

05,09

Модель Хольцмарка для спинового стекла

© В.П. Крайнов

Московский физико-технический институт (национальный исследовательский университет),
Долгопрудный, Московская обл., Россия
E-mail: vpkrainov@mail.ru

Поступила в Редакцию 16 декабря 2024 г.
В окончательной редакции 13 января 2025 г.
Принята к публикации 20 января 2025 г.

В спиновом стекле примесные атомы с магнитным моментом распределены редко и случайно среди немагнитного материала. Для описания их распределения в пространстве предлагается модель Хольцмарка. В рамках среднего самосогласованного поля аналитически найдена зависимость спонтанного магнитного поля от температуры, а также критическая температура, при которой это поле исчезает.

Ключевые слова: распределение Хольцмарка, критическая температура, спонтанное магнитное поле.

DOI: 10.61011/FTT.2025.02.59983.344

1. Введение

Спиновые стекла отличает возможность фазового перехода, связанного с возникновением статического спонтанного магнитного поля ниже определенной критической температуры T_c [1]. Это случайно направленное поле создается хаотически направленными магнитными моментами примесей в немагнитном материале. При небольшой концентрации примесных центров взаимодействием между ними можно пренебречь и анализ упрощается. Система становится однородно упорядоченной при температуре $T < T_c$. Точное рассмотрение задачи возможно только в (нереалистичном) случае параллельных друг другу магнитных моментов [2].

Обозначим через H_i напряженность магнитного поля в точке, где находится i -й атом примеси со спином $1/2$. Обозначим через μ магнитный момент этого атома. Энергия атома в магнитном поле расщепляется на два значения: $\pm\mu H$. Статистическая сумма, связанная с магнитным полем, имеет вид: $Z_i = \exp(-\mu H_i/T) + \exp(\mu H_i/T)$. Находим соответствующую свободную энергию:

$$F_i = -T \ln \left\{ 2 \cosh \left(\frac{\mu H_i}{T} \right) \right\}, \quad (1)$$

Определяем средний магнитный момент данного i -го примесного атома:

$$M_i = -\frac{\partial F_i}{\partial H_i} = \mu \tanh \left(\frac{\mu H_i}{T} \right). \quad (2)$$

Этот магнитный момент создает магнитное поле в точке j , где находится какой-то другой атом примеси:

$$\mathbf{H}_j = \frac{3\mathbf{n}(\boldsymbol{\mu}\mathbf{n}) - \boldsymbol{\mu}}{R^3} \tanh \left(\frac{\mu H_i}{T} \right). \quad (3)$$

Здесь R — расстояние между атомами, $\mathbf{n}$ — единичный вектор вдоль направления, соединяющего атомы. Магнитное поле $\mathbf{H}_j$ очень быстро убывает при увеличении

этого расстояния. Поэтому можно считать, что R — это фактически расстояние до ближайших соседей.

При усреднении по углам вектора $\boldsymbol{\mu}$ магнитное поле (3), очевидно, обращается в нуль. Но оказывается, что большое количество таких магнитных моментов, случайно расположенных в пространстве и имеющих случайное направление, создают отличное от нуля вполне определенное магнитное поле, хотя и также случайно направленное (неэргодическая система).

Обратимся к отличному от нуля квадрату напряженности магнитного поля:

$$H_j^2 = \frac{\mu^2 + 3(\boldsymbol{\mu}\mathbf{n})^2}{R^6} \tanh^2 \left(\frac{\mu H_i}{T} \right). \quad (4)$$

Усредняя его по хаотически направленным углам вектора $\boldsymbol{\mu}$, из (4) получим:

$$H_j^2 = \frac{2\mu^2}{R^6} \tanh^2 \left(\frac{\mu H_i}{T} \right). \quad (5)$$

2. Приближение ближайших соседей

Магнитное поле H_j создается в действительности не одним атомом i , а большим количеством таких атомов поблизости от него. Определим нормированную на единицу вероятность $w(R)dR$ того, что примесный атом, ближайший к i -му атому, находится от него на расстоянии $[R, R + dR]$. Эта вероятность равна произведению вероятности, что внутри R нет ни одного атома, на вероятность обнаружить один атом внутри тонкого шарового слоя $[R, R + dR]$. Итак, получаем уравнение:

$$w(R)dR = \left\{ 1 - \int_0^R w(R')dR' \right\} 4\pi R^2 n dR. \quad (6)$$

Здесь n — число атомов примеси в единице объема. При дифференцировании из (6) следует дифференциальное

уравнение

$$\frac{d}{dR} \left(\frac{w(R)}{R^2} \right) = -4\pi n w(R). \quad (7)$$

Из (6) вытекает граничное условие к уравнению (7):

$$w(R \rightarrow 0) \rightarrow 4\pi R^2 n. \quad (8)$$

Решение уравнения (7) с граничным условием (8) имеет простой вид:

$$w(R) = 4\pi R^2 n \exp\left(-\frac{4\pi R^3 n}{3}\right). \quad (9)$$

Определяем среднее значение расстояния R :

$$\begin{aligned} \bar{R} &= \int_0^\infty 4\pi R^2 n \exp\left(-\frac{4\pi R^3 n}{3}\right) dR \\ &= \frac{1}{(4\pi n)^{1/3}} \int_0^\infty x^3 \exp\left(-\frac{x^3}{3}\right) dx = \frac{1.288}{(4\pi n)^{1/3}}; \quad n = \frac{0.17}{R^3}. \end{aligned} \quad (10)$$

Подставляя (10) в (5), заменяем $R \rightarrow \bar{R}$ и получаем неявное уравнение для определения случайно направленного статического спонтанного магнитного поля:

$$H = 8.3 \mu n \tanh\left(\frac{\mu H}{T}\right). \quad (11)$$

Приводим его к безразмерному виду заменами: $j = H/8.3 \mu n$; $t = T/8.3 \mu^2 n$. Получаем неявное уравнение:

$$h = \tanh\left(\frac{h}{t}\right). \quad (12)$$

На рис. 1 представлена зависимость магнитного поля от температуры согласно (12). Спонтанное магнитное поле исчезает при температуре $t > 1$, $T > 8.3 \mu^2 n = \mu^2 \sqrt{2}/R^3$. При температуре $T = 0$ имеем $h = 1$, $H = H_0 = 8.3 \mu n = \mu \sqrt{2}/R^3$.

Приближение ближайших соседей близко к модели Хольцмарка, но не сводится к ней. Оба приближения совпадают в пределе малых расстояний R , когда экспоненту в (9) можно заменить на единицу.

3. Гауссово приближение

Далее мы рассмотрим другую модель: гауссово распределение для случайного расположения редких примесей в пространстве. Она обычно используется при описании спинового стекла [3–5].

Ввиду случайности расположения атомов примеси его заданная величина определяется нормальным (гауссовым) распределением. Точнее говоря, согласно центральной предельной теореме, нормальное распределение имеет сумма одинаково распределенных независимых случайных величин. Магнитное поле, как сумма

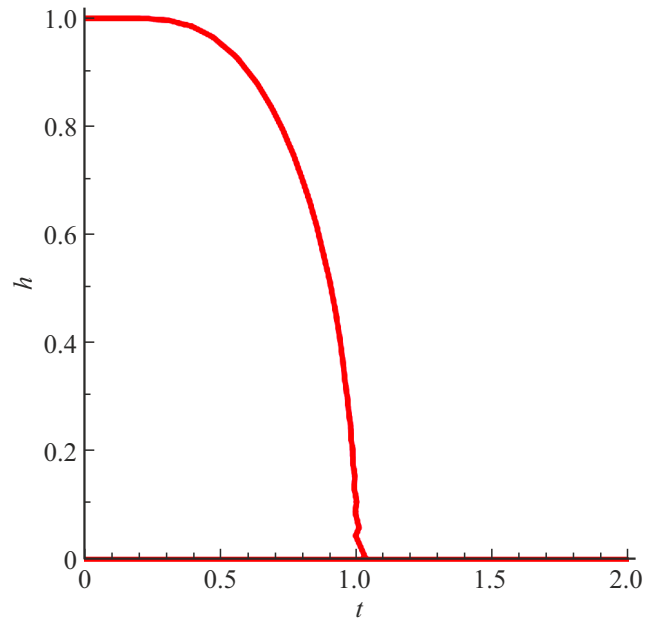


Рис. 1. Спонтанное магнитное поле как функция температуры в модели ближайших соседей.

магнитных полей от случайно расположенных магнитных моментов может как описываться нормальным распределением, так и нет, в зависимости, например, от среднего расстояния между ними. В теории спиновых стекол соответствие распределения нормальному просто постулируется. Это и делается ниже.

Итак, можно записать, используя (5):

$$\begin{aligned} \langle H^2 \rangle &= H_0^2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dH}{\sqrt{2\pi \langle H^2 \rangle}} \exp\left(-\frac{H^2}{2 \langle H^2 \rangle}\right) \tanh^2\left(\frac{\mu H}{T}\right); \\ H_0 &= \frac{\mu \sqrt{2}}{R^3}. \end{aligned} \quad (13)$$

Далее вводим безразмерные величины: средне-квадратичное безразмерное магнитное поле $h = \sqrt{\langle H^2 \rangle}/h_0^2$, безразмерную температуру $t = \frac{T}{\mu H_0}$ и безразмерную переменную интегрирования $x = \frac{H}{\sqrt{\langle H^2 \rangle}}$. Получаем из (13) интегральное уравнение для безразмерных величин:

$$h^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) \tanh^2\left(\frac{hx}{t}\right). \quad (14)$$

Это уравнение определяет неявно средне-квадратичное спонтанное магнитное поле как функцию температуры. Как нулевое, так и отличное от нуля решения имеют место при $t < 1$ (рис. 2). На эксперименте реализуется ненулевое решение, так как оно соответствует меньшей энергии системы спинов. При $t = 0$ получаем $h = 1$, $\sqrt{\langle H^2 \rangle} = \mu \sqrt{2}/R^3$. При $t > 1$ есть только нулевое решение уравнения (14). Это видно из рис. 2. Это

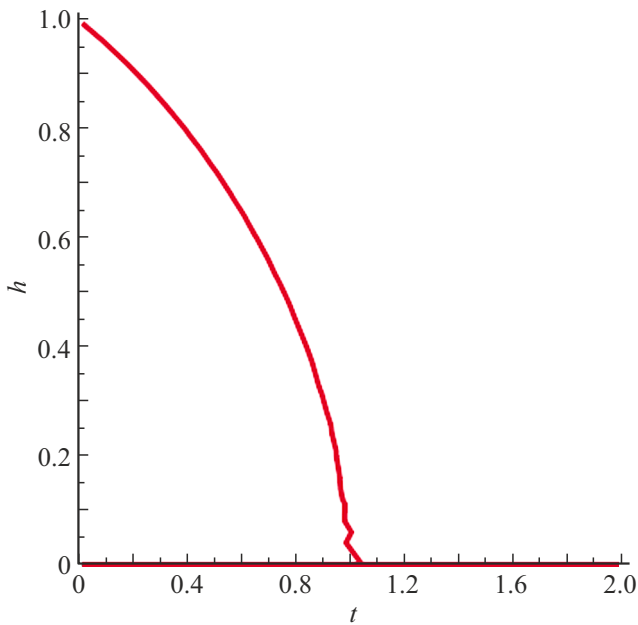


Рис. 2. Спонтанное магнитное поле как функция температуры в модели Гаусса.

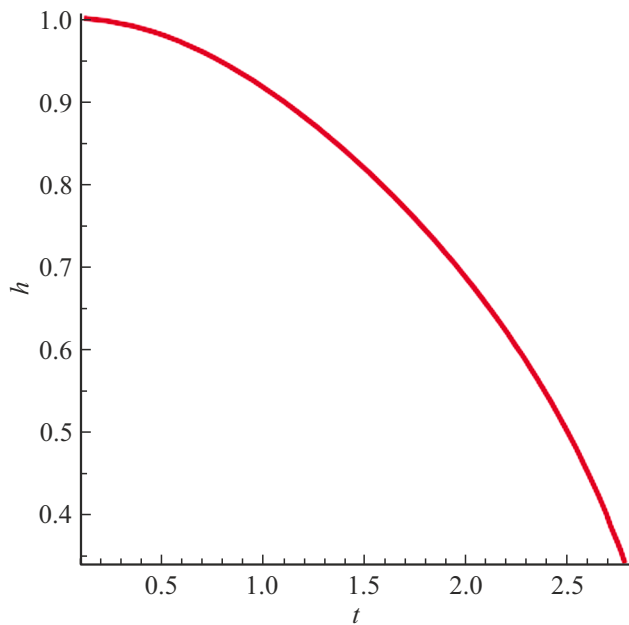


Рис. 3. Спонтанное магнитное поле как функция температуры в модели Хольцмарка.

видно и аналитически, если при малом h и $t = 1 + \delta$, $0 < \delta \ll 1$ разложить гиперболический тангенс в ряд Тейлора. Из (14) получим уравнение $h^2 = h^2/t^2$, которое имеет только нулевое решение. Если же $\delta < 0$, то появляется малое ненулевое решение за счет следующего члена разложения гиперболического тангенса в ряд Тейлора. Магнитное поле исчезает при температуре $T = \mu H_0 = \mu^2 \sqrt{2}/R^3$.

Мы видим, что как критическая температура исчезновения магнитного поля, так и значение поля при нулевой температуре в обеих моделях совпадают. На рис. 2 представлено численное решение неявного уравнения (14). Видно, что кривые рис. 1 и рис. 2 сильно отличаются друг от друга, хотя в обеих конечных точках они совпадают.

4. Распределение Хольцмарка

Распределение Хольцмарка определяет, в частности, стационарное распределение для силы, действующую на Солнце вследствие притяжения со стороны окружающих случайно распределенных звезд [6]. Распределение Хольцмарка используется при рассмотрении уширения линий водородной идеальной плазмы [7]. Случайно распределенные в пространстве протоны создают статическое электрическое поле. Это поле производит линейное штарковское расщепление уровней атомов водорода. В статье [8] распределение Хольцмарка используется для вычисления распределения электрического поля в компенсированных полупроводниках.

В уравнении (14) вместо распределения Гаусса вставим распределение Хольцмарка, нормированное на единицу:

$$H(x) = \frac{2}{\pi x} \int_0^\infty \exp\left\{-(z/x)^{3/2}\right\} \sin(z)z dz. \quad (15)$$

Получаем универсальное неявное уравнение для определения спонтанного магнитного поля:

$$h^2 = \int_0^\infty H(x) \tanh^2\left(\frac{hx}{t}\right) dx. \quad (16)$$

Его численное решение показано на рис. 3. Критическая температура $T = 2.7\mu^2\sqrt{2}/R^3$ оказывается почти в три раза выше, чем в случае распределения Гаусса (рис. 2). А спонтанное магнитное поле при нулевой температуре совпадает с полем для гауссового распределения.

5. Заключение

В настоящей работе проведен прямой учет дипольного взаимодействия магнитных моментов в спиновом стекле, тогда как в большинстве статей для описания взаимодействия обычно используют некоторое абстрактное случайное обменное поле с заданной функцией распределения. Если не использовать приближение самосогласованного поля, то спонтанное магнитное поле должно, конечно, вычисляться иначе. При использовании распределения Гаусса нужно вычислить средний квадрат магнитного поля. Для этого необходимо квадрат магнитного поля, определенного уравнением (5),

умножить на вероятность найти магнитный момент на расстоянии R (она равна $4\pi n R^2 dR$) и проинтегрировать полученное выражение от нуля до бесконечности. Легко видеть, что этот интеграл расходится. Та же самая проблема возникает и для распределения Хольцмарка. Хорошо известно (см. например, [6]), что второй момент распределения Хольцмарка равен бесконечности. В настоящей работе найден способ обойти эти расходимости.

Достаточно полный обзор экспериментальных данных по спиновым стеклам содержится в недавней публикации [9]. Типичные температуры для возникновения спонтанного магнитного поля в различных спиновых стеклах составляют 15–30 К. Из приведенных зависимостей спонтанного магнитного поля от температуры, а также из зависимостей, приведенных в работе [3], можно сделать вывод, что для описания случайности распределения редких магнитных примесных центров в немагнитном материале большее предпочтение следует отдать именно распределению Хольцмарка, нежели обычно рассматриваемому гауссовому распределению.

Финансирование работы

Работа поддержана Министерством науки и Высшего образования РФ (№ FSMG-2023-0011).

Конфликт интересов

Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.

Список литературы

- [1] S.F. Edwards, P.W. Anderson. J. Phys. F **5**, 965 (1975).
- [2] J.H. Wesenberg, K. Molmer. Phys. Rev. Lett. **93**, 143903 (2004).
- [3] D. Sherrington, S. Kirkpatrick. Phys. Rev. Lett. **35**, 1792 (1975).
- [4] I.A. Hadjiagapiou. Physica A **397**, 1 (2014).
- [5] J.R.L. de Almeida, D.J. Thouless. J. Phys. A: Math. Gen. **11**, 983 (1978).
- [6] С. Чандрасекар. Стохастические проблемы в физике и астрономии. ИЛ, М. (1947). 169 с.
- [7] В.С. Лисица. УФН **122**, 449 (1977).
- [8] Ш.М. Коган, Нгуен Ван Лиен, Б.И. Шкловский. ЖЭТФ **78**, 1933 (1980).
- [9] E. Vincent. arXiv: 2208.00981 — March 2, 2023.

Редактор Ю.Э. Китаев