

07

## Динамика перепутанных состояний в трехкубитной модели Тависа-Каммингса

© А.Р. Багров, Е.К. Башкиров

Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева,  
Самара, Россия

e-mail: alexander.bagrov@mail.ru

Поступила в редакцию 03.05.2024 г.

В окончательной редакции 04.07.2024 г.

Принята к публикации 30.10.2024 г.

Рассмотрена модель, состоящая из трех идентичных кубитов, один из которых находится в свободном состоянии, а два других заперты в идеальном резонаторе со средней Керра и резонансно взаимодействуют с выделенной модой этого резонатора. Проведен расчет степени совпадения для двух истинно перепутанных состояний W-типа и состояния GHZ-типа и теплового состояния поля резонатора. Исследовано влияние интенсивности теплового шума резонатора и керровской нелинейности на степень совпадения состояний кубитов. Показано, что тепловое поле резонатора не разрушает полностью начальные перепутанные состояния кубитов даже для относительно высоких интенсивностей теплового шума резонатора. Установлено также, что керровская нелинейность резонатора приводит к стабилизации начального перепутывания кубитов.

**Ключевые слова:** кубиты, истинно перепутанные состояния W- и GHZ-типа, тепловое поле, керровская нелинейность, степень совпадения состояний кубитов.

DOI: 10.61011/OS.2024.11.59498.6586-24

### Введение

Многокубитные квантовые перепутанные состояния (entangled states) играют ключевую роль в квантовых вычислениях [1]. В предыдущие десятилетия особое внимание уделялось изучению перепутанных состояний двухкубитных систем. Во многом этот интерес был обусловлен тем, что двухкубитные гейты (gates), такие как контролируемое „НЕ“ и однокубитные вращения, образуют полный набор универсальных гейтов, необходимых для работы квантового компьютера [2]. В качестве альтернативы в квантовых вычислениях могут быть использованы трехкубитные гейты, такие как, например, гейты Тоффоли [3]. Трехкубитные гейты играют важную роль также в таких приложениях, как квантовая коррекция ошибок или упрощение квантовых цепей [1]. В этой связи в последнее время появилось большое число теоретических и экспериментальных работ (см. ссылки в [4]). Для трехкубитных систем существуют два неэквивалентных класса истинно перепутанных состояний: состояния Гринбергера-Хорна-Цайлингера (GHZ-состояния) и состояния Вернера (W-состояния). Трехкубитные состояния обоих типов в настоящее время экспериментально реализованы для различных типов кубитов (см. ссылки в [4]).

Для генерации, контроля и управления перепутанными состояниями кубитов обычно используют электромагнитные поля резонаторов. Для теоретического описания динамики кубитов используют модель Джейнса-Каммингса и ее обобщения. В последнее время большое внимание уделяется изучению динамики кубитов, взаи-

модействующих с тепловыми полями резонаторов (см. ссылки в работе [4]). Это связано с тем, что резонаторы, используемые в квантовых информационных процессах, имеют конечные температуры (от нано- и милликельвинов до комнатных температур) [1]. Взаимодействие кубитов с тепловыми фотонами резонаторов может приводить к осцилляциям Раби параметров перепутывания кубитов, а также к мгновенной смерти перепутывания кубитов (sudden death of entanglement), что приводит к возникновению дополнительных ошибок.

В нашей работе [4] была рассмотрена динамика перепутывания трехкубитной модели, в которой два кубита заперты в одномодовом идеальном резонаторе и взаимодействуют с одномодовым тепловым полем данного резонатора, а третий кубит находится в свободном состоянии. При этом в качестве критерия перепутывания кубитов была использована отрицательность пар кубитов. Однако в случае GHZ-состояний более информативным является критерий перепутывания кубитов, называемый степенью совпадения или чистотой (fidelity) [5]. В случае W-состояний такой критерий важен в случае рассмотрения схем генерации трехкубитных перепутанных состояний, которые нельзя разделить на смеси двухкубитных перепутанных состояний.

Недавно было показано, что керровская среда в микроволновом резонаторе может оказать существенное влияние на динамику сверхпроводящих кубитов (транзмонов). В этой связи в ряде теоретических работ было показано, что керровская нелинейность может способствовать стабилизации перепутывания кубитов в

резонаторе и исключению явления мгновенной смерти перепутывания (см. ссылки в работе [6]).

В настоящей работе мы обобщили результаты работы [4], включив в рассмотрение керровскую нелинейность резонатора. Используя в качестве критерия перепутывания кубитов степень совпадения, нами исследовано влияние интенсивности теплового поля резонатора и керровской нелинейности на динамику перепутывания кубитов.

### Модель трех идентичных кубитов и результаты расчетов

Рассмотрим систему, состоящую из трех идентичных кубитов  $Q_1, Q_2$  и  $Q_3$ . Два кубита  $Q_2$  и  $Q_3$  резонансно взаимодействуют с квантованным электромагнитным полем резонатора со средой Керра. Кубит  $Q_1$  может свободно перемещаться вне резонатора. Времена когерентности для кубитов в резонаторах на порядки больше времен одно- и двухкубитных операций, что позволяет нам пренебречь диссипацией энергии и прочими некогерентными процессами при анализе динамики перепутывания. Гамильтониан взаимодействия такой системы можно записать в виде

$$\hat{H}_I = \sum_{i=2}^3 \hbar\gamma(\hat{\sigma}_i^+ \hat{a} + \hat{\sigma}_i^- \hat{a}^+) + \hbar\chi \hat{a}^{+2} \hat{a}^2,$$

где  $\hat{\sigma}_i^+ = |+\rangle_i \langle -|$  и  $\hat{\sigma}_i^- = |-\rangle_i \langle +|$  — повышающий и понижающий операторы в  $i$ -м кубите,  $\hat{a}$  и  $\hat{a}^+$  — операторы уничтожения и рождения фотонов в моде резонатора,  $\gamma$  — константа кубит-фотонного взаимодействия и  $\chi$  — керровская нелинейность. Параметры гамильтониана для кубитов различной природы меняются в очень широких пределах. Например, ширина энергетической щели для сверхпроводящих кубитов лежит в интервале 1–20 GHz, а  $\gamma$  — в интервале 0.1–10 GHz. В то же время для электронных спинов ширина энергетической щели лежит в интервале 1–10 GHz, а имеет порядок 1 MHz в случае для квантовых точек и 100 Hz для примесей. Для сверхпроводящих кубитов в резонаторе со средой Керра удалось достичь значения керровской нелинейности порядка 0.1 GHz [7].

В качестве начальных состояний кубитов выберем два различных истинно перепутанных состояний W-типа:

$$|W_1\rangle = \cos\theta|-, -, +\rangle + \sin\theta \sin\varphi|-, +, -\rangle + \sin\theta \cos\varphi|+, -, -\rangle,$$

$$|W_2\rangle = \cos\theta|+, +, -\rangle + \sin\theta \sin\varphi|+, -, +\rangle + \sin\theta \cos\varphi|-, +, +\rangle$$

или истинно перепутанное GHZ-состояние вида

$$|G\rangle = \cos\phi|+, +, +\rangle + \sin\phi|-, -, -\rangle.$$

Здесь  $\theta, \varphi$  и  $\phi$  — параметры, которые определяют начальную степень перепутывания кубитов ( $0 < \theta, \varphi, \phi < \pi$ ).

В рамках уже имеющегося эксперимента со сверхпроводящими кубитами [8] рассматриваемая модель может быть реализована следующим образом. Три кубита располагаются в пучностях первой гармоники резонатора со средой Керра и могут настраиваться в резонанс с модой поля или выводиться из резонанса путем подачи импульсов тока в линии управления магнитными потоками. Например, для перевода системы в начальное состояние  $|W_1\rangle$  необходимо проделать следующее: первоначально вывести все кубиты из резонанса. Путем подачи  $\pi$ -импульса кубит  $Q_1$  перевести в возбужденное состояние  $|+\rangle_1$ , а затем привести в резонанс с модой поля. Через интервал времени  $\tau = \pi/2\gamma$ , когда резонатор перейдет в состояние  $|1\rangle$ , все кубиты приводятся в резонанс. Через интервал времени  $\tau/\sqrt{3}$  кубиты оказываются в истинно перепутанном состоянии вида  $|W_1\rangle$ . Далее кубит  $Q_1$  выводится из резонанса.

Состояние исследуемой модели в произвольный момент времени определяется полной временной матрицей плотности кубитов и поля  $\rho_{Q_1, Q_2, Q_3; F}(t)$ . Нами найдено решение квантового уравнения Лиувилля для полной матрицы плотности системы „три кубита + мода поля“ в представлении „одетых состояний“ для чистых начальных состояний кубитов и смешанного теплового состояния поля резонатора. В настоящей работе мы в качестве количественного критерия перепутывания кубитов выбрали степень совпадения (fidelity) [5]. Для определения указанного параметра достаточно вычислить редуцированную трехкубитную матрицу плотности, усредняя полную матрицу плотности по переменным поля:

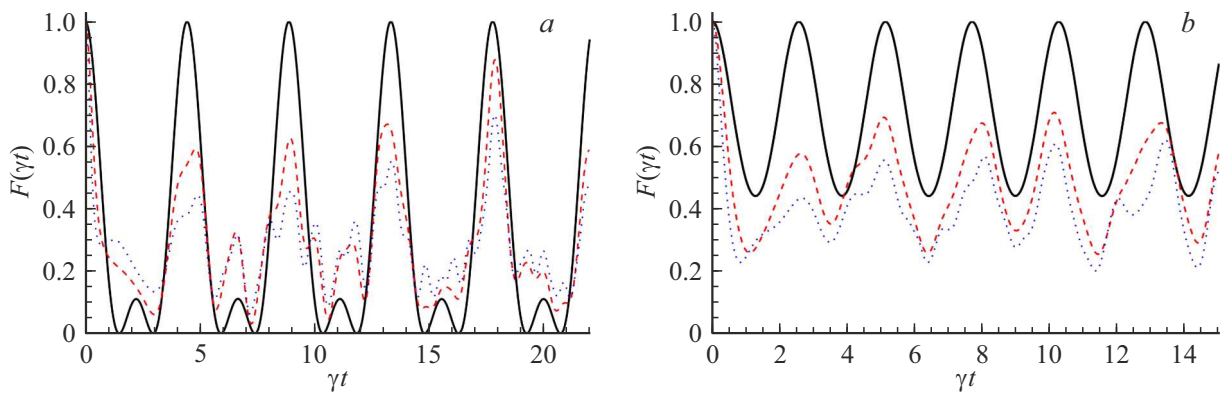
$$\rho_{Q_1, Q_2, Q_3}(t) = Tr_F \rho_{Q_1, Q_2, Q_3; F}(t).$$

Степень совпадения можно представить в форме

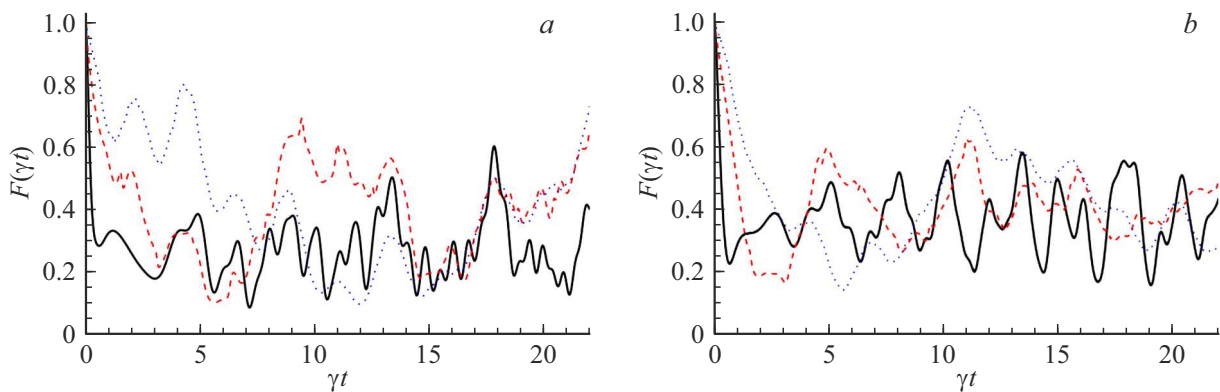
$$F(t) = \text{tr}(\rho\rho'),$$

где  $\rho = |\psi\rangle\langle\psi|$  — начальная матрица плотности кубитов и  $\psi$  — их начальная волновая функция,  $\rho'$  — матрица плотности в момент времени  $t > 0$ .

Результаты численных расчетов степени совпадения для W- и GHZ-начальных состояний кубитов представлены на рис. 1 и 2. На рис. 1 показана зависимость параметра  $F$  от безразмерного времени  $\gamma t$  для начальных перепутанных состояний кубитов  $|W_1\rangle$  (рис. 1,  $a$  и  $|G\rangle$  (рис.1,  $b$ ) для различных значений среднего числа тепловых фотонов при отсутствии керровской среды. Из рисунков видно, что взаимодействие кубитов с тепловыми фотонами разрушает начальное перепутывание. Причем с увеличением интенсивности теплового поля эффект уменьшения степени перепутывания кубитов более заметен для начального GHZ-состояния. При этом полного разрушения начального перепутывания не происходит даже для достаточно высоких интенсивностей теплового поля.



**Рис. 1.** Степень совпадения  $F$  от приведенного времени  $\gamma t$  для начального перепутанного состояния  $|W_1\rangle$  при  $\theta = \arccos[1/\sqrt{3}]$  и  $\phi = \pi/4$  (a) и  $|G\rangle$  при  $\phi = \pi/4$  (b) в отсутствие керровской среды ( $\chi = 0$ ). Среднее число тепловых фотонов  $\bar{n} = 0.001$  (черная сплошная линия),  $\bar{n} = 1$  (красная штриховая линия),  $\bar{n} = 2.5$  (синяя пунктирная линия).



**Рис. 2.** Степень совпадения  $F$  от приведенного времени  $\gamma t$  для начального перепутанного состояния  $|W_1\rangle$  при  $\theta = \arccos[1/\sqrt{3}]$  и  $\phi = \pi/4$  (a) и  $|G\rangle$  при  $\phi = \pi/4$  (b). Керровская нелинейность  $\chi = 0$  (черная сплошная линия),  $\chi = 2\gamma$  (красная штриховая линия),  $\chi = 5\gamma$  (синяя пунктирная линия). Среднее число тепловых фотонов  $\bar{n} = 4$ .

На рис. 2 показана зависимость параметра  $F$  от безразмерного времени  $\gamma t$  для начальных перепутанных состояний кубитов  $|W_1\rangle$  (рис. 2, a) и  $|G\rangle$  (рис. 2, b) для различных значений керровской нелинейности и фиксированного значения среднего числа тепловых фотонов. Видно, что включение керровской нелинейности приводит к стабилизации начального перепутывания кубитов. При этом эффект для обоих начальных состояний наиболее заметен на малых временах, и увеличение степени перепутывания кубитов является более существенным для начального состояния W-типа. Отметим, что для состояния  $|W_2\rangle$  поведение совпадения  $F$  аналогично поведению указанной величины для состояния  $|W_1\rangle$ .

## Заключение

В настоящей работе мы исследовали динамику трех идентичных кубитов, один из которых свободен, а два других заперты в резонаторе со средой Керра и резонансно взаимодействуют с модой теплового поля этого резонатора. Найдено временное поведение степени

совпадения состояний кубитов для начальных W- и GHZ-перепутанных состояний. Показано, что тепловое поле резонатора не разрушает полностью начальное перепутывание кубитов даже для высоких интенсивностей теплового шума резонатора. Установлено также, что керровская нелинейность резонатора может выступать в качестве естественного механизма стабилизации начального перепутывания кубитов.

## Конфликт интересов

Авторы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

## Список литературы

- [1] H.-L. Huang, D. Wu, D. Fan, X. Zhu. Science China Inform. Sci., **63**, 180501 (2020). DOI: 1007/S11432-020-2881-9
- [2] A. Barenco et al. Phys. Rev., A, **52**, 3457–3467 (1995). DOI: 10.1103/PhysRevA.52.3457
- [3] Y. Shi. Quant. Inform. Comput., **3**(1), 84–92 (2003). DOI: 10.26421/QIC.1-7

- [4] А.Р. Багров, Е.К. Башкиров. *ЖТФ*, **94**, 341–350 (2024).  
DOI: 10.61011/JTF.2024.03.57370.301-23
- [5] R. Jozsa. *J. Mod. Opt.*, **41** (12), 2315–2323 (1994).  
DOI: 10.1080/09500349414552171
- [6] E.K. Bashkirov. In: *8th Inter. Conf. Inform. Techn. Nanotechn.*,  
1–4 (2022). DOI: 10.1109/ITNT55410.2022.9848606
- [7] G. Kirchmair et al. *Nature*, **495**, 205–209 (2013).  
DOI: 10/1038.nature11902
- [8] J.A. Mlynek. *Phys. Rev. A*, **86** (5), 053838 (2012).  
DOI: 10.1103/PhysRevA.86.053838