмиттере. Величина $e\,G(z, t; v_0, t_0)$ – количество энергии, которое приобретает электрон, покинувший эмиттер со скоростью v_0 в момент t_0 и прилетевший в точку z в момент времени t при движении в нестационарном поле. Уравнение (2) связывает скорость частицы в точке (t, z) с ее скоростью в момент вылета.

При вычислении концентрации частиц следуем работе [4]. Мысленно разбиваем ФРС на эмиттере на группы („пучки“) электронов, вылетающих с эмиттера со скоростями из узкого интервала $(v_0,\ v_0 + \Delta v_0)$ за короткий промежуток времени $(t_0,\ t_0 + \Delta t_0)$. Считаем, что для каждого пучка концентрация $\Delta n(z, t; v_0, t_0)$ связана с его средней скоростью $v(z, t; v_0, t_0)$ по формуле, аналогичной формуле (5) из работы [4]:

$$\Delta n(z, t; v_0, t_0) = \frac{f_0(v_0, t_0) v_0 dv_0}{\left|D(z, t; v_0, t_0)\right|},$$

$$D(z, t; v_0, t_0) = -\frac{\partial}{\partial t_0} z(t, v_0, t_0). \tag{3}$$

Эту связь можно получить при использовании закона сохранения энергии для частицы и уравнения неразрывности для пучка.

Для отыскания траектории электрона, вылетевшего с эмиттера со скоростью v_0 в момент t_0, проинтегрируем уравнение движения (1) один раз. Это дает

$$p(t; v_0, t_0) = m\gamma_0 v_0 - e\int_{t_0}^{t} dt' E[z(t'; v_0, t_0), t'] \equiv F(t; v_0, t_0). \quad (4)$$

Отсюда находим скорость v

$$v(t; v_0, t_0) = \frac{d}{dt} z(t; v_0, t_0) = \frac{F(t; v_0, t_0)}{[m^2 + F^2(t; v_0, t_0)/c^2]^{1/2}}. \quad (5)$$

Решая дифференциальное уравнение (5), находим траекторию $z(t; v_0, t_0)$:

$$z(t; v_0, t_0) = \int_{t_0}^{t} dt' \frac{F(t'; v_0, t_0)}{[m^2 + F^2(t'; v_0, t_0)/c^2]^{1/2}} = \int_{0}^{t-t_0} dt' \frac{F(t' + t_0; v_0, t_0)}{[m^2 + F^2(t + t_0'; v_0, t_0)/c^2]^{1/2}}. \quad (6)$$

Для функций $D(z, t; v_0, t_0)$ и $Q(z, t; v_0, t_0)$ получаем

$$D(z, t; v_0, t_0) = v(t; v_0, t_0) + e\, m^2 \times \int_0^{t-t_0} dt' \, \frac{\int_0^{t'} dt'' \frac{d}{dt_0} E[z(t'' + t_0; v_0, t_0), t'' + t_0]}{[m^2 + F^2(t' + t_0)/c^2]^{3/2}},$$

$$Q(z, t; v_0, t_0) = v - D = -e\, m^2 \times \int_0^{t-t_0} dt' \, \frac{\int_0^{t'} dt'' \frac{d}{dt_0} E[z(t'' + t_0; v_0, t_0), t'' + t_0]}{[m^2 + F^2(t' + t_0)/c^2]^{3/2}}. \quad (7)$$

Для расчета концентрации суммируем вклады от всех пучков, которые могут попасть в точку z в момент времени t:

$$n(z, t) = \sum_{i=0,1} \int_{\Omega_i(z,t)} \frac{f_0(v_0)\, v_0 dv_0}{|v(z, t; v_0, t_0) - Q(z, t; v_0, t_0)|},$$

$$v(z, t; v_0, t_0) = c\, \frac{\left(\left\{\gamma_0 + e/(mc^2)[\varphi(z, t) + G(z, t; v_0, t_0)]\right\}^2 - 1\right)^{1/2}}{\gamma_0 + e/(mc^2)\,[\varphi(z, t) + G(z, t; v_0, t_0)]}. \quad (8)$$

Здесь $i = 0$ и 1 соответствуют частицам, прилетающим в точку z с положительными и отрицательными скоростями. Связь между скоростью v_0 и временем вылета t_0 частиц с границы можно найти, получив решение уравнения движения (6). Кроме того, при заданных значениях z и t области $\Omega_i(z, t)$ определяются из вида кривой $v_0 = v_0(t_0; t, z)$.

Рассмотрим движение частиц без отражений от потенциальных барьеров в слабо возмущенном поле, т. е. будем считать, что

$$\varphi(z, t) = \varphi_0(z) + \tilde{\varphi}(z) \exp(-i\,\omega t), \quad |\tilde{\varphi}(z)| \ll |\varphi_0(z)|. \quad (9)$$

Как и в нерелятивистском случае, считаем, что $G(z, t) = \tilde{G}(z) \exp(-i\,\omega t)$, $\quad Q(z, t) = \tilde{Q}(z) \exp(-i\omega t)$. Найдем $\tilde{Q}(z)$. Прежде всего, используя (9), найдем производную от поля E по t_0

$$\frac{d}{dt_0} E[z(t + t_0; v_0, t_0), t + t_0] = \left[i\,\omega \frac{d\tilde{\varphi}(z)}{dz} - \varphi_0''\, \tilde{Q}(z)\right] \exp[-i\omega\,(t + t_0)]. \quad (10)$$

Подстановка этого выражения в (7) приводит к интегральному уравнению для $\tilde{Q}(z)$. Заменяя переменную интегрирования t в подынтегральном выражении переменной z $(dt = dz/v(z))$ и переходя от $\tilde{Q}(z)$ к новой функции $W(z) = \tilde{Q}(z) \exp[-i\,\omega\,\sigma(z)]$, получим

$$W(z) = \int_0^z \frac{dx}{v(x)\gamma^3(x)} \int_0^x \frac{dy}{v(y)} \times \left\{(vv'\gamma^3)' W(y) - i\omega \frac{e}{m} \frac{d\tilde{\varphi}(y)}{dy} \exp\left[-i\omega\sigma(y)\right]\right\}. \quad (11)$$

Здесь $\sigma(z) = \int_0^z \frac{dx}{v(x)}$ – время пролета до точки z. Это интегральное уравнение Вольтерры может быть решено методом, предложенным в [4]. В результате находим $W(z)$ и $\tilde{Q}(z)$

$$\tilde{Q}(z) = -i\omega \frac{e}{m} v(z) \exp\left[i\omega\sigma(z)\right] \times \int_0^z \frac{dx}{v^3(x)\gamma^3(x)} \int_0^x dy\, \tilde{\varphi}'(y) \exp\left[-i\omega\sigma(y)\right]. \quad (12)$$

Интересно отметить, что выражение (12) для $\tilde{Q}(z)$ отличается от нерелятивистского случая только наличием множителя γ^3 в знаменателе внешнего интеграла.

Формула для $\tilde{G}(z)$ имеет такой же вид, как и в нерелятивистском случае [4]:

$$\tilde{G}(z; v_0, t_0) = -\tilde{\varphi}(z) + \int_0^z dx\, \tilde{\varphi}'(x) \exp\left\{i\omega\left[\sigma(z) - \sigma(x)\right]\right\}. \quad (13)$$

Разработанный метод позволяет исследовать устойчивость стационарных распределений потенциала в диоде Бурсиана, найденных в [5]. При этом удобно перейти к безразмерным величинам, используя энергию электронов, входящих с левой границы, и длину Дебая на

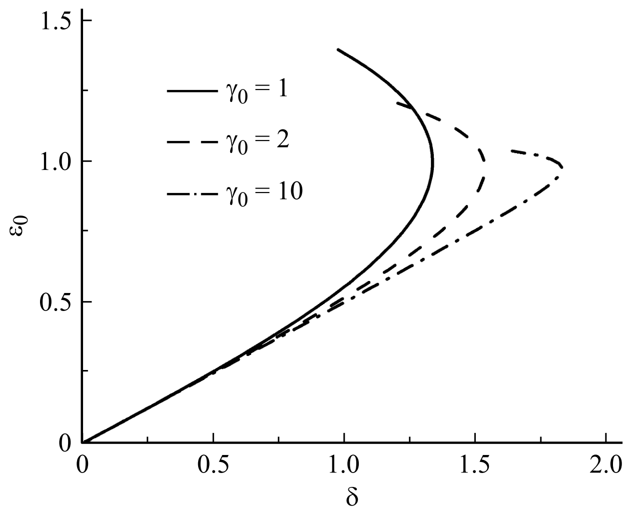

Рис. 1. Ветви стационарных решений для диода Бурсиана при различных значениях релятивистского фактора γ_0. Разность потенциалов между электродами $V = 0$.

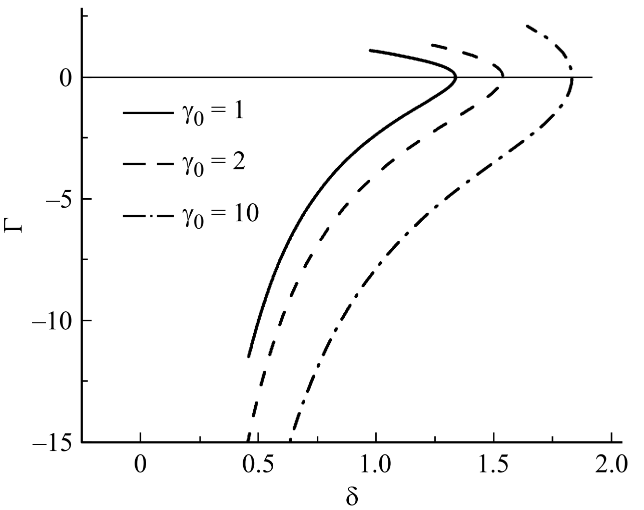

Рис. 2. Зависимости инкремента Γ от величины δ для стационарных решений в диоде Бурсиана, соответствующих ветвям на рис. 1.

левой границе в качестве единиц энергии и длины [5]: $W_0 = (\gamma_0 - 1)m_0c^2$, $\lambda_D = \left[(2\tilde{\varepsilon}_0 W_0)/(e^2 n_0)\right]^{1/2}$. В качестве единицы скорости используем $v_0 = c\sqrt{\gamma_0^2 - 1}/\gamma_0$. Для безразмерных координаты, потенциала, напряженности электрического поля, скорости и времени имеем $\xi = z/\lambda_D$, $\eta = e\varphi/(2W_0)$, $\varepsilon = eE\lambda_D/(2W_0)$, $u = v/v_0$, $\tau = t/(\lambda_D/v_0)$. Безразмерная длина зазора и разность потенциалов между электродами определяются формулами $\delta = d/\lambda_D$, $V = eU/(2W_0)$. Стационарные решения удобно изображать точками на плоскости $\{\varepsilon_0, \delta\}$, где ε_0 – безразмерная напряженность электрического поля на эмиттере. Для фиксированного V эти точки ложатся на непрерывные кривые – ветви стационарных решений. Для режима без отражения электронов, который рассматривается в настоящей работе, такие ветви, соответствующие $V = 0$, показаны на рис. 1 для ряда значений γ_0. Нижние части ветвей в литературе принято называть ветвями normal, а верхние – ветвями overlap. Отметим, что ветви overlap обрываются слева в точках, где начинаются решения с отражением электронов от виртуального катода.

Для изучения устойчивости стационарных решений подставим концентрацию электронов (8) в уравнение Пуассона, в котором распределение потенциала имеет вид (9), и проведем линеаризацию по амплитуде малого возмущения $\tilde{\varphi}$. В результате получим интегро-дифференциальное уравнение для $\tilde{\varphi}$, содержащее $\tilde{G}$ и $\tilde{Q}$. Используем для этих функций выражения (12) и (13). Полученное уравнение можно один раз проинтегрировать по z. Это дает интегральное уравнение для $\tilde{\varphi}'(z)$. В том случае, когда ФРС электронов на эмиттере является δ-функцией, уравнение для амплитуды в безразмерных переменных принимает вид

$$\tilde{\eta}'(\xi) + \frac{2\gamma_0^2}{\gamma_0 + 1}\int_0^{\xi} \frac{dx}{u^3(x)\gamma^3(x)} \int_0^{x} dy\, \tilde{\eta}'(y) \times \exp\{i\Omega[q(\xi) - q(y)]\} = -\frac{i}{\Omega}\tilde{J}. \tag{14}$$

Здесь $q = \int_0^{\xi} \frac{dx}{u(x)}$ – безразмерное время пролета электрона от эмиттера до точки ξ; $\Omega = \omega/(\lambda_D/v_0)$ — безразмерная частота, а $\tilde{J}$ — безразмерная амплитуда возмущения полного тока. Производная берется по координате ξ.

Чтобы решить уравнение (14), необходимо рассчитать характеристики стационарных решений: u и γ. Используя выражение для импульса релятивистского электрона, уравнение (1) и уравнение Пуассона, для этих величин получаем

$$u(q)\gamma(q) = \frac{\gamma_0^2}{\gamma_0 + 1}q^2 - \frac{2\gamma_0^2}{\gamma_0 + 1}q + \gamma_0 = f(q),$$

$$u(q) = \frac{f(q)}{\left\{1 + [(\gamma_0^2 - 1)/\gamma_0^2] f^2(q)\right\}^{1/2}},$$

$$\xi(q) = \int_0^{q} \frac{dt\, f(t)}{\left\{1 + [(\gamma_0^2 - 1)/\gamma_0^2]\, f^2(t)\right\}^{1/2}}. \tag{15}$$

Используя закон сохранения энергии (2), получаем зависимость потенциала η от q

$$\eta(q) = -\frac{1}{2} + \frac{(\gamma_0 + 1) f^2(q)}{2\gamma_0^2 \left\{\left[((\gamma_0^2 - 1)/\gamma_0^2) f^2(q) + 1\right]^{1/2} + 1\right\}}. \tag{16}$$

Из формул (15) и (16) видно, что в релятивистском диоде стационарные решения определяются тремя внешними параметрами: δ, V и релятивистским фактором γ_0.

Для исследования устойчивости полученных распределений потенциала будем решать уравнение (14) численно. Прежде всего поделим его на $\tilde{\eta}'(0) = -\frac{i}{\Omega}\tilde{J}$ и введем $\Psi(\xi;\Omega) = \tilde{\eta}'(\xi)/\tilde{\eta}'(0)\exp(-i\Omega\tau(\xi))$. Меняя порядок интегрирования в двойном интеграле в (14) и умножая все уравнение на $\exp\big(-i\Omega\tau(\xi)\big)$, получим

$$\Psi(\xi;\Omega) + \frac{2\gamma_0^2}{\gamma_0+1}\int\limits_0^{\xi} K(\xi,y)\Psi(y;\Omega)dy = \exp\big(-i\Omega\tau(\xi)\big),$$

$$K(\xi,y) = \int\limits_y^{\xi} \frac{dx}{\big(u(x)\gamma(x)\big)^3}. \qquad (17)$$

Разобьем весь интервал $[0,\delta]$ на N интервалов длины h с границами ξ_i, $i = 0, 1, \ldots, N$ так, что $0 = \xi_0 < \xi_1 < \cdots < \xi_N = \delta$, и заменим интегралы суммами. Получим систему линейных уравнений для определения значения неизвестной функции $\Psi(\xi_i;\Omega)$ в узлах ξ_i.

Соотношение, определяющее связь между Ω и δ (дисперсионное уравнение), в дискретной форме имеет вид

$$\sum_{j=1}^{N-1}\Psi(\xi_j;\Omega)\exp\big(i\Omega\tau(\xi_j)\big) + \frac{1}{2}\big[\Psi\big(\xi_N;\Omega\big)\exp\big(i\Omega\tau(\xi_N)\big) + 1\big] = 0.$$

Из этого соотношения находим $\Omega(\delta)$ и определяем устойчивость ветвей. Дисперсионные ветви устойчивости показаны на рис. 2. Для нерелятивистского диода ($\gamma_0 = 1$) зависимости $\Gamma(\delta)$ совпадают с построенными в работе [6]. Из рис. 2 видно, что ветви normal, как и в нерелятивистском случае, являются апериодически устойчивыми, а ветви overlap – неустойчивыми относительно малых возмущений.

Итак, в настоящей работе разработан аналитический метод вычисления концентрации релятивистских заряженных частиц, вылетающих с эмиттера с известной ФРС и движущихся в нестационарном электрическом поле без столкновений. С использованием полученного выражения для концентрации частиц предложен метод исследования устойчивости решений для диода с релятивистскими частицами для случая их движения без отражения от потенциальных барьеров. Получены аналитические выражения для функций G и Q в случае малого возмущения электрического поля. В качестве примера исследована устойчивость стационарных состояний диода Бурсиана с релятивистскими электронами [5]. Разработанный метод может быть использован для изучения устойчивости диодов с релятивистскими потоками заряженных частиц.

Конфликт интересов

Авторы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

Список литературы

[1] H. Chen, F. Fiuza, Phys. Plasmas, **30**, 020601 (2023). DOI: 10.1063/5.0134819.

[2] K. Qu, S. Meuren, N.J. Fisch, Phys. Plasmas, **29** (4), 042117 (2022). DOI: 10.1063/5.0078969

[3] В.С. Бескин, УФН, **188** (4), 377 (2018). DOI: 10.3367/UFNr.2017.10.038216 [V.S. Beskin, Phys. Usp., **61** (4), 353 (2018). DOI: 10.3367/UFNe.2017.10.038216].

[4] В.И. Кузнецов, А.Я. Эндер, Физика плазмы, **41** (3), 262 (2015). [V.I Kuznetsov, A.Ya. Ender, Plasma Phys. Rep., **41** (3), 240 (2015). DOI: 10.1134/S1063780X15020063].

[5] A.Ya. Ender, V.I. Kuznetsov, H. Schamel, Phys. Plasmas, **18** (3), 033502 (2011). DOI: 10.1063/1.3562115

[6] В.И. Кузнецов, А.Я. Эндер, Физика плазмы, **41** (11), 976 (2015). [V.I. Kuznetsov, A.Ya. Ender, Plasma Phys. Rep., **41** (11), 905 (2015). DOI: 10.1134/S1063780X15110069].