01

Квантовые флуктуации в волоконных лазерах с синхронизацией мод

© Ю.А. Мажирина, Л.А. Мельников

Саратовский государственный технический университет им. Ю.А. Гагарина,
410054, Саратов, Россия
e-mail: mazhirinayua@yandex.ru, lam-pels@yandex.ru

Поступило в Редакцию 8 февраля 2025 г.
В окончательной редакции 8 февраля 2025 г.
Принято к публикации 8 февраля 2025 г.

Представлен расчет параметров квантовых флуктуаций импульсов, генерируемых в волоконных лазерах с синхронизацией мод или в нелинейных волоконных кольцевых резонаторах. Квантовые флуктуации связываются с флуктуациями амплитуд и фаз продольных мод. Используя стандартное квантование модовых осцилляторов, записаны выражения для источников флуктуаций амплитуды и фазы для каждой продольной моды. При этом фазовые флуктуации вычислены по амплитудным с использованием соотношений Гейзенберга. Предполагалось, что флуктуации амплитуд мод подчиняются распределению Пуассона, а источники флуктуаций во временной области получаются при помощи обратного дискретного преобразования Фурье. Для импульса в виде $sech(t)^2$ рассчитаны флуктуации числа квантов, времени максимума импульса, чирпа и фазы.

Ключевые слова: синхронизация мод, квантовые флуктуации, спектр продольных мод, $sech^2$-импульс, флуктуации параметров импульса.

DOI: 10.61011/JTF.2025.05.60278.439-24

Введение

Квантовые флуктуации в лазерах задают предельные характеристики их излучения и во многом определяют пределы их применимости [1]. Для одночастотных лазеров квантовые флуктуации определяют ширину линии излучения лазера и уровень флуктуаций интенсивности. Расчет этих параметров на основе квантовой модели лазера для таких типов лазеров хорошо известен [1–3]. Уравнения для операторов рождения и уничтожения фотонов решаются обычно с помошью замены операторов на матрицы в определенном базисе или использованием матрицы плотности [1]. При этом число квантов в поле невелико, так как рассматриваются режимы вблизи порога генерации. Для лазеров, генерирующих импульсы с числом квантов порядка 10^8, размерность матриц чрезвычайно высока, что делает невозможным применение численных методов. Тогда обычно используются различные варианты теории возмущений: поле представляется в виде классической части и сравнительно малой части, отвечающей за квантовые флуктуации, и для квантовых операторов получаются линейные уравнения, которые, впрочем, решать также не очень просто [4].

Генерация сверхкоротких световых импульсов возможна с использованием определенных оптикофизических схем, которые приводят к синхронизации продольных мод в волоконном лазере. Наиболее популярной является схема, в которой в кольцевом волоконном резонаторе есть усилительная секция, секция для управления общей дисперсией резонатора и нелинейное устройство, в котором из-за нелинейного вращения эллипса поляризации происходит сжатие импульса во временной области. Такая оптико-физическая схема получила название лазера с аддитивной синхронизацией мод [5–10]. Кроме такой схемы, короткие световые импульсы могут генерироваться, например, в кольцевом волоконном резонаторе, который возбуждается лазером с постоянной интенсивностью [11]. В оптическом волокне из-за слабой нелинейности и дисперсии возможна модуляционная неустойчивость [12], в результате которой возникают модуляционные компоненты, и сигнал постоянной интенсивности разбивается на последовательность солитонных импульсов. Кольцевой резонатор позволяет увеличить эффективное расстояние, которое импульсы проходят в оптическом волокне. Частота модуляции для параметров обычного одномодового волокна SMF находится в THz-диапазоне, а частота биений продольных мод в кольцевом резонаторе с длиной в несколько метров составляет десятки и сотни MHz. То есть наблюдается гармоническая (или кратная) синхронизация мод, когда гармоника сигнала биений совпадает с частотой модуляции. Частота биений продольных мод равна $2\pi/T$, где T — время обхода резонатора. Синхронизация мод происходит, когда выполняются условия для частот и фаз продольных мод:

$$\nu_{n-1} + \nu_{n+1} = 2\nu_n, \quad \varphi_{n-1} + \varphi_{n+1} = 2\varphi_n,$$

где n — номер моды. Эти условия означают, что частоты и фазы мод являются линейными функциями n.

Для выполнения условий необходимо нелинейное управление дисперсией активной среды и присутствие четырехчастотного взаимодействия мод $\nu_{n\pm1}$ и ν_n. В процессе четырехчастотного взаимодействия число квантов в n-ой моде уменьшается на 2, но при этом появляется по одному кванту в модах с номерами $n-1$ и $n+1$. Из-за неэквидистантности мод при четырехчастотном взаимодействии возникает поле (комбинационный тон) на частоте вблизи моды с частотой ν_{n+1}. Взаимодействие полей приводит к захвату частоты этой моды на частоту $2\nu_n - \nu_{n-1}$, что приводит к эквидистантности спектра мод и к захвату разности фаз.

Таким образом, полное поле в лазере с кольцевым волоконным резонатором можно выразить в виде суммы по продольным модам:

$$E(z,t) = \sum_n A_n \exp(i\varphi_n) e^{[i\nu_n t - i\beta(\nu_n)z]},$$

где $\beta(\nu)$ — постоянная распространения основной поперечной моды, A_n — действительные амплитуды мод, φ_n — фазы мод. Частоты продольных мод для кольцевого волоконного резонатора можно определить из условия $\beta(\nu_n)L = 2\pi n$, где L — периметр резонатора. Используем разложение

$$\beta(\nu_{n+1} - \nu_n) = \beta_1 \Omega + \frac{\beta_2}{2}\Omega^2,$$

где Ω — разность частот соседних мод, $\beta_1 = \frac{\partial \beta}{\partial \nu} = 1/v_g$, $\beta_2 = \frac{\partial^2 \beta(\nu)}{\partial \nu^2}$, v_g — групповая скорость. Видно, что спектр мод неэквидистантен и моды резонатора не совпадают с гармониками поля. Межмодовая частота может быть

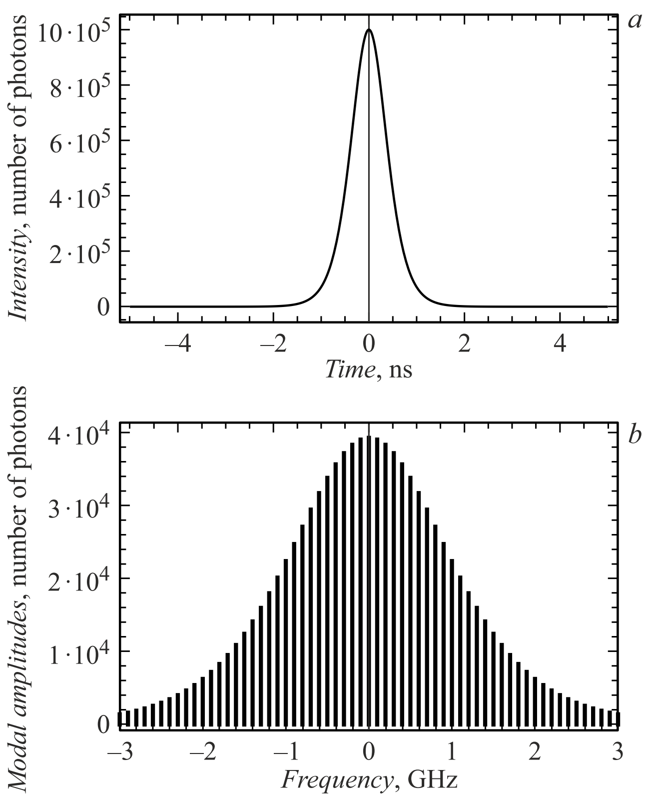

Рис. 1. *a* — импульс в виде $sech^2(t/\tau)$ при $\tau = 0.5$ ns, *b* — спектр последовательности импульсов рис. 1,*a* с периодом повторения 10 ns.

рассчитана как

$$\Omega = \frac{\sqrt{8\beta_2 \pi n/L + v_g^2} - v_g}{4\beta_2}.$$

Заметим, что $2\pi n/L$ это волновое число мод резонатора с той же длиной, но без учета дисперсии волокна. Однако если гармоники попадают в ширину резонансов мод $\frac{v_g(1-R)}{L\sqrt{R}}$, то спектр импульса практически совпадает со спектром мод. Влияние дисперсии оптического волокна можно учесть, рассчитывая параметры дисперсии и групповую скорость через эффективный показателя преломления, например, на основе результатов [12]. На рис. 1 показан импульс в виде $sech$ с длительностью 0.5 ns (рис. 1, *a*) и спектр последовательности импульсов с периодом повторения 10 ns (рис. 1, *b*), который будем считать совпадающим со спектром продольных мод. Амплитуды мод нормированы так, чтобы полное число фотонов в импульсе было $N_p = \Sigma_{n=-\infty}^{\infty} |A_n|^2 = 10^6$.

Квантовые флуктуации мод

Каждая мода резонатора представляет собой осциллятор поля с пространственной зависимостью $\exp^{(i\beta(\omega)z)}$ и частотой ν_n, который квантуется стандартным образом [1,2]. Поле может быть нормировано так, что $|A_n|^2$ равно числу квантов, т. е. $A_n^2 = N_n$. Квантовые флуктуации числа квантов в моде подчиняются пуассоновской статистике [1]:

$$P(n) = \frac{\langle N \rangle^n}{n!} e^{-\langle N \rangle}, \ \langle N \rangle = N_n, \ \langle (N - \langle N \rangle)^2 \rangle = N_n.$$

Квантовые флуктуации числа квантов и квантовые флуктуации фаз подчиняются условию $\Delta N \Delta \varphi \geq 1$, которое следует из условий на неопределенность энергии и времени измерения $\Delta E \Delta t \geq \hbar$ [2]. Если источники флуктуаций в модах некоррелированы, то можно записать выражение для квантовых флуктуаций поля:

$$\Delta E = \sum_n \left[\Delta A_n e^{i\varphi_n} + A_n e^{i\varphi_n} \frac{i}{\Delta N_n} \right] \exp[i\nu_n t - \beta(\nu_n) z]. \tag{1}$$

Это выражение можно преобразовать к виду:

$$\Delta E = \sum_n A_n e^{i\varphi_n} \left[\frac{\Delta A_n}{A_n} + \frac{i}{\Delta N_n} \right]. \tag{2}$$

Согласно [13], зависимость флуктуаций от времени можно выразить в виде свертки

$$\Delta E(t) = \int_0^\infty d\xi E(t-\xi) Noise(\xi), \tag{3}$$

где $Noise(t)$ — функция источников квантовых флуктуаций, которая является фурье-преобразованием от

$\frac{\Delta A_n}{A_n} + i\frac{\Delta\varphi_n}{A_n}$. Так как $\Delta N_n = \Delta(A_n^2) = 2A_n\Delta A_n$, то заменяя A_n на $\sqrt{N_n}$, получим $\frac{\Delta A_n}{A_n} = \frac{\Delta N_n}{2\sqrt{N_n}}$. Для большого числа квантов в импульсе, и, следовательно, в каждой моде, можно пренебречь флуктуациями фазы. Так как флуктуации амплитуд мод подчиняются статистике Пуассона, можно считать, что случайные числа квантов в каждой n-ой моде лежат в пределах $\pm 3\sqrt{N_n}$ от среднего значения N_n. На рис. 2 показаны импульс, соответствующий среднему числу квантов в модах, а также разности полей $\Delta E_\pm$, соответствующие трем стандартным отклонениям, т. е. импульсы со спектрами N_n, $3\sqrt{N_n}$, $-3\sqrt{N_n}$ для $N_p = 10^6$. Диапазон изменений поля показан серой заливкой. Все реализации случайной величины поля должны лежать в серой зоне. Поэтому можно считать, что δE равно удвоенному значению $2\Delta E_p$.

Следует отметить, что существенный вклад в квантовые флуктуации вносят периферийные моды с малым средним числом квантов, из-за корня в знаменателе. Однако их вклад в значительной мере замаскирован вкладом центральных мод, в которых относительные флуктуации интенсивностей мод достаточно малы, а вклад в энергию импульса существенен.

Хорошо видно, что ΔE в определенной степени повторяет форму импульса, так как значения ΔN_n для пуассоновской статистики укладываются в дисперсию, которая пропорциональна $\sqrt{N_n}$.

Следует отметить, что при вычислении флуктуаций поля следует учесть также четырехчастотное взаимодействие отдельных мод. Каждая мода из-за взаимодействия уменьшается по амплитуде, в то время как две соседние увеличиваются примерно на половину изменения интенсивности средней моды каждая. Это приводит к выравниванию флуктуаций мод и к уменьшению ΔE примерно в два раза. Строгий расчет флуктуаций с учетом четырехчастотного взаимодействия требует решения системы уравнений, размерность которой в данном случае — порядка отношения периода повторения импульсов к длительности импульса.

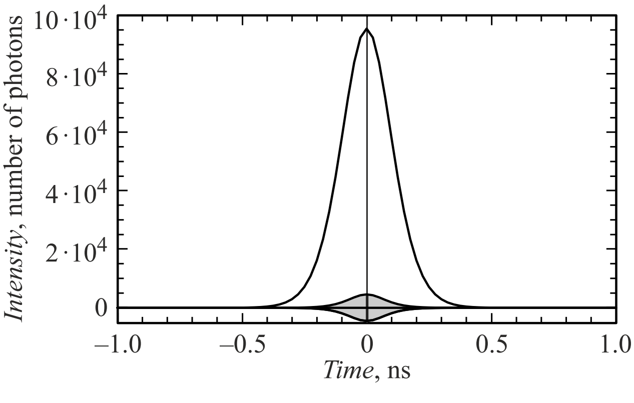

Рис. 2. Импульс, соответствующий спектру мод $\{N_n\}$ (рис. 1, b) и обратные дискретные фурье-преобразования $\pm 3\sqrt{N_n}$.

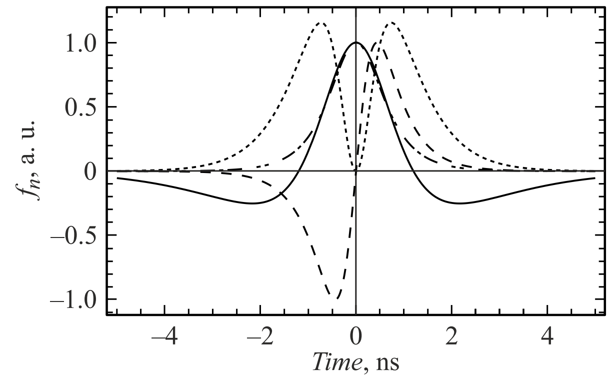

Рис. 3. Функции f_1 (сплошная кривая), f_2 (штриховая кривая, длинные штрихи), f_3 (штриховая кривая, короткие штрихи), f_4 (штриховая кривая, штрихи разной длины).

Если записать импульс в виде

$$E(z,t) = \frac{n|c|^{1/2}}{2} sech\left(\frac{n^2|c|}{2}(t - t_0 - 2pz)\right)$$
$$\times e^{i\theta + i\frac{n^2|c|}{4}z - ip^2z + ip(t-t_0)},$$

где $n = \int |E(z,t)|^2 dt$, p — импульс на 1 фотон, t_0 — время прихода импульса, θ — фаза, c — коэффициент нелинейности волокна, то $\Delta E = f_1\Delta n + f_2\Delta p + f_3\Delta t_0 + f_4\Delta\theta$, где

$$f_1 = \frac{\partial E}{\partial n}, \quad f_2 = \frac{\partial E}{\partial p},$$

$$f_3 = \frac{\partial E}{\partial t_0}, \quad f_4 = \frac{\partial E}{\partial \theta}.$$

Функции $f_1, \ldots, f_4$ показаны на рис. 3. Нетрудно проверить, что эти функции ортогональны, т. е. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} dt f_i^*(t) f_j(t) = N_i\delta_{i,j}$, $i, j = 1\ldots 4$. С использованием ортогональности получаем:

$$\Delta n = \int\limits_{-\infty}^{\infty} dt\Delta E(t) f_1^*(t) \left[\int\limits_{-\infty}^{\infty} dt f_1^*(t) f_1(t)\right]^{-1},$$

$$\Delta p = \int\limits_{-\infty}^{\infty} dt\Delta E(t) f_2^*(t) \left[\int\limits_{-\infty}^{\infty} dt f_2^*(t) f_2(t)\right]^{-1},$$

$$\Delta t_0 = \int\limits_{-\infty}^{\infty} dt\Delta E(t) f_3^*(t) \left[\int\limits_{-\infty}^{\infty} dt f_3^*(t) f_3(t)\right]^{-1},$$

$$\Delta\Theta = \int\limits_{-\infty}^{\infty} dt\Delta E(t) f_4^*(t) \left[\int\limits_{-\infty}^{\infty} dt f_4^*(t) f_4(t)\right]^{-1}. \quad (4)$$

Нормировочные интегралы равны

$$N_1 = \int dt f_1^*(t) f_1(t) = \frac{12+\pi^2}{18A},$$

$$N_2 = \int dt f_2^*(t) f_2(t) = \frac{2A^3}{3\tau},$$

$$N_3 = \int dt f_3^*(t) f_3(t) = \frac{A(12+\pi^2)}{18\tau},$$

$$N_4 = \int dt f_4^*(t) f_4(t) = 2A\tau.$$

Сравнивая выражения (2) и (3), получаем выражения для флутуаций параметров импульса [7]:

$$\int dt f_i^* f_j = N_i \delta_{i,j}, N_i = \int dt |f_i|^2.$$

Следовательно,

$$\Delta|N| = N_1^{-1} \int dt f_1^* (\Delta E_+ - \Delta E_-).$$

После дискретизации $n_n(i) = f_n(-T + 2T(i-1)/400)$, $n = 1, 2, 3, 4$, $i = 1 \ldots 400$ флуктуации параметров имульса расчитываются по формулам:

$$\Delta n = 0.025 \sum_{i=1}^{401} n_{1i} 2F p_i.$$

Расчет по этим формулам дает следующие значения флуктуаций параметров импульса: $\Delta A = 0.186A$, $\Delta p = -13.6\tau/A^3$, $\Delta t_0 = -0.015\tau$, $\Delta\theta = -0.00225/(A\tau)$. Видно, что флуктуации числа квантов достаточно заметны, $\Delta n/n = 2\Delta A/A = 0.372$, флуктуации импульса (частоты) при числе квантов в 10^6 малы, флуктуации времени прихода импульса (порядка 1 ns), а флуктуации фазы обратно пропорциональны длительности импульса и амплитуде импульса и также малы.

Расмотрим аналоги соотношений неопределенности: $\Delta n \Delta\theta = 0.0004185/\tau < 0.655$, $\Delta p \Delta t_0 = 0.816/\tau^2 > 0.25$. Здесь значения констант после знаков неравенства соответствуют результатам [4]. Отличие соотношений неопределенности свидетельствует о том, что, возможно, при данных параметрах импульс находится в „сжатом“ (неклассическом) состоянии. Однако полное доказательство „неклассичности“ требует более детального исследования, которое планирутся выполнить в дальнейшем.

Заключение

В работе представлен расчет параметров квантовых флуктуаций импульсов, генерируемых в волоконных лазерах с синхронизацией мод или в нелинейных волоконных кольцевых резонаторах. Так как последовательность импульсов может быть представлена как результат интерференции полей продольных мод, амплитуда которых определяется формой импульса, то квантовые флуктуации связываются с флуктуациями амплитуд и фаз продольных мод. Используя стандартное квантование модовых осцилляторов, удалось записать выражения для источников флуктуаций амплитуды и фазы для каждой продольной моды. При этом фазовые флуктуации вычисляются по амплитудным с использованием соотношений Гейзенберга: энергия–время (фаза). Предполагалось, что флуктуации амплитуд мод подчиняются распределению Пуассона. Источники флуктуаций во временной области получаются при помощи обратного дискретного преобразования Фурье. Для импульса в виде $sech(t)^2$ рассчитаны флуктуации параметров импульса (числа квантов, времени максимума, чирпа и фазы). Эти выражения являются достаточно общими и могут быть применены к любой лазерной системе, генерирующей импульсы такой формы. Данный метод расчета можно также применять к системам, генерирующим импульсы в виде гиперболического секанса и импульсы с другим профилем.

Финансирование работы

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 22-12-00396, https://rscf.ru/project/22-12-00396/.

Конфликт интересов

Авторы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

Список литературы

[1] M. Sargent III, M.O. Scully, W.E. Lamb. Jr. Laser Physics (Addison-Wesley, Reading, Mass., 1974)

[2] А. Мессиа. *Квантовая механика* (Наука, М., 1978) т. I.

[3] А.П. Казанцев, Г.И. Сурдутович. ЖЭТФ, **58** (1), 245 (1970).

[4] H.A. Haus, Y. Lai. J. Opt. Soc. Am. **B 7**, 386 (1990). DOI: 10.1364/JOSAB.7.000386

[5] K. Tamura, E.P. Ippen, H.A. Haus, L.E. Nelson. Opt. Lett., **18**, 1080 (1993). DOI: 10.1364/ol.18.001080

[6] K. Tamura, J. Jacobson, E.P. Ippen, H.A. Haus, J.G. Fujimoto. Opt. Lett., **18**, 220 (1993). DOI: 10.1364/OL.18.000220

[7] В.А. Рибенек, И.О. Золотовский, П.А. Итрин, Д.А. Коробко. Квантовая электроника, **52**, 604 (2022).

[8] A.G. Bulushev, E.M. Dianov, O.G. Okhotnikov. Opt. Lett., **16** (2), 88 (1991). DOI: 10.1364/OL.16.000088

[9] M. Hofer, M.E. Ferman. Opt. Lett., **16**, 502 (1991). DOI: 10.1364/OL.16.000502

[10] A. Popp, V. Distler, K. Jaksch, F. Sedlmeir, Ch.R. Müller, N. Haarlammert, Th. Schreiber, Ch. Marquardt, A. Tünnermann, G. Leuchs. Appl. Phys. B, **126**, 130 (2020). DOI: 10.1007/s00340-020-07476-7

[11] V.A. Razukov, L.A. Melnikov, P.V. Kuptsov, K.S. Gochelashvili. Laser Phys., **33**, 025004 (2023). DOI: 10.1088/1555-6611/acaea1
[12] Ю.А. Мажирина, Л.А. Мельников, А.А. Сысолятин, А.И. Конюхов, К.С. Гочелашвили, Д. Венкитеш, С. Саркар. Квантовая электроника, **51** (8), 692 (2021). DOI: 10.1070/QEL17464
[13] R.J. Marks II. *The joy of Fourier* (Baylor University, 2006), p. 811.