03

Устойчивость потенциального вращения идеальной жидкости

© *Д.А. Шалыбков*

Физико-технический институт им. А.Ф. Иоффе РАН, Санкт-Петербург, Россия
E-mail: shalybkov@yandex.ru

Поступило в Редакцию 2 сентября 2024 г.
В окончательной редакции 12 октября 2024 г.
Принято к публикации 12 октября 2024 г.

В линейном приближении показано, что для идеальной несжимаемой жидкости с однородной плотностью и потенциальной скоростью вращения при наличии граничных условий непротекания не существует асимметричных нормальных мод (как устойчивых, так и неустойчивых). Существуют только устойчивые сингулярные моды.

Ключевые слова: линейная устойчивость, несжимаемая жидкость.

DOI: 10.61011/PJTF.2025.03.59824.20102

Задача об устойчивости идеальной несжимаемой вращающейся жидкости представляет собой классическую проблему гидродинамики [1–4]. Хорошо известно, что в линейном приближении твердотельное вращение устойчиво по отношению к любым возмущениям (см., например, [5]).

Условие устойчивости для вращающейся идеальной несжимаемой жидкости с однородной плотностью по отношению к осесимметричным возмущениям было получено Рэлеем [6]. Для цилиндрической системы координат (r, φ, z) условие Рэлея имеет вид

$$\frac{1}{r^3}\frac{d}{dr}(r^2\Omega) \geqslant 0, \tag{1}$$

где Ω — угловая скорость вращения. Позднее было показано [7], что условие (1) является необходимым и достаточным условием устойчивости. Движение несжимаемой идеальной жидкости с однородной плотностью ρ описывается уравнениями Эйлера и непрерывности

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + (\mathbf{U}\nabla)\mathbf{U} = -\frac{1}{\rho}\nabla P, \qquad \mathrm{div}\mathbf{U} = 0, \tag{2}$$

где $\mathbf{U}$ — скорость, P — давление. Для вращающейся жидкости удобно использовать цилиндрическую систему координат (r, φ, z), в которой скорость вращающейся жидкости имеет вид

$$U = (0, r\Omega(r), 0), \tag{3}$$

где $\Omega(r)$ — угловая скорость вращения, которая для идеальной жидкости является произвольной (достаточно гладкой) функцией радиуса, удовлетворяющей уравнению (2) и граничным условиям. В стационарном случае уравнение (2) для скорости вида (3) принимает вид

$$\Omega^2 r = \frac{1}{\rho}\nabla P. \tag{4}$$

В линейном приближении для исследования устойчивости используется метод малых возмущений, в котором решение представляется в виде

$$\begin{aligned} U + u = \big(&u_r(r,\varphi,z,t),\, r\Omega(r) \\ &+ u_\varphi(r,\varphi,z,t),\, u_z(r,\varphi,z,t)\big), \\ P + p = P&(r) + p(r,\varphi,z,t), \end{aligned} \tag{5}$$

где величины u_r, u_φ, u_z и p малы по сравнению с невозмущенными величинами. Подставляя выражения (5) в систему (2) и сохраняя только линейные по возмущенным величинам члены, получим линейную систему уравнений для возмущенных величин с коэффициентами, зависящими только от радиальной координаты r. В этом случае решение можно представить в виде суммы нормальных мод вида

$$F = F(r)\exp\big(i(m\varphi + kz + \omega t)\big), \tag{6}$$

где $F(r)$ представляет собой произвольную искомую функцию. С учетом геометрии задачи аксиальное число k может принимать произвольные вещественные значения, азимутальное число m может быть произвольным целым числом, а инкремент ω — произвольным комплексным числом. Разложение на нормальные моды (6) преобразует трехмерную задачу в одномерную. Если собственные частоты ω имеют только положительные мнимые части, то течение линейно устойчиво. Если существует хотя бы одна собственная частота с отрицательной мнимой частью, то течение неустойчиво. После простых преобразований линейную систему можно привести к одному уравнению второго порядка для радиальной скорости u_r

$$\begin{aligned} &\omega_d^2\frac{d}{dr^2}\left[\frac{r^2}{k^2r^2+m^2}\frac{1}{r}\frac{d}{dr}(ru_r)\right] - \omega_d^2 u_r \\ &- \omega_d mr\frac{d}{dr}\left[\frac{r^2}{k^2r^2+m^2}\frac{d}{dr}(r^2\Omega)\right]u_r \\ &+ \frac{k^2r^2}{k^2r^2+m^2}\frac{1}{r^3}\frac{d}{dr}\big(r^2\Omega\big)^2 ur = 0, \end{aligned} \tag{7}$$

где $\omega_d = \omega + m\Omega$ — доплеровский инкремент. Отметим, что уравнение (7) совпадает с уравнением (18) из работы [5] при отсутствии аксиальной скорости ($W = 0$ в обозначениях работы [5]). Для нас важно, что уравнение (7) получено без деления на ω_d, который может обращаться в нуль в точке r_0, такой, что

$$\omega = -m\Omega(r_0). \qquad (8)$$

Для полной постановки задачи необходимо задать граничные условия. В настоящей работе будем рассматривать область, не ограниченную по аксиальной координате z, простирающуюся в пределах от внутреннего радиуса $r_{in} > 0$ (как будет видно далее потенциальное вращение не может достигать оси вращения, см. (10)) до внешнего радиуса $r_{out} < \infty$ и занимающую весь угловой сектор $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$. В работе использованы граничные условия непротекания

$$u_r(r_{in}) = u_r(r_{out}) = 0. \qquad (9)$$

Уравнение (7) совместно с граничными условиями (9) составляет задачу на собственные значения для частоты ω. Ясно, что условие (8) может быть выполнено, только если мнимая часть ω равна нулю. Кроме того, при выводе (7) предполагается, что числа k и m не равны одновременно нулю. Легко проверить, что если $k = m = 0$, то не выполняется граничное условие (9). Покажем, что для потенциального вращения жидкости при невыполнении условия (8) нетривиальных решений уравнения (7) не существует. Вращение является потенциальным, если $\mathrm{rot}\mathbf{U} = 0$. Для скорости вида (3) это условие означает, что

$$\Omega = Cr^{-2}, \qquad (10)$$

где C — константа, определяемая граничными условиями. Отметим, что, согласно (10), потенциальное вращение не может простираться до оси вращения. Кроме того, согласно (1), потенциальное вращение является устойчивым по отношению к осесимметричным возмущениям и, например, для цилиндрического течения Куэтта отделяет устойчивые течения от неустойчивых (см., например, [1]).

Предположим, что условие (8) не выполняется при $r_{in} \leqslant r \leqslant r_{out}$, и покажем, что в этом случае нетривиальных решений уравнения (7) не существует. Действительно, предположим обратное, что существуют нетривиальные решения уравнения (7), такие, что условие (8) не выполняется. В этом случае можно разделить уравнение (7) на ω_d^2. Умножая полученное уравнение на ru_r^*, где u_r^* — функция, комплексно-сопряженная с u_r, и интегрируя по частям с учетом граничных условий (9), получим

$$\int\limits_{r_{in}}^{r_{out}} \frac{r}{k^2r^2+m^2}\left|\frac{d}{dr}(ru_r)\right|^2 dr$$
$$+\int\limits_{r_{in}}^{r_{out}}\left(1+\frac{mr}{\omega_d}\frac{d}{dr}\left[\frac{r^2}{k^2r^2+m^2}\frac{d}{dr}(r^2\Omega)\right]\right.$$
$$\left.-\frac{k^2}{k^2r^2+m^2}\frac{1}{r}\frac{d}{dr}(r^2\Omega)^2\right)r|u_r|^2dr = 0. \qquad (11)$$

Соответственно для потенциального течения (10) третье и четвертое слагаемые обнуляются, и выражение (11) принимает вид

$$\int\limits_{r_{in}}^{r_{out}} \frac{r}{k^2r^2+m^2}\left|\frac{d}{dr}(ru_r)\right|^2 dr + \int\limits_{r_{in}}^{r_{out}} r|u_r|^2dr = 0. \qquad (12)$$

Для нетривиального решения u_r оба слагаемых в выражении (12) положительны, и, как результат, это выражение не может быть удовлетворено. Соответственно исходное предположение о существовании нетривиального решения уравнения (7) с граничными условиями (9) при невыполнении условия (8) неверно, что и требовалось доказать.

Таким образом, в настоящей работе показано, что проблема линейной устойчивости вращения идеальной жидкости вида (3) по отношению к асимметричным возмущениям неразрешима для нормальных мод, если вращение является потенциальным (т. е. имеет вид (10)).

Отметим, что уравнение (7) может быть разрешимо для сингулярных мод, для которых в какой-либо точке течения выполнено условие (8).

Однако, как было отмечено выше, выполнение условия (8) означает, что собственная частота является вещественным числом, и, следовательно, означает устойчивость соответствующей моды. С учетом устойчивости потенциального течения (согласно критерию (1)) к осесимметричным возмущениям потенциальное вращение идеальной жидкости устойчиво по отношению к любым возмущениям аналогично твердотельному вращению.

Подчеркнем, что условие однородности жидкости является существенным. Например, при наличии устойчивой вертикальной стратификации плотности потенциальное вращение становится неустойчивым по отношению к асимметричным возмущениям (см., например, [8–10]).

Благодарности

Автор выражает благодарность редактору и рецензенту за замечания, которые позволили существенно улучшить стиль статьи.

Конфликт интересов

Автор заявляет, что у него нет конфликта интересов.

Список литературы

[1] S. Chandrasekhar, *Hydrodynamic and hydromagnetic stability*(Clarendon Press, Oxford, 1961).

[2] Х. Гринспен, *Теория вращающихся жидкостей* (Гидрометеоиздат, Л., 1975). [H.P. Greenspan, *The theory of rotating fluids* (Cambridge University Press, Cambridge, 1968).].

[3] P.G. Drazin, W. H. Raid, *Hydrodynamic stability* (Cambridge University Press, Cambridge, 1981).

[4] Ф. Дразин, *Введение в теорию гидродинамической устойчивости* (Физматлит, М., 2005). [P.G. Drazin, Introduction to hydrodynamic stability (Cambridge University Press, Cambridge, 2002).].

[5] L.N. Howard, A.S. Gupta, J. Fluid Mech., **14**, 463 (1962). DOI: 10.1017/S0022112062001366

[6] Lord Rayleigh, Proc. R. Soc. Lond. A, **93**, 148 (1917). DOI: 10.1098/rspa.1917.0010

[7] J.L. Synge, Trans. R. Soc. Can., **27**, 1 (1933).

[8] D. Shalybkov, G. Rüdiger, Astron. Astrophys., **438**, 411 (2005). DOI: 10.1051/0004-6361:20042492

[9] J. Park, P. Billant, J. Fluid Mech., **725**, 262 (2013). DOI: 10.1017/jfm.2013.186

[10] W. Oxley, R.R. Kerswell, J. Fluid Mech., **991**, A16 (2024). DOI: 10.1017/jfm.2024.549