01,14

Обоснование эмпирических уравнений состояния Боднера–Партома при квазистатическом деформировании материалов в рамках акустопластического эффекта

© *А.Л. Глазов, К.Л. Муратиков, А.А. Сухарев*

Физико-технический институт им. А.Ф. Иоффе РАН,
Санкт-Петербург, Россия

E-mail: glazov.holo@mail.ioffe.ru

Поступила в Редакцию 14 февраля 2025 г.
В окончательной редакции 23 февраля 2025 г.
Принята к публикации 23 февраля 2025 г.

В рамках модифицированной модели акустопластического эффекта рассмотрены процессы упругой и пластической деформации материалов. Проанализированы условия, при которых она приводит к широко используемой эмпирической модели Боднера–Партома (Bodner–Partom) для описания экспериментальной зависимости напряжения от деформации. Определены границы применимости этой эмпирической модели. Определена связь параметров модели Боднера–Партома с такими параметрами материала, как напряжение внутреннего трения, активационный объем дефектов, время их релаксации и их равновесной концентрацией, а также с параметром, характеризующим степень взаимодействия дефектов.

Ключевые слова: зависимость напряжение–деформация, скорость пластической деформации, релаксация дефектов.

DOI: 10.61011/FTT.2025.02.59974.31-25

1. Введение

В настоящее время определение целого ряда важных механических параметров материала производится с использованием нагружающих устройств, задающих определенную скорость деформации и регистрирующих соответствующее этой деформации значение приложенного напряжения [1,2]. В начале упругого участка кривой напряжение–деформация ее линейная часть определяется модулем Юнга материала. В области пластической деформации ее анализ позволяет определить напряжение течения и параметры деформационного упрочнения. Сложность физических процессов, протекающих в материале при переходе от упругих деформаций к пластическим, требуют разработки достаточно сложных физико-механических моделей деформирования, учитывающих процессы образования, взаимодействия и перемещения дефектов. Отсутствие подобных моделей способствовало широкому распространению целого ряда эмпирических моделей, описывающих связь напряжения с деформацией в пластической области. Их использование для интерпретации экспериментальных результатов позволяет получить количественные характеристики для описания неупругого поведения материала с помощью набора параметров, физический смысл которых часто остается не вполне понятным.

Как было нами показано в работе [3], использование акустопластической модели деформирования материалов позволяет обосновать ряд эмпирических моделей деформирования и выяснить физико-механическую природу используемых в них параметров. Результативность подобного подхода была продемонстрирована для эмпирической модели Джонсона–Кука (Johnson–Cook) [4–6], а также более специализированных моделей Воса (Voce) [7,8] и Холломона (Hollomon) [9,10]. При этом были установлены условия, при которых результаты акустопластической модели позволяют использовать указанные эмпирические модели для описания связи напряжения с деформацией в пластической области.

В 1975 г. Боднер и Партом предложили свою эмпирическую модель [11], основанную на подходе, отличающемся от модели Джонсона–Кука. В настоящее время она развивается и, так же как и модель Джонсона–Кука, широко используется для описания кривых напряжение–деформация [12,13].

2. Физико-механическое обоснование

Проведем физико-механическое обоснование эмпирической модели Боднера–Партома с точки зрения акустопластического эффекта, рассмотрим вопрос о возможности ее обоснования в рамках модели акустопластического эффекта и дадим физическую интерпретацию использующихся в ней параметров. Для этого воспользуемся основным уравнением для описания динамики поведения напряжения на образце в рамках акустопластического эффекта при его нестационарном деформировании [14,15]

$$\frac{1}{E}\frac{\partial\sigma}{\partial t} = \dot{\varepsilon} - \dot{\varepsilon}_p, \tag{1}$$

где E — модуль Юнга материала, $\dot{\varepsilon}$ — скорость изменения полной деформации объекта, задаваемая внешним источником, $\dot{\varepsilon}_p$ — скорость изменения пластической деформации материала.

Для определения скорости пластической деформации $\dot{\varepsilon}_p$ обычно считают, что генерация дефектов в материале происходит по активационному закону Аррениуса, и ее можно найти из соотношения

$$\dot{\varepsilon}_p = \dot{\varepsilon}_\nu \exp\left(\frac{\Omega\big(\sigma - \sigma_f - \sigma_p(\varepsilon)\big)}{k_\mathrm{B}T}\right), \qquad (2)$$

где σ_f — напряжение, обусловленное наличием внутреннего трения для дефектов, σ_p — напряжение в образце, связанное с генерацией в нем дефектов, предэкспоненциальный фактор $\dot{\varepsilon}_\nu$ описывает скорость деформации материала за счет перемещения дислокаций и обычно предполагается постоянным, Ω — активационный объем дефекта, k_B — постоянная Больцмана, T — температура образца.

При традиционном использовании модели акустопластического эффекта рассмотрение обычно производится в рамках уравнений (1) и (2). При этом зависимость деформационного упрочнения σ_p от ε приходится вводить эмпирически [14]. В работах [3,16–18] нами было показано, что вид этой зависимости может быть определен из кинетического уравнения для концентрации дефектов с учетом их релаксационных свойств и характера взаимодействия. Анализ подобного подхода показывает, что он позволяет получить связь между напряжением и деформацией в пластической области при использовании соотношения

$$\sigma_p(\varepsilon_p) \simeq \sigma_f \Omega n(\varepsilon_p) - n(\varepsilon_p) e_p, \qquad (3)$$

где e_p — энергия пластической деформации, приходящаяся на один дефект.

Выражение (3) является обобщением известного соотношения $\sigma = E\Omega n$ [19], используемого для учета напряжения в упругой области материала при присутствии в нем дефектов с концентрацией $n(\varepsilon)$. При этом общее напряжение на образце в области пластических деформаций определяется выражением $\sigma(\varepsilon_p) \cong \sigma_f + \sigma_p(\varepsilon_p)$. При рассмотрении поведения материала в пластической области представляется более правильным использовать σ_f вместо E. Последнее слагаемое в выражении (3) отражает изменение напряжения в образце из-за выделения энергии e_p вблизи дефекта.

В работе [3] было показано, что решение уравнения (1) относительно напряжения σ с использованием выражений (2) и (3) может быть представлено в виде

$$\sigma(\varepsilon) = E\varepsilon - \frac{k_\mathrm{B}T}{\Omega} \ln\Bigg[1 + \frac{\Omega E}{k_\mathrm{B}T}\,\dot{\varepsilon}_\nu \int\limits_0^{\varepsilon} d\varepsilon' \,\frac{1}{\dot{\varepsilon}'}$$
$$\times \exp\left(\frac{\Omega(E\varepsilon' - \sigma_f - \Omega\sigma_f n(\varepsilon') + n(\varepsilon')e_p(\varepsilon'))}{k_\mathrm{B}T}\right)\Bigg], \qquad (4)$$

где $n(\varepsilon)$ в соответствии с работами [3,16] изменяется по закону

$$n(\varepsilon) = n_r\big[1 - \exp\big(-(\varepsilon/\dot{\varepsilon}_\nu\tau)^\beta\big)\big],$$

n_r — равновесная концентрация дефектов, τ — время релаксации дефектов, β — коэффициент, характеризующий степень взаимодействия дефектов [20]. Уравнение (4) можно рассматривать как достаточно общее уравнение состояния материала при деформировании, как в упругой, так и в пластической областях.

Для получения феноменологической зависимости Боднера–Партома следует рассмотреть поведение соотношения (4) в области пластических деформаций при $\varepsilon \geq \varepsilon_e$, где ε_e — максимальная деформация, соответствующая упругой области. В этом случае основной вклад в интеграл дает первое слагаемое в показателе экспоненты, а остальные слагаемые можно рассматривать как медленно меняющиеся функции от деформации. При указанных условиях в зоне пластических деформаций выражение (4) можно преобразовать к виду

$$\sigma(\varepsilon_p) \simeq -\frac{k_\mathrm{B}T}{\Omega} \ln\frac{\dot{\varepsilon}_\nu}{\dot{\varepsilon}_p} - k_\mathrm{B}T n(\varepsilon_p) \ln\frac{\dot{\varepsilon}_\nu}{\dot{\varepsilon}_p} + \sigma_f + \Omega\sigma_f n(\varepsilon_p). \qquad (5)$$

В соответствии с выражением (5) для скорости пластической деформации получим соотношение

$$\dot{\varepsilon}_p \simeq \dot{\varepsilon}_\nu \exp\left(\frac{\Omega}{k_\mathrm{B}T}\,\frac{\sigma(\varepsilon_p) - \sigma_f(1 + n(\varepsilon_p)\Omega)}{1 + n(\varepsilon_p)\Omega}\right). \qquad (6)$$

С использованием выражения (3) это соотношение запишется в виде

$$\dot{\varepsilon}_p = \dot{\varepsilon}_\nu \exp\left(-\frac{\Omega}{k_\mathrm{B}T}\,\frac{n(\varepsilon_p)e_p}{1 + n(\varepsilon_p)\Omega}\right). \qquad (7)$$

При проведении деформационных экспериментов с материалами релаксационные процессы обычно протекают достаточно медленно, и можно считать выполненным условие $\varepsilon_p \leq \dot{\varepsilon}_\nu\tau$. Тогда концентрацию дефектов можно определить из соотношения $n(\varepsilon_p) \simeq n_r(\varepsilon_p/\dot{\varepsilon}_\nu\tau)^\beta$. Будем также считать, что $e_p = \kappa n(\varepsilon_p)$, где κ — некоторая постоянная величина. При объеме дефекта $\Omega \approx 10^{-28}\,\mathrm{m}^3$ неравенство $n\Omega \ll 1$ выполняется вплоть до достаточно высоких концентраций дефектов $10^{27}\,\mathrm{m}^{-3}$. Если считать перечисленные условия выполненными, то для выражения (7) получим

$$\dot{\varepsilon}_p \simeq \dot{\varepsilon}_\nu \exp\left(-\frac{\kappa\Omega n_r^2}{k_\mathrm{B}T}\left(\frac{\varepsilon_p}{\dot{\varepsilon}_\nu\tau}\right)^{2\beta}\right). \qquad (8)$$

В правой части уравнения (8) деформацию ε_p можно выразить через напряжения с помощью равенства (3). Тогда с учетом того, что $\varepsilon_p \cong \Omega n(\varepsilon_p)$, получим

$$\varepsilon_p = \frac{\Omega^2}{2\kappa}\left[\sigma_f - \sqrt{\sigma_f^2 - 4\,\frac{\kappa}{\Omega^2}(\sigma_p - \sigma_f)}\,\right]. \qquad (9)$$

При выполнении условия $(\sigma_p - \sigma_f)\kappa/(\Omega\sigma_f)^2 \ll 1$ равенство (8) приводится к виду

$$\dot{\varepsilon}_p \simeq \dot{\varepsilon}_\nu \exp\left(-\frac{\kappa\Omega n_r^2}{k_\mathrm{B}T}\left(\frac{1}{\dot{\varepsilon}_\nu\tau}\right)^{2\beta}\left(\frac{\sigma_p - \sigma_f}{\sigma_f}\right)^{2\beta}\right). \qquad (10)$$

Для одномерного случая равенству (10) можно придать форму, принятую в модели Боднера–Партома. Для этого необходимо ввести функцию

$$Z = \frac{1}{\dot{\varepsilon}_\nu \tau}\left(\frac{2\kappa\Omega n_r^2}{k_{\mathrm{B}}T}\right)^{1/2\beta}(\sigma_p - \sigma_f)$$

и считать, что напряжение σ_f примерно совпадает с одноосным напряжением σ_{11}, прикладываемым к образцу, а ε_p совпадает с компонентой ε_{11}^p тензора пластической деформации. Тогда выражение (10) принимает форму, принятую в модели Боднера–Партома:

$$\dot{\varepsilon}_{11}^p = \frac{2}{\sqrt{3}} D_0 \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{Z}{\sigma_{11}}\right)^{2\beta}\right), \tag{11}$$

где константа D_0 введена в соответствии с обозначениями работ [11,12], принятыми в модели Боднера–Партома $D_0 = \frac{\sqrt{3}}{2}\dot{\varepsilon}_\nu$.

По поводу полученного результата следует сделать важные замечания. Одно из них касается вида полученной зависимости $\dot{\varepsilon}_{11}^p$ от Z. Так, если в модели Боднера–Партома вид этой зависимости устанавливается эмпирическим образом, то при использовании подхода в рамках акустоупругости он обосновывается достаточно естественным образом. Кроме того, в модели Боднера–Партома при введении функции Z в равенство для $\dot{\varepsilon}_{11}^p$ ее природа остается недостаточно ясной. Отмечается, что функция Z в определенный момент времени должна отражать некоторую историю нагружения образца за предыдущие периоды. С этой целью для ее определения без учета процессов термического восстановления материала предлагается использовать уравнение [11,12]

$$\dot{Z} = -m_1 \dot{W}_p Z + m_1 \dot{W}_p Z_1, \tag{12}$$

где m_1 описывает скорость деформационного упрочнения материала; $\dot{W}_p$ — скорость совершения работы деформирующим устройством, затрачиваемой на его пластическое деформирование; Z_1 — значение параметра Z, соответствующее его насыщению.

Покажем, что уравнение для функции Z в виде (12) можно получить из кинетического уравнения для концентрации дефектов, использованного нами в работах [3,16]. Будем считать, что скорость образования дефектов в материале при его пластическом деформировании задается деформирующим устройством. Тогда кинетическое уравнение для концентрации дефектов, формирующихся в процессе деформирования материала, в соответствии с работами [3,16] можно представить в следующей форме:

$$\frac{dn}{dt} = -\frac{n}{\tau} + \dot{g}, \tag{13}$$

где $\dot{g}$ — некоторая скорость генерации дефектов, задаваемая нагружающим устройством.

Если в выражении для функции Z ограничиться линейными по концентрации дефектов членами, то получим ее в виде

$$Z = \frac{\sigma_f \Omega}{\dot{\varepsilon}_\nu \tau}\left(\frac{2\kappa\Omega n_r^2}{k_{\mathrm{B}}T}\right)^{1/2\beta} n.$$

С помощью этого равенства уравнение (13) можно преобразовать к виду

$$\frac{dZ}{dt} = -\frac{Z}{\tau} + \frac{\dot{g}'}{\tau'}, \tag{14}$$

где

$$\dot{g}' = \frac{\sigma_f \Omega}{\dot{\varepsilon}_\nu}\left(\frac{2\kappa\Omega n_r^2}{k_{\mathrm{B}}T}\right)^{1/2\beta} \dot{g}.$$

Кроме того, если считать, что вероятность генерации дефекта определяется скоростью поступления в материал энергии, затрачиваемой на пластическую деформацию в соответствии с условием $1/\tau = m_1 \dot{W}_p$, то уравнение (14) приобретает вид уравнения Боднера–Партома для функции Z, при этом $Z_1 = \dot{g}'$. Если считать скорость генерации дефектов $\dot{g}$ постоянной или медленно меняющейся во времени функцией, то Z_1 можно рассматривать в качестве параметра.

В соответствии с полученным нами результатом функция Z является некоторой интегральной характеристикой деформирования. Аналогичную роль эта функция играет и в модели Боднера–Партома, однако предложенная ими модель не позволяет конкретизировать вид этой функции. Использование модели акустопластичности позволяет это сделать, и показывает, что в силу уравнений (13) и (14) она тесно связана с концентрацией дефектов, накопленных в материале в процессе деформирования.

3. Заключение

Полученные результаты показывают, что использование теории акустопластического эффекта совместно с кинетическим уравнением для описания поведения дефектной подсистемы материала позволяет обосновать феноменологическую модель Боднера–Партома, широко используемую в физике и механике для описания связи напряжения и деформаций в области пластичности материала. Ранее в работе [3] нами было показано, что в рамках акустопластичности можно обосновать и другую важную феноменологическую модель — Джонсона–Кука. Рассмотрение двух разных феноменологических моделей в рамках единого подхода акустопластичности позволяет выяснить и определенные особенности их использования. Так, если в модели Джонсона–Кука энергия пластической деформации, приходящаяся на один дефект, считается связанной со скоростью пластической деформацией материала, то в модели Боднера–Партома ее значение определяется концентрацией дефектов. В обоих случаях теория акустопластичности при рассмотрении зависимости напряжения от деформации позволяет связать значения феноменологических параметров, используемых в эмпирических подходах, с такими характеристиками материала как напряжение течения, активационный объем дефектов, их равновесная концентрация, время релаксации и степень взаимодействия дефектов.

Финансирование работы

Работа выполнена при поддержке гранта Российского научного фонда № 24-19-00716 (https://rscf.ru/project/24-19-00716/).

Конфликт интересов

Авторы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

Список литературы

[1] J.E. Field, T.M. Walley, W.G. Proud, H.T. Goldrein, C.R. Siviour. Int. J. Impact Eng. **30**, *7*, 725 (2004).
[2] T. Bhujangrao, C. Froustey, E. Iriondo, F. Veiga, P. Darnis, F.G. Mata. Metals **10**, *7*, 894 (2020).
[3] А.Л. Глазов, К.Л. Муратиков, А.А. Сухарев. ФТТ **66**, *9*, 1483 (2024).
[4] G.R. Johnson, W.H. Cook. Proceed. Seventh Symposium on Ballistics, The Hague, The Netherlands (1983). P. 541–547.
[5] G.R. Johnson, W.H. Cook. Eng. Fracture Mechan. **21**, *1*, 31 (1985).
[6] T.J. Jang, J.B. Kim, H. Shin. J. Computat. Design. Eng. **8**, *4*, 1082 (2021).
[7] E. Voce. J. Institute. Metals **74**, 537 (1948).
[8] C. Zhang, B. Wang. J. Mater. Res. **27**, *20*, 2624 (2012).
[9] J.H. Hollomon. Trans. Metallurg. Soc. AIME **162**, *2*, 268 (1945).
[10] R.K. Nutor, N.K. Adomako, Y.Z. Fang. Am. J. Mater. Synthesis. Process. **2**, *1*, 1 (2017).
[11] S.R. Bodner, Y. Partom. J. Appl. Mech. **42**, *2*, 385 (1975).
[12] J. Bocko, V. Nohajova, J. Šarloši. Am. J. Mech. Eng. **3**, *6*, 181 (2015).
[13] M. Klimczak, M. Tekieli, P. Zieliński, M. Stzępek. Mater. **16**, *5*, 1856 (2023).
[14] Г.А. Малыгин. ФТТ **42**, *1*, 69 (2000). [G.A. Malygin. Phys. Solid State **42**, *1*, 72 (2000).]
[15] A.V. Kozlov, S.I. Selitsen. Mater. Sci. Eng. A **131**, *1*, 17 (1991).
[16] А.Л. Глазов, К.Л. Муратиков. ФТТ **66**, *3*, 359 (2024).
[17] A.L. Glazov, K.L. Muratikov. J. Appl. Phys. **131**, *24*, 245104 (2022).
[18] A.L. Glazov, K.L. Muratikov. Phys. Rev. B **105**, *21*, 214104 (2022).
[19] А.М. Косевич. Физическая механика реальных кристаллов. Наук. думка, Киев (1981). 328 с.
[20] K. Trachenko, A. Zaccone. J. Phys.: Condens. Matter **33**, *31*, 315101 (2021).

Редактор Е.В. Толстякова