

03

## Влияние условий формирования турбулентных течений на когерентные структуры и пульсации скорости

© Д.Ю. Жиленко, О.Э. Кривоносова

Институт механики Московского государственного университета им. М.В. Ломоносова, Москва, Россия  
E-mail: jilenko@imec.msu.ru

Поступило в Редакцию 18 сентября 2024 г.

В окончательной редакции 7 ноября 2024 г.

Принято к публикации 7 ноября 2024 г.

Численно исследованы турбулентные течения вязкой несжимаемой жидкости в сферическом слое. Рассматриваются два способа формирования течений: последовательное и одновременное увеличение скорости встречного вращения сферических границ из состояния покоя. Установлено, что при равных числах Рейнольдса, но различных способах формирования течений отличаются виды пространственных когерентных структур, уровни пульсаций скорости и их спектры.

**Ключевые слова:** неединственность турбулентных течений, сферическое течение Куэтта.

DOI: 10.61011/PJTF.2025.05.59904.20124

Вблизи порога формирования турбулентности в течениях могут наблюдаться крупномасштабные когерентные структуры [1–5]. Такие структуры могут являться результатом линейной неустойчивости как ламинарных течений, предшествующих зарождению турбулентности [1,5], так и турбулентных течений [6,7]. Предполагается, что существование когерентных структур поддерживается колебаниями энергии турбулентности [1], но проблема взаимодействия структур и хаотических компонент пока не решена [4]. В настоящей работе рассматривается турбулентность в сферическом течении Куэтта (СТК) — течения вязкой несжимаемой жидкости под действием вращения коаксиально расположенных сфер. Интерес к турбулентности в течениях с вращением вызван необходимостью ее подавления [8], например, в технологиях обработки жидких металлов и расплавов [9]. Как установлено в [10,11], возможности формирования турбулентности в СТК и ее свойства определяются предысторией развития течений. В [11] при условии равенства чисел Рейнольдса для внутренней и внешней сферических границ экспериментально показано, что при различных способах формирования турбулентных течений их свойства (вид спектра и величины корреляционной размерности) отличаются. В других случаях вопрос о зависимости свойств трехмерных турбулентных течений вязкой несжимаемой жидкости от их предыстории остается открытым, что и определяет цель настоящей работы.

Течение вязкой несжимаемой жидкости описывается уравнениями Навье–Стокса и неразрывности

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} = \mathbf{U} \times \text{rot } \mathbf{U} - \text{grad} \left( \frac{p}{\rho} + \frac{\mathbf{U}^2}{2} \right) - \nu \text{rot rot } \mathbf{U}, \quad \text{div } \mathbf{U} = 0$$

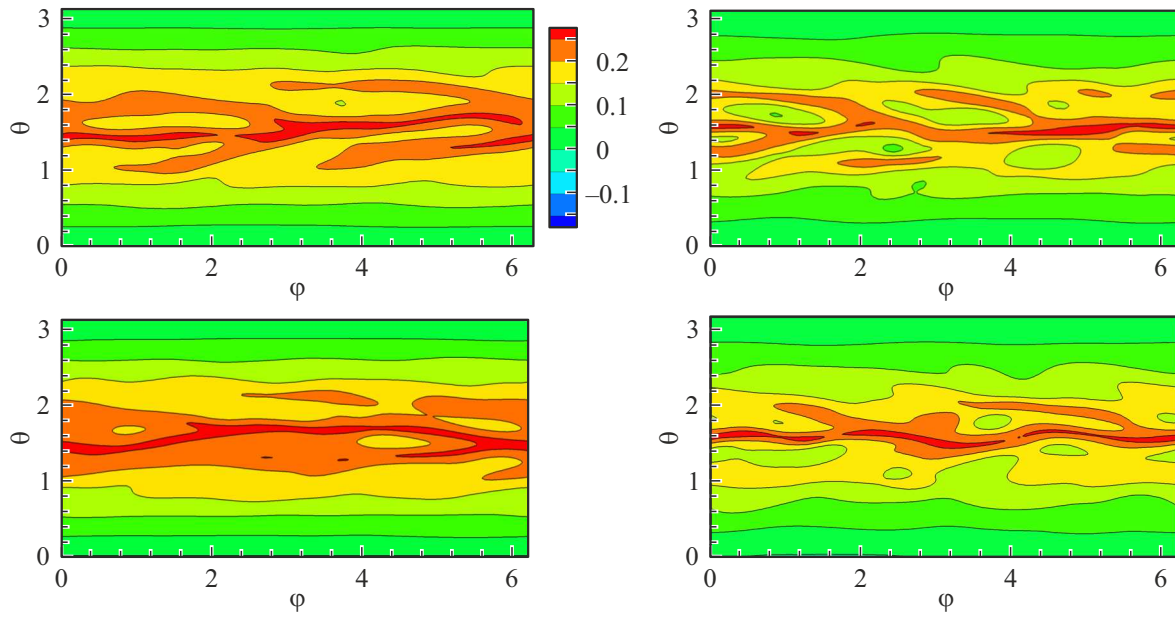
с условиями прилипания и непротекания на границах в сферической системе координат:

$$u_\varphi(r = r_k) = \Omega_k(t)r_k \sin \theta, \quad u_r(r = r_k) = 0,$$

$$u_\theta(r = r_k) = 0, \quad k = 1, 2.$$

Здесь  $\mathbf{U}$  — поле скорости,  $p$  — давление,  $\rho$  — плотность,  $\nu$  — кинематическая вязкость жидкости в слое,  $u_\varphi, u_r, u_\theta$  — соответственно азимутальная, радиальная и полярная компоненты скорости,  $\Omega_1$  и  $\Omega_2$  — угловые скорости вращения, а  $r_1$  и  $r_2$  — радиусы внутренней и внешней сфер соответственно (индекс 1 относится к внутренней сфере, 2 — к внешней).

Численный метод решения основан на консервативной конечно-разностной схеме дискретизации уравнений Навье–Стокса по пространству и полуявной схеме Рунге–Кутты третьего порядка точности для интегрирования по времени, алгоритм подробно исследован в [12], а в частном случае трехмерной задачи в сферической системе координат с использованием неравномерных по  $\theta$  и  $r$  сеток — в работе [13]. Решалась полная система уравнений с дискретизацией по пространству на неравномерных по  $r$  и  $\theta$  сетках с общим количеством узлов  $5.76 \cdot 10^5$  и отношением максимального размера ячейки к минимальному 4. Сходимость результатов расчетов по мере увеличения количества узлов подробно изучена в [13–15]. Расчеты проведены при параметрах, соответствующих параметрам эксперимента [11]:  $\nu = 5 \cdot 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}$ ,  $r_2 = 0.15 \text{ m}$ ,  $r_1 = 0.075 \text{ m}$  (относительная толщина слоя  $\sigma = (r_2 - r_1)/r_1 = 1$ ). Рассматриваются два способа формирования турбулентных течений при  $\text{Re}_2 = \Omega_2 r_2^2 / \nu = -900$  (знаком минус перед одним из чисел Рейнольдса принято обозначать противоположное направление вращения границ). При первом, назовем его асинхронным, расчет начинается с  $\text{Re}_1 = \Omega_1 r_1^2 / \nu = 0$ . Затем  $\text{Re}_1$  изменяется при постоянном  $\text{Re}_2$ . При втором способе, назовем его синхронным,



**Рис. 1.** Распределение азимутальной скорости  $u_\varphi$  [m/s] в плоскости  $\theta$ – $\varphi$  на расстоянии  $0.07\sigma$  от внутренней сферы. Сверху — асинхронный способ формирования течений, снизу — синхронный. С левой стороны —  $Re_1 = 460$ , с правой —  $Re_1 = 490$ . Цветной вариант рисунков представлен в электронной версии статьи.

одновременно изменяются угловые скорости вращения обеих границ из состояния покоя до выбранных значений  $Re_1$ . Значения  $Re_1$  выбирались вблизи порога перехода к турбулентности  $Re_{1t} = 450$  [14]:  $Re_1 = 460, 470$  и  $490$ . Шаг по времени постоянный  $\Delta t = 1.2 \cdot 10^{-2}$  s, что обеспечивало 120–128 шагов за один оборот внутренней сферы. Продолжительность каждого варианта расчета составляла 5400 s, осредненные величины вычислялись по последним 2100 s.

Так же как и в [14], в качестве когерентных структур рассматривается распределение азимутальной скорости  $u_\varphi$  в плоскости  $\theta$ – $\varphi$ . При асинхронном формировании турбулентности в [14] показано, что при  $Re_1 = 450$  и  $Re_2 = -900$  на расстоянии  $0.2\sigma$  от внутренней сферы можно выделить когерентную структуру в виде азимутальной волны с волновым числом  $m = 3$  ([14], рис. 1, b). В настоящей работе установлено, что независимо от способа формирования турбулентности в области между внешней сферой и линией раздела циркуляций, определяемой условием  $u_\varphi = 0$ , доминируют такие же когерентные структуры. Вблизи внутренней сферы при различных способах формирования турбулентности меняется не только вид когерентных структур, но и степень их когерентности, понимаемая как возможность выделения доминирующего волнового числа в азимутальном направлении. Так, при  $Re_1 = 460$  (левая часть рис. 1) на верхнем фрагменте (асинхронный способ) наблюдается волновое число  $m = 2$ , тогда как на нижнем (синхронный способ) доминирующего числа  $m$  нет. Обратная ситуация в правой части рис. 1 при  $Re_1 = 490$ : сверху (асинхронный способ) наблюдается комбинация  $m = 2$  и  $m = 3$  (такая структура не сохраняется постоянной,

**Таблица 1.** Нормированные значения среднеквадратичных отклонений азимутальной компоненты кинетической энергии течений

$Re_1$	$((\text{rms } E_\varphi)/E_\varphi)_A$ асинхронный способ	$((\text{rms } E_\varphi)/E_\varphi)_S$ синхронный способ
460	0.00556	0.00576
470	0.00606	0.00613
490	0.00714	0.00664

поскольку волны с  $m = 2$  и  $m = 3$  распространяются с разными фазовыми скоростями [13,15]), снизу (синхронный способ) доминирующим является  $m = 3$ . Таким образом, в случае  $Re_1 = 460$  степень когерентности пространственных структур выше при асинхронном, а в случае  $Re_1 = 490$  — при синхронном способе формирования течений. Рассмотрим далее амплитуды флуктуаций азимутальной составляющей кинетической энергии течений  $E_\varphi$  —  $\text{rms } E_\varphi$

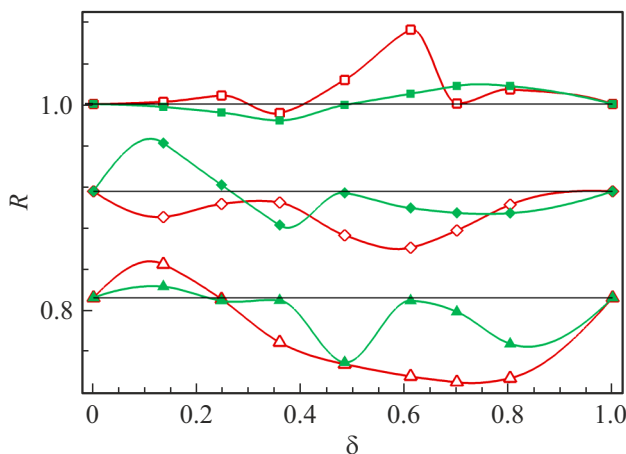
$$E_\varphi = \int u_\varphi^2(r, \theta, t), \quad \text{rms } E_\varphi = \sqrt{\frac{1}{I-1} \sum_{i=1}^I (E_\varphi(t_i) - E_{\varphi_0})^2}.$$

Величина  $E_\varphi$  определяется интегрированием азимутальной компоненты скорости течения по всему объему сферического слоя,  $E_\varphi(t)$  и  $E_{\varphi_0}$  — соответственно мгновенные и средние значения азимутальной компоненты кинетической энергии течения. Из табл. 1 видно, что при  $Re_1 = 460$   $\text{rms } E_\varphi$  меньше для асинхронного способа, а при  $Re_1 = 490$  — меньше для синхрон-

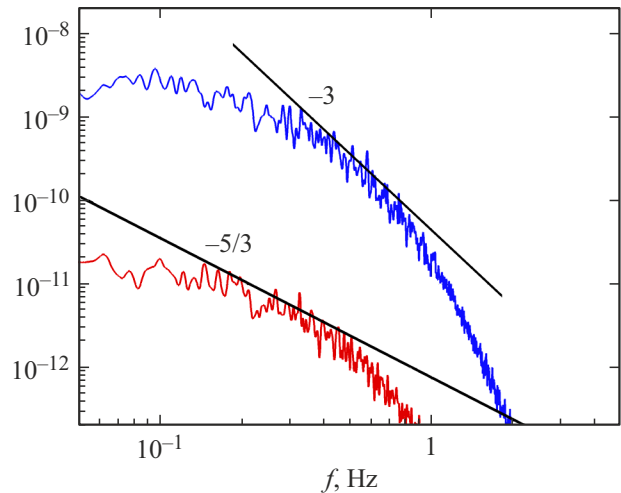
**Таблица 2.** Локальные области течений, в которых при различных способах формирования течений изменяется вид спектров пульсаций скорости (2D — спектры, соответствующие двумерной турбулентности, 3D — спектры, соответствующие трехмерной турбулентности)

Re <sub>1</sub>	θ	δ	Вид спектра		R (из рис. 2)
			Синхронный способ	Асинхронный способ	
460	21.3	0.135	3D	2D	> 1
460	52.9	0.61, 0.7	2D	3D	< 1
470	21.3	0.134, 0.25, 0.36	2D	3D	< 1
470	52.9	0.7, 0.8	2D	3D	< 1
470	89.8	0.8	2D	3D	< 1
470	89.8	0.25	3D	2D	> 1
490	21.3	0.8	2D	3D	< 1
490	89.8	0.25	2D	3D	< 1

ного способа. Сравнение рис. 1 и табл. 1 указывает на корреляцию между степенью когерентности пространственных структур и величинами флуктуаций  $E_\varphi$ : чем выше степень когерентности, тем ниже амплитуда флуктуаций  $E_\varphi$ , что соответствует имеющимся представлениям о взаимодействии когерентных структур и флуктуаций скорости [1]. На рис. 2 представлено распределение отношения амплитуд флуктуаций скорости течений  $R = \text{rms}(u_\varphi)_S / \text{rms}(u_\varphi)_A$  от безразмерного расстояния  $\delta = (r - r_1) / (r_2 - r_1)$ , где индекс  $S$  относится к синхронному,  $A$  — к асинхронному способу. Величина  $R$  на всех широтах и при всех значениях  $Re_1$  имеет локальные экстремумы. Наибольшее и наименьшее значения  $R$  наблюдаются при  $Re_1 = 460$  в плоскости экватора и в приполярной области соответственно. При различных способах формирования течений флуктуации скорости отличаются не только интенсивностью, но и



**Рис. 2.** Зависимость величины  $R$  от  $\delta$ . Квадраты —  $\theta = 89.8^\circ$  (плоскость экватора), ромбы —  $\theta = 52.9^\circ$  (средние широты), треугольники —  $\theta = 21.3^\circ$  (приполярная область). Красный (незакрашенные символы) —  $Re_1=460$ , зеленый (закрашенные символы) —  $Re_1=490$ . Для наглядности кривые при разных значениях  $\theta$  сдвинуты по оси ординат, горизонтальные черные линии соответствуют  $R = 1$ .



**Рис. 3.** Спектры пульсаций азимутальной скорости при  $Re_1 = 490, \theta = 21.3^\circ$  на расстоянии  $0.8\sigma$  от внутренней сферы. Красным цветом (нижняя кривая) показан асинхронный способ, синим цветом (верхняя кривая) — синхронный способ, прямые линии — аппроксимация наклонов спектров.

видом спектров (рис. 3). При синхронном способе спектры, характерные для двумерной турбулентности (2D) с обратным каскадом передачи энергии (зависимость энергетического спектра  $E(k)$  от волнового числа  $k$  в виде  $E(k) \sim k^{-3}$ ), наблюдаются на средних широтах ( $Re_1 = 460, 470$ ), вблизи оси вращения и в части экваториальной плоскости ( $Re_1 = 470, 490$ ). При асинхронном способе в этих же областях течения получены спектры, характерные для трехмерной турбулентности (3D) с прямым каскадом передачи энергии ( $E(k) \sim k^{-5/3}$  и  $E(k) \sim k^{-11/5}$ ). Возможность формирования в течениях с вращением областей с различными видами спектров хорошо известна [16]. В табл. 2 приведены координаты точек, в которых при разных способах формирования получены различные виды спектров. Сравнение табл. 2 и рис. 2 показывает, что эти точки лежат в областях локальных экстремумов зависимости  $R(\delta)$ , т.е. в об-

ластях изменения интенсивности флуктуаций скорости течения. В последнем столбце табл. 2 приведены значения  $R$  в соответствующих точках. Видно, что при одних и тех же  $Re_1$  локальные максимумы флуктуаций азимутальной скорости соответствуют трехмерной турбулентности, а локальные минимумы — двумерной.

В полученных результатах прослеживается общая взаимосвязь между всеми рассмотренными выше свойствами турбулентности: чем выше степень когерентности крупномасштабных пространственных структур, тем ниже интенсивность пульсаций кинетической энергии. В свою очередь максимальное снижение интенсивности пульсаций скорости в локальных областях течений приводит к двумерной турбулентности с передачей энергии от меньших масштабов к большим, где наблюдаются когерентные структуры. Наоборот, с уменьшением степени когерентности пространственных структур пульсации кинетической энергии возрастают, как и флуктуации скорости, и наблюдается трехмерная турбулентность. Процессы обмена энергией между флуктуациями скорости и основным течением активно изучаются в настоящее время [17].

#### Финансирование работы

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 23-29-00051).

#### Конфликт интересов

Авторы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

#### Список литературы

- [1] J. Jimenez, J. Fluid Mech., **842**, 1 (2018). DOI: 10.1017/jfm.2018.144
- [2] S.T. Salesky, W. Anderson, Phys. Rev. Lett., **125**, 124501 (2020). DOI: 10.1103/PhysRevLett.125.124501
- [3] M.D. Graham, D. Floryan, Annu. Rev. Fluid Mech., **53**, 227 (2021). DOI: 10.1146/annurev-fluid-051820-020223
- [4] Д.С. Агафонцев, Е.А. Кузнецов, А.А. Майлыбаев, Е.В. Серещенко, УФН, **192** (2), 205 (2022). DOI: 10.3367/UFN.2020.11.038875 [D.S. Agafontsev, E.A. Kuznetsov, E.V. Sereshenko, A.A. Mailybaev, Phys. Usp., **65** (2), 189 (2022). DOI: 10.3367/ufne.2020.11.038875].
- [5] A. Guseva, S.M. Tobias, Phil. Trans. R. Soc. A, **381**, 20220120 (2023). DOI: 10.1098/rsta.2022.0120
- [6] P.V. Kashyap, Y. Duguet, O. Dauchot, Phys. Rev. Lett., **129**, 244501 (2022). DOI: 10.1103/PhysRevLett.129.244501
- [7] J. Page, P. Norgaard, M.P. Brenner, R.R. Kerswell, PNAS, **121** (23), e2320007121 (2024). DOI: 10.1073/pnas.2320007121
- [8] Д.Ю. Жиленко, О.Э. Кривоносова, Письма в ЖТФ, **45** (17), 20 (2019). DOI: 10.21883/PJTF.2019.17.48218.17740 [D.Yu. Zhilenko, O.E. Krivososova, Tech. Phys. Lett., **45** (9), 870 (2019). DOI: 10.1134/S1063785019090141].
- [9] А.И. Простомолотов, Н.А. Вереzub, *Механика процессов получения кристаллических материалов* (НИТУ „МИСиС“, М. 2023). DOI: 10.61726/5600.2024.15.25.001
- [10] Ю.Н. Беляев, И.М. Яворская, Изв. АН СССР, Механика жидкости и газа, № 1, 10 (1991). [Yu.N. Belyaev, I.M. Yavorskaya, Fluid Dyn., **26** (1), 7 (1991). DOI: 10.1007/BF01050106].
- [11] Д.Ю. Жиленко, О.Э. Кривоносова, Изв. РАН, Механика жидкости и газа, **43** (5), 30 (2008). [D.Yu. Zhilenko, O.E. Krivososova, Fluid Dyn., **43** (5), 698 (2008). DOI: 10.1134/S0015462808050037].
- [12] N. Nikitin, J. Comp. Phys., **217**, 759 (2006). DOI: 10.1016/j.jcp.2006.01.036.
- [13] О.Э. Кривоносова, *Переход к стохастичности в широким сферическом слое при встречном вращении границ: прямой расчет и эксперимент*, автореф. канд. дис. (МГУ, М., 2007).
- [14] Д.Ю. Жиленко, О.Э. Кривоносова, ЖТФ, **80** (4), 16 (2010). [D.Yu. Zhilenko, O.E. Krivososova, Tech. Phys., **55** (4), 449 (2010). DOI: 10.1134/S1063784210040031].
- [15] Д.Ю. Жиленко, О.Э. Кривоносова, Письма в ЖТФ, **39** (1), 62 (2013). [D.Yu. Zhilenko, O.E. Krivososova, Tech. Phys. Lett., **39** (1), 84 (2013). DOI: 10.1134/S1063785013010276].
- [16] K. Seshasayanan, B. Gallet, J. Fluid Mech., **901**, R5 (2020). DOI: 10.1017/jfm.2020.541
- [17] B. Tripathi, P.W. Terry, A.E. Fraser, E.G. Zweibel, M.J. Pueschel, Phys. Fluids, **35**, 105151 (2023). DOI: 10.1063/5.0167092