01

Импульсное возбуждение квантовых систем: специфические особенности и общие закономерности

© В.А. Астапенко, Т.К. Бергалиев

Московский физико-технический институт (национальный исследовательский университет), Долгопрудный, Московская обл., Россия

e-mail: astval@mail.ru

Поступила в редакцию 26.04.2024 г.
В окончательной редакции 18.06.2024 г.
Принята к публикации 30.10.2024 г.

Исследованы особенности импульсного возбуждения квантового осциллятора как без учета, так и с учетом затухания. Получены выражения для длительности и несущей частоты экспоненциального и двойного экспоненциального импульсов, которые описывают основные черты процесса в режимах слабого и сильного возбуждения. Установлены границы этих режимов в терминах частоты Раби для временной и спектральной зависимостей вероятности возбуждения.

Ключевые слова: квантовый осциллятор, импульсное возбуждение, эффект насыщения.

DOI: 10.61011/OS.2024.12.59792.6424-24

Интенсивное развитие техники генерации ультракоротких лазерных импульсов с заданными параметрами делает актуальным совершенствование теоретического описания их взаимодействия с веществом на предмет особенностей ультракороткого электромагнитного взаимодействия. Данному вопросу посвящена настоящая работа на примере возбуждения квантового осциллятора двумя типами импульсов.

Основные формулы

Базовая формула для вероятности перехода квантового осциллятора (КО) между стационарными состояниями $|n\rangle$ и $|m\rangle$ $(m > n)$ была получена Дж. Швингером в его теории квантованного электромагнитного поля [1]:

$$W_{n\to m} = \frac{n!}{m!}(\nu)^{m-n}\exp(-\nu)|L_n^{m-n}(\nu)|^2, \qquad (1)$$

где $L_m^k(x)$ — обобщенные полиномы Лагерра, ν — ключевой параметр, который в случае возбуждениmя КО электромагнитным импульсом можно представить [2] в виде

$$\nu = \Omega_0^2|\tilde{E}(\omega_0, \tau, \omega_c)|^2, \qquad (2)$$

где ω_0 — собственная частота КО, $\tilde{E}(\omega_0, \tau, \omega_c)$ — нормированный на амплитуду E_0 фурье-образ по времени напряженности электрического поля в импульсе с длительностью τ и несущей частотой ω_c,

$$\Omega_0 = \frac{d_0E_0}{\hbar} = \frac{qx_0E_0}{\hbar} = \frac{qE_0}{\sqrt{2m\hbar\omega_0}} \qquad (3)$$

— частота Раби, q, m — заряд и масса осциллятора, $x_0 = \sqrt{\hbar/(2m\omega_0)}$ — характерная длина квантового осциллятора. Ключевой параметр ν можно выразить через энергию возбуждения ассоциированного классического осциллятора (под ассоциированным классическим осциллятором понимается осциллятор, имеющий те же параметры, что и его квантовый аналог) [3]:

$$\nu = \frac{\Delta\varepsilon_{\text{clas}}}{\hbar\omega_0}. \qquad (4)$$

Одним из способов описания возбуждения квантового осциллятора электромагнитными импульсами является расчет среднего числа возбужденных квантов. Рассмотрим для простоты возбуждение осциллятора из основного состояния, когда вероятность возбуждения дается распределением Пуассона. По определению среднее число возбужденных квантов равно

$$\bar{n} = \sum_n nW_{0\to n}(\nu) = \sum_n \frac{1}{(n-1)!}\nu^n\exp(-\nu) = \nu. \qquad (5)$$

Таким образом, среднее число возбужденных квантов равняется параметру ν. С учетом равенства (4) имеем следующую связь с энергией возбуждения ассоциированного классического осциллятора:

$$\bar{n} = \frac{\Delta\varepsilon_{\text{clas}}}{\hbar\omega_0} = \nu. \qquad (6)$$

Вероятность возбуждения КО различными импульсами

Рассмотрим возбуждение КО из основного состояния импульсами с экспоненциальной огибающей:

$$\tilde{E}_{\exp}(t, \tau) = \theta(t)\exp(-t/\tau)\cos(\omega_c t), \qquad (7)$$

где $\theta(t)$ — функция Хэвисайда, и с двойной экспоненциальной огибающей:

$$\tilde{E}_{2\exp}(t, \omega_c, \tau) = \exp(-|t|/\tau)\cos(\omega_c t). \qquad (8)$$

Отметим, что формулы (7) и (8) описывают асимметричный и симметричный во времени импульсы и, таким образом, качественно различаются. Существенно, что для них можно получить аналитическое описание возбуждения квантового осциллятора. Так, ключевой параметр ν в случае экспоненциального импульса равен

$$\nu_{\mathrm{exp}} = \bar{n}_{\mathrm{exp}} \cong \frac{1}{4}\frac{\Omega_0^2\tau^2}{1+(\omega_0-\omega_c)^2\tau^2}. \tag{9}$$

Аналогично для двойного экспоненциального импульса можно получить

$$\nu_{2\,\mathrm{exp}} = \bar{n}_{2\,\mathrm{exp}} \cong \frac{1}{4}\frac{\Omega_0^2\tau^2}{[1+(\omega_0-\omega_c)^2\tau^2]^2}. \tag{10}$$

Формулы (9), (10) выведены с учетом условия $\omega_c\tau \gg 1$.

Из (1), (9) следует, что зависимость вероятности возбуждения КО от длительности импульса в случае экспоненциального импульса может быть либо монотонно возрастающей, либо иметь один максимум. Положение этого максимума для функции $W_{0\to n}(\tau)$ дается формулой

$$\tau_{\max}^{(\mathrm{exp})} = \frac{1}{\sqrt{\Omega_0^2/4n-(\omega_c-\omega_0)^2}}. \tag{11}$$

Поскольку подкоренное выражение в правой части этого равенства должно быть положительным, отсюда следует, что максимум имеет место, если выполняется неравенство

$$\Omega_0 > 2\sqrt{n}|\omega_0-\omega_c|. \tag{12}$$

В противном случае функция $W_{0\to n}(\tau)$ является монотонно возрастающей.

Неравенство (12) может быть названо условием режима сильного возмущения квантового осциллятора экспоненциальным импульсом. При выполнении противоположного неравенства возбуждение является слабым. Заметим, что в резонансе $\omega_c=\omega_0$ любое значение частоты Раби отвечает сильному возбуждению.

В случае двойного экспоненциального импульса в режиме слабого возмущения, которое дается неравенством

$$\Omega_0 < 4\sqrt{n}|\omega_0-\omega_c|, \tag{13}$$

имеется один максимум в τ-зависимости вероятности возбуждения. Положение этого максимума определяется формулой

$$\tau_{\max}^{(2\,\mathrm{exp})} = \frac{1}{|\omega_c-\omega_0|}. \tag{14}$$

Очевидно, что данный максимум исчезает на резонансной несущей частоте $\omega_c=\omega_0$.

Простой анализ показывает, что в режиме сильного возмущения, $\Omega_0 > 4\sqrt{n}|\omega_0-\omega_c|$, максимум (14) превращается в минимум и появляются два новых максимума, которым отвечают следующие длительности импульса:

$$\tau_{\max,1,2}^{(2\,\mathrm{exp})} = \frac{\Omega_0 \pm \sqrt{\Omega_0^2-16n|\omega_c-\omega_0|^2}}{4\sqrt{n}|\omega_c-\omega_0|^2}. \tag{15}$$

Видно, что в резонансе большее значение длительности импульса в максимуме обращается в бесконечность $\tau_{\max,2}^{(2\,\mathrm{exp})}(\omega_c=\omega_0)\to\infty$, а меньшее равно $\tau_{\max,1}^{2\,\mathrm{exp}}(\omega_c=\omega_0)=2/\Omega_0$.

Рассмотрим спектр возбуждения КО экспоненциальным и двойным экспоненциальным импульсами.

В случае экспоненциального импульса с помощью вышеприведенных формул можно получить следующее выражение для спектральных максимумов:

$$\omega_{\max}^{(\mathrm{exp})} = \omega_0 \pm \sqrt{\Omega_0^2/4n-\tau^{-2}}. \tag{16}$$

Эти частоты являются решениями уравнения $d\bar{n}/d\omega_c=0$, которое определяет спектральные экстремумы вероятности. Из (16) следует, что данные максимумы реализуются только в режиме сильного возмущения, который описывается неравенством

$$\Omega_0 > 2\sqrt{n}/\tau. \tag{17}$$

В противном случае слабого возмущения имеется один спектральный максимум на собственной частоте осциллятора $\omega_c=\omega_0$.

Аналогично можно получить выражение для спектральных максимумов при возбуждении КО из основного состояния двойным экспоненциальным импульсом:

$$\omega_{\max}^{(2\,\mathrm{exp})} = \omega_0 \pm \frac{1}{\tau}\sqrt{\frac{\Omega_0\tau}{2\sqrt{n}}-1}. \tag{18}$$

Отсюда следует, что условие на режим сильного возмущения при возбуждении двойным экспоненциальным импульсом также дается неравенством (17).

Модельный учет затухания квантового осциллятора

Основное предположение нашей модели заключается в следующем. В выражениях (1), (4) будем использовать энергию возбуждения классического осциллятора с ненулевым затуханием

$$\Delta\varepsilon_{\mathrm{clas}}(\gamma=0)\to\Delta\varepsilon_{\mathrm{clas}}(\gamma\neq0). \tag{19}$$

С учетом затухания для энергии возбуждения ассоциированного классического осциллятора имеем

$$\Delta\varepsilon_{\mathrm{clas}} = \frac{q^2E_0^2}{2m}\int_0^\infty d\omega|\tilde{E}(\omega)|^2\frac{4\Omega^2\gamma/\pi}{(\omega^2-\omega_0^2)^2+4\omega^2\gamma^2}. \tag{20}$$

Тогда в случае экспоненциального импульса (7) для среднего числа возбужденных квантов (полагаем, что $\omega_c\tau \gg 1$) получаем

$$\bar{n}_{\mathrm{exp}}(\gamma) = \frac{1}{4}\Omega_0^2\tau\frac{\gamma+1/\tau}{(\omega_c-\omega_0)^2+(\gamma+1/\gamma)^2}. \tag{21}$$

Отсюда можно найти положение спектральных максимумов при возбуждении экспоненциальным импульсом КО с затуханием на переходе $0 \to n$:

$$\left|\Delta_{\max}^{(\exp)}(\gamma)\right| = \sqrt{(1+\gamma\tau)\left(\frac{\Omega_0^2}{4n} - \frac{1+\gamma\tau}{\tau^2}\right)},$$

$$\Delta = \omega_c - \omega_0. \tag{22}$$

Из данной формулы следует, что частота Раби насыщения с учетом затухания равна

$$\Omega_0^{(\mathrm{sat})}(\gamma) = \frac{2\sqrt{n}}{\tau}\sqrt{1+\gamma\tau}. \tag{23}$$

Итак, боковые спектральные максимумы возникают при выполнении неравенства

$$\Omega_0 > \Omega_0^{(\mathrm{sat})}(\gamma). \tag{24}$$

В противном случае имеется один максимум на собственной частоте КО.

В заключение отметим, что в пределе теории возмущений ($\nu \ll 1$) вероятность возбуждения КО на переходе $0 \to 1$ совпадает с вероятностью возбуждения двухуровневой системы с силой осциллятора, равной единице, и дается выражением (2). Таким образом, прослеживается связь между описанием импульсного возбуждения вещества в рамках двух фундаментальных квантовых моделей.

Финансирование работы

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 24-49-10004, https://rscf.ru/project/24-49-10004/

Конфликт интересов

Авторы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

Список литературы

[1] J. Schwinger. Phys. Rev., **91**, 728 (1953).
[2] V.A. Astapenko, E.V. Sakhno. Appl. Phys. B, **126**, 23, (2020). DOI: 10.1007/s00340-019-7372-z
[3] K. Husimi. Prog. Theor. Phys., **9**, 238 (1953).