

Точность квантования холловской проводимости в образце конечных размеров: степенной закон

© А.А. Грешнов, Э.Н. Колесникова, Г.Г. Зегря[†]

Физико-технический институт им. А.Ф. Иоффе Российской академии наук,
194021 Санкт-Петербург, Россия

(Получена 25 мая 2005 г. Принята к печати 27 мая 2005 г.)

Выполнен микроскопический расчет проводимости в режиме целочисленного квантового эффекта Холла. Исследован вопрос о точности квантования для образцов конечных размеров. Обнаружено, что точность квантования степенным образом зависит от размера образца. Введен новый скейлинговый параметр, описывающий такую зависимость. Также показано, что точность квантования линейно зависит от отношения амплитуды хаотического потенциала к циклотронной энергии. Проведено сравнение результатов с магнитотранспортными измерениями в мезоскопических образцах.

PACS: 73.43.Cd, 75.47.-m

1. Введение

Несмотря на значительный прогресс, имеющийся в понимании квантового эффекта Холла (КЭХ), последовательная микроскопическая теория этого явления до сих пор отсутствует. Напомним, что в условиях сильного магнитного поля, направленного перпендикулярно плоскости двумерного полупроводникового образца, и низких температур наблюдается квантование холловского сопротивления $R_H = h/\nu e^2$ [1]. Здесь ν является целым числом, причем точность квантования при достаточно низких температурах ограничена обычно лишь погрешностью измерения и может достигать миллионной доли процента [2]. Важно, что квантование имеет место в некотором интервале магнитных полей либо концентраций носителей заряда (на холловских плато). Такое поведение проводимости двумерного электронного газа в сильном магнитном поле противоречит выводам классической кинетической теории и диаграммной техники усреднения по беспорядку (самогласованному борновскому приближению).

Для описания КЭХ необходимо учитывать явления сильной локализации электронов на хаотическом потенциале примесей, имеющее место в магнитном поле. Корректный учет хаотического потенциала приводит к степенной зависимости длины локализации ξ от энергии электронного состояния [3]:

$$\xi \propto (E - E_n)^{-\nu}, \quad \nu \approx 2.3.$$

Наличие скейлингового закона зависимости длины локализации от энергии указывает на необходимость микроскопического учета хаотического потенциала при расчете проводимости в режиме КЭХ, что может быть достигнуто при использовании численных методов.

Ранее численные расчеты успешно использовались для изучения зависимости длины локализации от энергии электронных состояний. Имеется ряд эффективных методов, которые позволяют производить расчет длины

локализации для образцов достаточно больших размеров. С помощью таких расчетов была подтверждена теория конечно-размерного скейлинга и получены значения скейлинговых индексов, хорошо согласующиеся с экспериментом [3,4]. К сожалению, подобные методы неприменимы для расчета холловской проводимости, так как в этом случае необходимо иметь полную информацию о спектре носителей и волновых функциях.

В данной работе проведен расчет холловской проводимости двумерного электронного газа в сильном магнитном поле из первых принципов. Полученные результаты позволяют утверждать, что точность квантования холловской проводимости на плато степенным образом зависит от размера образца и прямо пропорциональна отношению амплитуды хаотического потенциала к циклотронной энергии.

Далее описана использованная модель хаотического потенциала и метод расчета проводимости. Затем приведены результаты численных расчетов и их анализ. В заключение выполнено сравнение теоретических результатов с данными магнитотранспортных измерений в мезоскопических образцах.

2. Модель

При расчете проводимости в режиме целочисленного квантового эффекта Холла (ЦКЭХ) мы будем учитывать только упругое рассеяние при нулевой температуре $T = 0$ К. Такое рассмотрение оправдано при следующих условиях. Во-первых, образец не должен быть слишком „чистым“, чтобы кулоновские эффекты не приводили к постепенному разрушению ЦКЭХ и появлению ступенек дробного КЭХ. Во-вторых, наличие конечной температуры приводит к эффективному ограничению размера образца длиной сбоя фазы $L_\phi \propto T^{-p/2}$ [5]. Здесь скейлинговый показатель p определяется превалирующим механизмом неупругого рассеяния и не является, согласно экспериментальным данным [4], универсальным параметром. Наконец, уширением фермиевской ступеньки функции распределения можно пренебречь

[†] E-mail: zegrya@mail.ioffe.ru

из-за малости типичных температур, при которых наблюдается КЭХ: $T < 1 \text{ К} \approx 0.1 \text{ мэВ} \ll \hbar\omega_c$.

Гамильтониан невзаимодействующих носителей заряда во внешнем магнитном поле \mathbf{B} и хаотическом потенциале примесей $U(\mathbf{r})$ имеет вид

$$\hat{H}_M = \frac{(\hat{\mathbf{p}} - e/c\mathbf{A})^2}{2m^*} + U(\mathbf{r}), \quad \text{rot}\mathbf{A} = \mathbf{H} = \mathbf{B}. \quad (1)$$

Пусть перпендикулярное плоскости двумерного образца магнитное поле направлено вдоль оси z , а хаотический потенциал $U(\mathbf{r})$ для простоты не меняется вдоль этой оси. Выберем векторный потенциал однородного магнитного поля в виде $\mathbf{A} = (-By, 0, 0)$ — калибровка Ландау. При рассмотрении одного уровня размерного квантования задача описывается следующим гамильтонианом:

$$\hat{H} = \frac{(\hat{p}_x - eBy/c)^2 + \hat{p}_y^2}{2m^*} + U(\mathbf{r}), \quad \mathbf{r} = (x, y). \quad (2)$$

Использованный в данной работе модельный примесный потенциал имеет следующий вид:

$$U(\mathbf{r}) = \sum_{n=1}^N U_n \exp\left[-\frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}_n)^2}{R^2}\right], \quad (3)$$

где величины U_n и \mathbf{r}_n распределены равномерно в интервале $[U_<, U_>]$ и по всей плоскости (x, y) соответственно, что позволяет варьировать амплитуду и корреляционные свойства потенциала с помощью параметров N , $U_<$, $U_>$ и R . С другой стороны, использование потенциала такого вида позволяет аналитически рассчитать матричные элементы в базисе волновых функций, содержащих плоские волны [6]:

$$\Psi_{nk} = \frac{\exp(ikx)}{\sqrt{2^n n! \sqrt{\pi} a_H L_x}} \exp\left(-\frac{\tilde{y}^2}{2a_H^2}\right) H_n\left(\frac{\tilde{y}}{a_H}\right), \quad (4)$$

$$\tilde{y} = y - ka_H^2, \quad a_H^2 = \frac{\hbar c}{|e|B},$$

где $n \geq 0$ — номер уровня Ландау, H_n — полиномы Эрмита, a_H — магнитная длина. Для образца конечных размеров $L_x \times L_y$ набор базисных волновых функций определяется условиями периодичности на длине L_x и попадания точки $y_0 = ka_H^2$ внутрь отрезка длины L_y [6]. Необходимые для расчета проводимости собственные энергии и волновые функции находились с помощью численной диагонализации гамильтониана \hat{H} в базисе волновых функций (4).

Выражение для холловской проводимости (формула Кубо) может быть получено при $T = 0 \text{ К}$ в первом порядке теории возмущений по электрическому полю:

$$\sigma_{xy} = \frac{e}{S} \sum_{\substack{i < \mu \\ f > \mu}} \frac{y_{if}(J_x)_{fi} + \text{c.c.}}{\varepsilon_i - \varepsilon_j}, \quad (5)$$

где i, f — собственные энергии гамильтониана \hat{H} ; y_{if} и $(J_x)_{fi}$ — матричные элементы координаты и интегрального тока в базисе собственных волновых функций гамильтониана \hat{H} ; v — уровень химического потенциала, S — площадь образца.

3. Результаты

Изложенный выше метод расчета холловской проводимости двумерного электронного газа позволяет проанализировать вопрос о влиянии конечности размеров образца на точность квантования. Прежде всего отметим важность последовательного расчета как плотности состояний, так и волновых функций электронных состояний. На рис. 1 изображена рассчитанная плотность состояний $D(\varepsilon)$, а также характерный вид распределения электронной плотности в локализованных и делокализованных состояниях. Видно, что волновые функции, отвечающие минимуму плотности состояний являются локализованными на микроскопическом масштабе порядка магнитной длины, соответствующие максимуму плотности состояний — делокализованными

На рис. 2 представлены результаты расчета холловской проводимости для образца с такими размерами, что на одном уровне Ландау содержится 200 электронных состояний. Для магнитного поля напряженностью 10 Т это соответствует образцу с размерами $0.3 \times 0.3 \text{ мкм}$. Наличие значительных флуктуаций проводимости между плато КЭХ является мезоскопическим эффектом, присущим образцам с маленькими размерами ($\lesssim 1 \text{ мкм}$) при низких температурах ($\lesssim 0.1 \text{ К}$). Для сравнения с результатами наших расчетов на рис. 3 представлены экспериментальные данные работы [7], в которой магнетотранспортные измерения проводились на кремниевом MOSFET с размерами $0.6 \times 0.6 \text{ мкм}$ при температуре 100 мК. Как видно из рис. 3, помимо флуктуации холловской проводимости в переходных областях между плато, заметные флуктуации имеются также на первом и втором плато КЭХ.

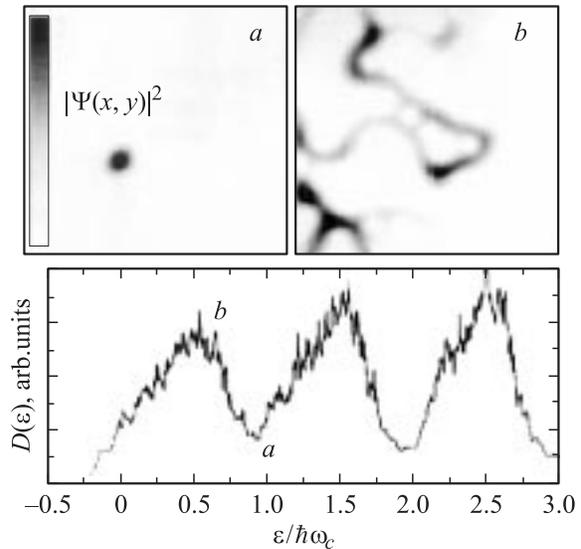


Рис. 1. Расчитанная плотность состояний $D(\varepsilon)$ в магнитном поле (показаны три нижних уровня Ландау); распределение электронной плотности в локализованных (a) и делокализованных (b) состояниях.

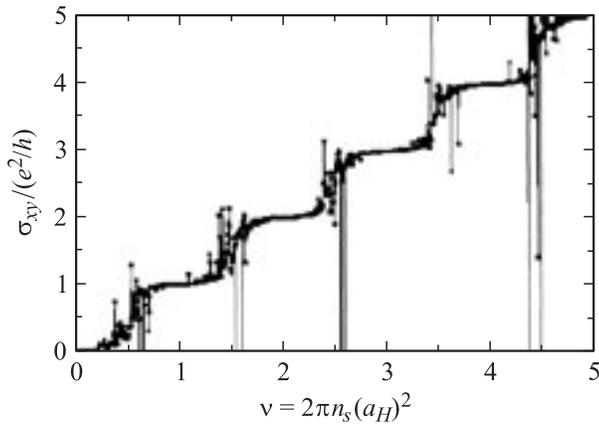


Рис. 2. Результаты расчета холловской проводимости σ_{xy} в зависимости от фактора заполнения ν .

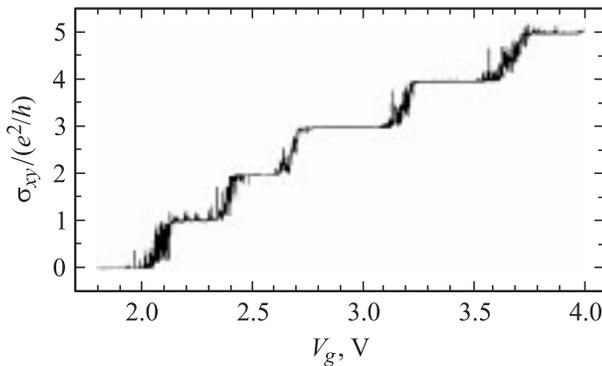


Рис. 3. Холловская проводимость кремниевого образца размером 0.6×0.6 мкм в зависимости от напряжения на затворе V_g в магнитном поле $B = 16$ Тл (из работы [7]).

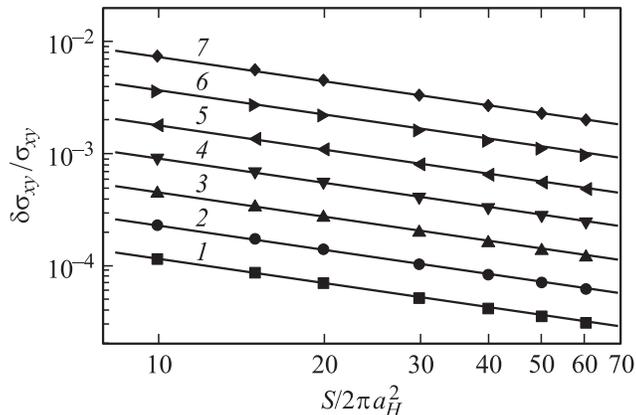


Рис. 4. Среднеквадратичное отклонение холловской проводимости в центре первого плато от величины e^2/h в зависимости от отношения площади образца S к квадрату магнитной длины a_H^2 . Эквидистантные в двойном логарифмическом масштабе прямые отвечают удвоению амплитуды хаотического потенциала U (снизу вверх). $U/\hbar\omega_c$: 1 — 0.01, 2 — 0.02, 3 — 0.04, 4 — 0.08, 5 — 0.16, 6 — 0.32, 7 — 0.64.

С целью анализа зависимости точности квантования от размеров образца было проведено усреднение отклонения холловской проводимости одного полностью заполненного уровня Ландау от квантованного значения E^2/h по реализациям случайного потенциала. Зависимости среднеквадратичного отклонения холловской проводимости в центре первого плато от размеров образца представлены на рис. 4. Наличие на графике рис. 4 эквидистантных в двойном логарифмическом масштабе прямых означает, что $\delta\sigma_{xy}$ является степенной функцией отношения размера образца к магнитной длине и пропорционально амплитуде хаотического потенциала U_* :

$$\frac{\delta\sigma_{xy}}{\sigma_{xy}} \propto \frac{U_*}{\hbar\omega_c} \left(\frac{a_H^2}{S} \right)^b. \quad (6)$$

Здесь введен новый скейлинговый параметр b , описывающий зависимость точности квантования от размера образца. Во всех наших вычислениях параметр b оставался универсальным: $b = 0.7 \pm 5\%$. При этом пропорциональность величины $\delta\sigma_{xy}$ амплитуде хаотического потенциала является (в пределе $U_* \ll \hbar\omega_c$) точным аналитическим результатом, вывод которого приведен в приложении. Как показывает оценка, выполненная на основании формулы (6), флуктуации холловской проводимости на плато могут достигать величины 10^{-2} для образцов субмикронных размеров. Это качественно согласуется с экспериментальными данными работы [7].

Необходимо отметить, что полученный нами степенной закон зависимости точности квантования от размеров образца качественно подтверждается также измерениями, выполненными на макроскопических образцах. В частности, в работе [8], выполненной на кремниевом транзисторе с размерами 2×2 мм, обнаружены флуктуации холловской проводимости на плато на уровне 10^{-7} при экспериментальной погрешности не хуже 10^{-8} . В то же время в большинстве известных нам теоретических работ утверждается, что поправка к холловской проводимости связанная с конечностью размеров образца, экспоненциально мала [9,10]. Основанием для таких выводов служит экспоненциальный вид волновых функций локализованных состояний. Это действительно приводит к экспоненциально малому наклону плато ЦКЭХ, однако не определяет точности, с которой холловская проводимость на плато принимает квантованное значение $\nu e^2/h$. Значение же σ_{xy} на плато определяется всеми электронными состояниями лежащими ниже уровня химического потенциала, как локализованными, так и делокализованными [2].

В заключение подчеркнем, что для окончательного понимания прецизионной точности квантования, наблюдаемой в экспериментах по квантовому эффекту Холла, необходимо дальнейшее изучение вопроса о зависимости точности квантования от различных факторов. В первую очередь это должны быть высокоточные эксперименты, в которых бы изучалась зависимость точности квантования от размеров образца, температуры и

подвижности носителей заряда. Из температурной зависимости холловской проводимости образцов небольших размеров ($L \approx 10$ мкм) известно, что при температурах $T \lesssim 30$ мК длина неупругого рассеяния L_ϕ становится больше длины образца L [4]. Это означает, что в таких экспериментальных условиях открываются возможности для прямого наблюдения зависимости отклонения холловской проводимости от квантованного значения в зависимости от размеров образца. Следует ожидать, что подобные измерения покажут наличие степенного, а не экспоненциального закона зависимости $\delta\sigma_{xy}/\sigma_{xy}$ от L .

Работа поддержана Российским фондом фундаментальных исследований (гранты № 04-07-90148, № 04-02-16786, № 05-02-16679), а также программой поддержки ведущих научных школ.

Один из авторов (А.А. Грешнов) признателен за поддержку Фонду „Династия“ и МЦФФМ.

Приложение

Покажем, что холловская проводимость в середине каждого плато принимает квантованное значение $\nu e^2/h$ в пределе $U_*/\hbar\omega_c \rightarrow 0$. Пусть амплитуда хаотического потенциала U_* настолько мала по сравнению с циклотронной энергией $\hbar\omega_c$, что в плотности состояний $D(\varepsilon)$ имеется энергетическая щель между уровнями Ландау с номерами $N-1$ и N , где $N \geq 1$. Выполним расчет холловской проводимости для случая, когда уровень химического потенциала находится в этой щели, т.е. имеется N полностью заполненных уровней Ландау.

При выполнении условия $U_* \ll \hbar\omega_c$ нахождение собственных энергий и волновых функций гамильтониана (2) возможно в рамках теории возмущений для вырожденных состояний [6]. Точные собственные энергии и волновые функции можно представить при этом в следующем виде:

$$\varepsilon_{n\alpha^{(n)}} = \hbar\omega_c [n + 1/2 + 0(t)], \quad (\text{П.1})$$

$$\Psi_{n\alpha^{(n)}} = \sum_k A_{\alpha^{(n)}k} \Psi_{nk} + t \sum_{m \neq n, k} B_{\alpha^{(n)}mk} \Psi_{mk}, \quad (\text{П.2})$$

$$\sum_k A_{\alpha^{(n)}k}^* A_{\beta^{(n)}k} = \delta_{\alpha^{(n)}\beta^{(n)}} + 0(t). \quad (\text{П.3})$$

Здесь и далее мы используем греческие буквы с индексом $n(m)$ для обозначения энергетических подуровней уровня Ландау с номером $n(m)$: $\alpha^{(n)}$, $\beta^{(m)}$; также введено обозначение для малого параметра $t = U_*/\hbar\omega_c$. Явный вид базисных функций Ψ_{nk} дается формулой (4). Набор коэффициентов A и B зависит от t , имея конечный предел при $t \rightarrow 0$; равенство (П.3) является прямым следствием ортонормированности системы собственных функций $\Psi_{n\alpha^{(n)}}$. Удобно ввести вспомогательные волно-

вые функции

$$\tilde{\Psi}_{n\alpha^{(n)}} = \lim_{t \rightarrow 0} \Psi_{n\alpha^{(n)}} = \sum_k C_{\alpha^{(n)}k} \Psi_{nk} \quad (\text{П.4})$$

таким образом, чтобы они являлись в точности ортонормированными и совпадали с собственными функциями $\Psi_{n\alpha^{(n)}}$ с точностью до $0(t)$. Следствием ортонормированности волновых функций $\tilde{\Psi}_{n\alpha^{(n)}}$ является следующее из (П.3) тождество

$$\sum_k C_{\alpha^{(n)}k}^* C_{\beta^{(n)}k} = \delta_{\alpha^{(n)}\beta^{(n)}}. \quad (\text{П.5})$$

Обобщим функции (10) следующим образом:

$$\tilde{\Psi}_{n\alpha^{(m)}} = \sum_k C_{\alpha^{(m)}k} \Psi_{nk}. \quad (\text{П.6})$$

Несмотря на то что волновые функции $\tilde{\Psi}_{n\alpha^{(m)}}$ не являются при $m \neq n$ собственными функциями гамильтониана \hat{H} в пределе $t \rightarrow 0$, они окажутся полезными при дальнейших вычислениях. В частности, в этом случае $\tilde{\Psi}_{n(\neq m)\alpha^{(m)}}$ могут быть выражены через волновые функции (П.4):

$$\tilde{\Psi}_{n\alpha^{(m)}} = \sum_{\beta^{(n)}} D_{\alpha^{(m)}\beta^{(n)}} \tilde{\Psi}_{n\beta^{(n)}}. \quad (\text{П.7})$$

Используя формулы (П.4)–(П.7), несложно получить еще одно тождество:

$$\sum_{\gamma^{(n)}} D_{\alpha^{(m)}\gamma^{(n)}}^* D_{\beta^{(m)}\gamma^{(n)}} = \delta_{\alpha^{(m)}\beta^{(m)}}. \quad (\text{П.8})$$

Для вычисления холловской проводимости по формуле Кубо (5) прежде всего необходимо получить выражения для матричных элементов операторов координаты y и интегрального тока J_x . В базисе волновых функций (4) имеем:

$$\langle \Psi_{nk} | \hat{J}_x | \Psi_{mq} \rangle = \frac{e\hbar}{ma_H} \langle \Psi_{nk} | \hat{\lambda} | \Psi_{mq} \rangle, \quad (\text{П.9})$$

$$\langle \Psi_{nk} | y | \Psi_{mq} \rangle = a_H \langle \Psi_{nk} | \hat{\lambda} | \Psi_{mq} \rangle + ka_H^2 \delta_{kq} \delta_{mn}, \quad (\text{П.10})$$

$$\langle \Psi_{nk} | \hat{J}_x | \Psi_{mq} \rangle = \sqrt{\frac{\max(m, n)}{2}} \delta_{kq} \delta_{|m-n|, 1}. \quad (\text{П.11})$$

Используя приведенные выше тождества, получаем следующие матричные элементы между соседними уровнями Ландау:

$$\langle \tilde{\Psi}_{n-1, \alpha^{(n)}} | \hat{\Lambda} | \tilde{\Psi}_{n\beta^{(n)}} \rangle = \sqrt{n/2} \delta_{\alpha^{(n)}\beta^{(n)}}, \quad (\text{П.12})$$

$$\langle \tilde{\Psi}_{n-1, \alpha^{(n-1)}} | \hat{\Lambda} | \tilde{\Psi}_{n\beta^{(n)}} \rangle = \sqrt{n/2} D_{\alpha^{(n-1)}\beta^{(n)}}. \quad (\text{П.13})$$

В формулах (П.12), (П.13) и далее под оператором $\hat{\Lambda}$ подразумевается одно из двух выражений

$$\hat{\Lambda} \equiv \{y/a_H, ma_H \hat{J}_x / e\hbar\}. \quad (\text{П.14})$$

Итак, если уровень химического потенциала μ находится в энергетической щели между двумя уровнями Ландау, вычисление холловской проводимости по формуле Кубо приводит к следующему результату:

$$\begin{aligned}
\sigma_{xy}^N &= \sum_{\substack{m \leq N-1, \alpha^{(m)} \\ n \geq N, \beta^{(n)}}} \frac{2e}{S(\varepsilon_{m\alpha^{(m)}} - \varepsilon_{n\beta^{(n)}})} \\
&\times \Re \langle \Psi_{m\alpha^{(m)}} | y | \Psi_{n\beta^{(n)}} \rangle \langle \Psi_{n\beta^{(n)}} | \hat{J} | \Psi_{m\alpha^{(m)}} \rangle \\
&= \frac{2e^2 a_H^2}{\hbar S} \sum_{\substack{\alpha^{(N-1)} \\ \beta^{(N)}}} |\langle \tilde{\Psi}_{N-1, \alpha^{(N-1)}} | \hat{\Lambda} | \tilde{\Psi}_{N\beta^{(N)}} \rangle|^2 + 0(t) \\
&= \frac{Ne^2 a_H^2}{\hbar S} \sum_{\substack{\alpha^{(N-1)} \\ \beta^{(N)}}} D_{\beta^{(N)}\alpha^{(N-1)}}^* D_{\beta^{(N)}\alpha^{(N-1)}} + 0(t) \\
&= \frac{Ne^2 a_H^2}{\hbar S} \sum_{\beta^{(N)}} 1 + 0(t) = \frac{Ne^2}{h} + 0(t). \quad (\text{П.15})
\end{aligned}$$

Отметим, что при вычислении σ_{xy}^N существенно использовались приведенные выше формулы; суммирование по $\beta^{(N)}$ сводится к подсчету числа состояний, приходящихся на один уровень Ландау в образце площадью S , поэтому [6]:

$$\sum_{\beta^{(N)}} 1 = \frac{S}{2\pi a_H^2}.$$

Таким образом, мы доказали для холловской проводимости в центре плато соотношение

$$\sigma_{xy} = \nu e^2/h + 0(U_*/\hbar\omega_c).$$

Список литературы

- [1] K. von Klitzing, G. Dorda, M. Pepper. Phys. Rev. Lett., **45**, 494 (1980).
- [2] *Квантовый эффект Холла*, под ред. Р. Пренджа, С. Гирвина (М., Мир, 1989).
- [3] B. Huckestein. Rev. Mod. Phys., **67**, 357 (1995).
- [4] S. Koch, R.J. Haug, K. von Klitzing, L. Ploog. Phys. Rev. B, **46**, 1596 (1992).
- [5] D.J. Thouless. Phys. Rev. Lett., **39**, 1167 (1977).
- [6] Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. *Квантовая механика (нерелятивистская теория)* (М., Наука, 1989).
- [7] D.H. Cobden, E. Kogan. Phys. Rev. B, **54**, R17316 (1996).
- [8] K. Yoshihiro, C.T. Van Degrift, M.E. Cage, D. Yu. Phys. Rev. B, **45**, 14204 (1992).
- [9] Q. Niu, D.J. Thouless. Phys. Rev. B, **35**, 2188 (1987).
- [10] Д.Е. Хмельницкий. Письма ЖЭТФ, **38**, 454 (1983).

Редактор Т.А. Полянская

Precision of the quantization of Hall conductivity in a finite-size sample: power law

A.A. Greshnov, E.N. Kolesnikova, G.G. Zegrya

Ioffe Physicotechnical Institute,
Russian Academy of Sciences,
194021 St. Petersburg, Russia

Abstract The microscopic calculation of the conductivity in the integer quantum Hall effect regime is performed. The influence of the finite size of the sample on the quantization precision is investigated theoretically. As our calculations show the precision of the quantization is a power function of the sample size. An introduced scaling index describing such a dependence turned out to be universal. Also it is shown that the quantization is proportional to the ratio of the disorder potential amplitude to the cyclotron energy. The comparison of the authors results with the magnetotransport measurements in the mesoscopic samples has been performed.