03

Предельное значение собственной частоты осесимметричных возмущений вращающейся жидкости

© Д.А. Шалыбков

Физико-техничекий институт им. А.Ф. Иоффе РАН,
194021 Санкт-Петербург, Россия
e-mail: shalybkov@yandex.ru

Поступило в Редакцию 3 мая 2024 г.
В окончательной редакции 17 февраля 2025 г.
Принято к публикации 3 марта 2025 г.

В линейном приближении рассмотрена проблема устойчивости течения идеальной несжимаемой вращающейся жидкости. Показано, что квадрат частоты осесимметричных возмущений ограничен сверху по модулю как для устойчивых, так и для неустойчивых течений. Собственные частоты можно пронумеровать по мере уменьшения модуля, начиная с нуля для максимальной по модулю собственной частоты. При этом количество узлов собственной функции по радиусу будет (в согласии с теорией Штурма) равно номеру собственной частоты. В качестве иллюстрации рассчитаны собственные частоты и собственные функции для цилиндрического течения Куэтта, обладающего разными свойствами устойчивости.

Ключевые слова: устойчивость, цилиндрическое течение Куэтта, несжимаемая жидкость.

DOI: 10.61011/JTF.2025.06.60457.155-24

Введение

Задача об устойчивости течения идеальной несжимаемой вращающейся жидкости представляет собой классическую проблему гидродинамики [1–3]. Условие устойчивости течения для вращающейся идеальной несжимаемой жидкости по отношению к осесимметричным возмущениям (см. выражение (8) из разд. 1 настоящей работы) было получено Рэлеем [4]. Позднее было показано [5], что условие (8) является необходимым и достаточным условием устойчивости.

Хорошо известно (см., например, [1,3]), что квадрат собственной частоты для осесимметричных возмущений вращающейся жидкости является вещественным числом, и соответственно для нормальных мод вида (5) течение является устойчивым, если все квадраты собственных частот положительны (при выполнении условия (8) во всех точках течения), или неустойчивым, если хотя бы одно значение квадрата собственной частоты отрицательно (при нарушении условия (8) в какой-либо точке течения).

В настоящей работе впервые показано, что спектр частот вращающейся жидкости для осесимметричных возмущений ограничен по модулю как для положительных, так и для отрицательных значений квадратов собственных частот.

В качестве примера рассчитаны собственные частоты и собственные функции циллиндрического течения Куэтта для трех случаев: 1) течения, в каждой точке которого нарушается условие (8); 2) течения, в каждой точке которого выполняется условие (8); 3) течения, в части которого условие (8) нарушается, а в другой части выполняется. При этом показано, что и для положительных, и для отрицательных значений квадратов собственной частоты их можно пронумеровать (по отдельности для положительных и отрицательных значений) по мере уменьшения модуля, начиная с нуля для максимальной по модулю собственной частоты. В соответствии с теорией Штурма число узлов соответствующей собственной функции по радиусу будет равно номеру собственной частоты.

1. Основные уравнения и постановка задачи

Движение несжимаемой идеальной жидкости с однородной плотностью ρ описывается уравнениями Эйлера и непрерывности:

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + (\mathbf{U}\nabla)\mathbf{U} = -\frac{1}{\rho}\nabla P,$$

$$\mathrm{div}\mathbf{U} = 0, \tag{1}$$

где $\mathbf{U}$ — скорость, P — давление. Для вращающейся жидкости удобно использовать цилиндрическую систему координат (r, ϕ, z), в которой осесимметричная скорость имеет вид

$$\mathbf{U} = (0, r\Omega(r), 0), \tag{2}$$

где $\Omega(r)$ — угловая скорость вращения, которая для идеальной жидкости является произвольной (достаточно гладкой) функцией радиуса, удовлетворяющей уравнению (1). В стационарном случае уравнение (1) для скорости вида (2) принимает вид уравнения гидростатического равновесия между центробежной силой и силой, создаваемой радиальным градиентом давления [3]:

$$\Omega^2 r = \frac{1}{\rho}\frac{\mathrm{d}P(r)}{\mathrm{d}r}. \tag{3}$$

Во избежание недоразумениий подчеркнем, что мы используем инерциальную систему координат, в которой сила Кориолиса отсутствует (см., например, [6]). Кроме того, для полной постановки задачи необходимо задать граничные условия. В настоящей работе мы будем рассматривать область неограниченную по вертикальной координате z, простирающуюся в пределах от внутреннего радиуса $r_{in} \geq 0$ до внешнего радиуса $r_{out} < \infty$ и занимающую весь угловой сектор $0 \leq \phi \leq 2\pi$.

Для исследования линейной устойчивости используется метод малых возмущений, в котором решение представляется в виде:

$$\mathbf{U}+\mathbf{u} = (u_r(t,r,\phi,z),\, r\Omega(r)+u_\phi(t,r,\phi,z),\, u_z(t,r,\phi,z)),$$

$$P + p = P(R) + p(t,r,\phi,z), \tag{4}$$

где величины u_r, u_ϕ, u_z малы по сравнению с типичной величиной азимутальной скорости $r\Omega_0$, где $\Omega_0 = 0.5(\Omega(r_{in}) + \Omega(r_{out}))$, а градиенты возмущения давления p малы по сравнению с радиальным градиентом невозмущенного давления P. Подставляя выражения (4) в систему (1) и сохраняя только линейные по возмущенным величинам члены, получим линейную систему уравнений для возмущенных величин с коэффициентами, зависящими только от радиальной координаты r. В этом случае решение можно представить в виде суммы нормальных мод вида:

$$F = F_{mk}(r)\exp[\mathrm{i}(m\phi + kz + \omega t)], \tag{5}$$

где $F(r)$ представляет собой произвольную искомую функцию. Учитывая геометрию задачи, нетрудно понять, что аксиальное число k может принимать произвольные вещественные значения, азимутальное число m может быть произвольным целым числом, а инкремент ω — произвольным комплексным числом. Разложение на нормальные моды (5) преобразует трехмерную задачу в одномерную. Если собственные частоты ω для скорости (2) имеют только положительные мнимые части, то течение линейно устойчиво. Если существует хотя бы одна собственная частота с отрицательной мнимой частью, то течение неустойчиво.

В настоящей работе мы рассмотрим только осесимметричные возмущения с $m = 0$ и неподвижные границы. При этом линейная система сводится к одному уравнению второго порядка для радиальной скорости u_r (индексы m и k (см. (5)) мы здесь опускаем)

$$\frac{\mathrm{d}^2u_r}{\mathrm{d}r^2} + \frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}u_r}{\mathrm{d}r} - \frac{u_r}{r^2} - k^2u_r + \frac{k^2}{\omega^2}\frac{1}{r^3}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r^2\Omega\right)^2 u_r = 0, \tag{6}$$

а граничные условия принимают вид:

$$u_r(r_{in}) = u_r(r_{out}) = 0. \tag{7}$$

Уравнение (6) является абсолютно точным и учитывает все возникающие эффекты и вместе с граничными условиями (7) составляет классическую задачу Штурма–Лиувилля о собственных значениях величины k^2/ω^2 [1]. Хорошо известно, что с учетом граничных условий (7) величина ω^2 — вещественна (см., например, [1]) и знак ω^2 совпадает со знаком k^2/ω^2. Согласно общей теории (см., например, [1]), все собственные числа положительны (а значит, течение устойчиво) тогда и только тогда, когда

$$\frac{1}{r^3}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r^2\Omega\right) > 0 \tag{8}$$

для любой точки рассматриваемого интервала. Если условие (8) нарушается в какой-либо точке, то течение неустойчиво. Условие (8) было установлено Рэлеем [4] и носит его имя.

2. Результаты

Для доказательства ограниченности величины квадрата собственной частоты ω^2 достаточно воспользоваться результатами теории осцилляции решений линейных обыкновенных дифференциальных уравнений второй степени с вещественными коэффициентами. Решение, по определению, является неосциллирующим на интервале (a, b), где $-\infty < a < b < \infty$, если оно имеет на (a, b) не более одного нуля. Для общего уравнения второго порядка вида

$$\frac{\mathrm{d}^2u_r}{\mathrm{d}r^2} + a_1(r)\frac{\mathrm{d}u_r}{\mathrm{d}r} + a_0(r)u_r = 0 \tag{9}$$

наиболее простым достаточным условием неосцилляции решения на интервале (a, b) является условие $a_0(r) < 0$ на этом интервале (см., например, [7]). Соответственно решения уравнения (6) являются неосциллирующими и не могут удовлетворить граничные условия (7), если

$$|\omega^2| > \max\left(\frac{k^2\frac{1}{r^3}\left|\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r^2\Omega\right)^2\right|}{\frac{1}{r^2} + k^2}\right) \tag{10}$$

на интервале (r_{in}, r_{out}). Согласно классической теореме сравнения Штурма (см., например, [8]), частота осцилляций (т.е. количество узлов по радиусу) собственных функций уравнения (6) возрастает с возрастанием собственного числа k^2/ω^2. Соответственно число узлов собственной функции возрастает с уменьшением модуля собственной частоты. Нумеруя собственные частоты по мере уменьшения модуля, начиная с нуля для максимальной по модулю собственной частоты, получим, что число узлов соответствующей собственной функции по радиусу на интервале (r_{in}, r_{out}) будет равно номеру собственной частоты.

В качестве примера найдем собственные частоты и собственные функции осесимметричных возмущений для течения между двумя соосными бесконечно длинными вращающимися цилиндрами (цилиндрического течения Куэтта). Напомним, что для идеальной жидкости

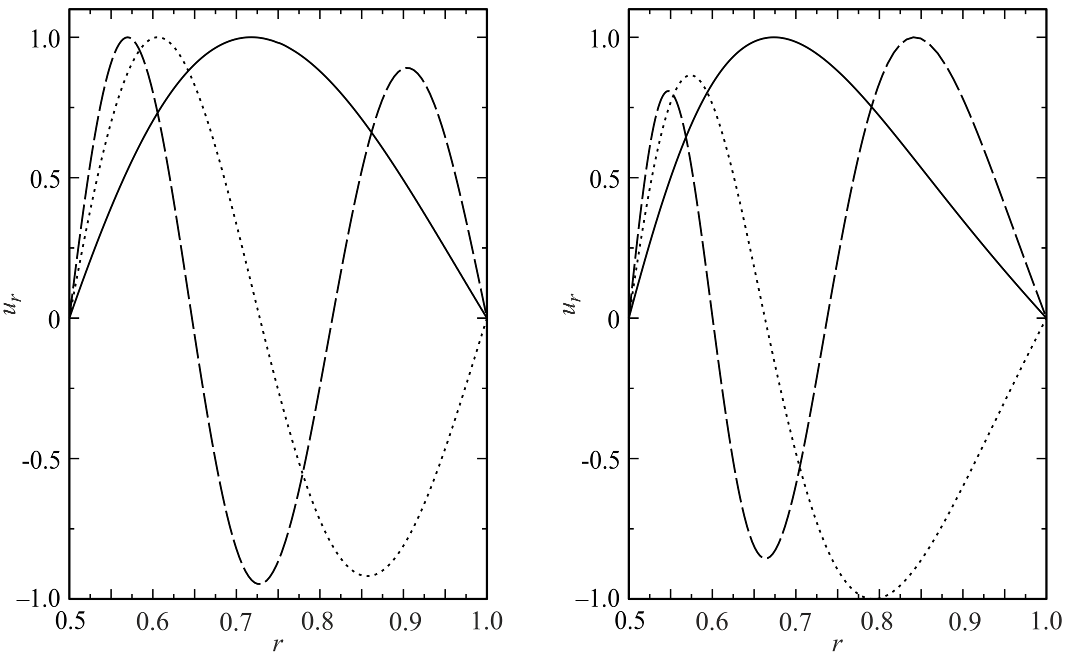

Рис. 1. Нормированные собственные функции течения Куэтта с $\eta = 0.5$ для возмущений с $k = 3$, $m = 0$ (осесимметричные возмущения) для устойчивого течения (слева) с $\mu = 0.5$ (см. (14)) и $\omega^2 = 0.1556$ (сплошная кривая), $\omega^2 = 0.04679$ (пунктирная кривая), $\omega^2 = 0.02161$ (штриховая кривая) и неустойчивого течения (справа) с $\mu = 0$ (невращающийся внешний цилиндр) с $\omega^2 = -0.07678$ (сплошная кривая), $\omega^2 = -0.02085$ (пунктирная кривая), $\omega^2 = -0.009359$ (штриховая кривая).

в качестве угловой скорости можно выбрать любую достаточно гладкую функцию радиуса, удовлетворяющую граничным условиям. В качестве такой функции выберем функцию, которая удовлетворяет уравнениям движения вязкой жидкости и соответственно имеет фиксированный функциональный вид (см., например, [1])

$$u_\phi(r) = r\Omega(r) = Ar + \frac{B}{r}, \tag{11}$$

где константы A и B определяются граничными условиями:

$$A = \Omega_{in}\frac{\mu - \eta^2}{1 - \eta^2}, \quad B = \Omega_{in}R_{in}^2\frac{1 - \mu}{1 - \eta^2}, \tag{12}$$

$$\eta = \frac{r_{in}}{r_{out}}, \quad \mu = \frac{\Omega_{out}}{\Omega_{in}}, \tag{13}$$

r_{in} и r_{out} — радиусы, Ω_{in} и Ω_{out} — угловые скорости внутреннего и внешнего цилиндров.

Отметим, что условие Рэлея (8) для течения (11) принимает простой вид:

$$\mu > \eta^2. \tag{14}$$

Соответственно для течений с $\mu > 0$ (т.е. если цилиндры вращаются в одном направлении) течение будет устойчиво в каждой точке (при выполнении условия (14)) или неустойчиво в каждой точке (при нарушении условия (14)). Для течений с $\mu < 0$ (т.е. для цилиндров вращающихся в разные стороны), как легко видеть, течение будет неустойчиво вблизи внутреннего цилиндра и устойчиво вблизи внешнего.

Перед решением уравнение (6) удобно привести к безразмерному виду. Примем r_{out} за единицу длины, а Ω_{in} за единицу угловой скорости. Уравнение (6) с граничными условиями (7) и безразмерной угловой скоростью (11) решалось методом Рунге–Кутта при фиксированных параметрах μ, η, k и $m = 0$. Использовался метод пристрелки. Одно решение, удовлетворяющее левому граничному условию $u_r(r_{in}) = 0$, с некоторым пробным значением первой производной при $r = r_{in}$ стыковалось в некоторой промежуточной точке $r_{in} < r_0 < r_{out}$ (как правило вблизи центра расчетного интервала) со вторым решением, удовлетворяющем правому граничному условию $u_r(r_{out}) = 0$, с другим пробным значением первой производной при $r = r_{out}$. Эти решения могут быть состыкованы только при определенных значениях параметра ω^2 (этих значений в общем случае бесконечно много), которые называются собственными значениями задачи, а соответствующие им собственные функции собственными функциями задачи.

Были проведены многочисленные расчеты, которые показали, что решения существуют только для значений $|\omega^2|$, не превышающих некоторой предельной величины, соответствующей условию (10). На рис. 1 и 2 представлены нормированные безразмерные собственные функции. Функции нормированы так, чтобы их максимальное по модулю значение равнялось единице. Во всех случаях представлены собственные функции для трех наибольших по модулю квадратов собственных частот. Легко также проверить, что во всех случаях квад-

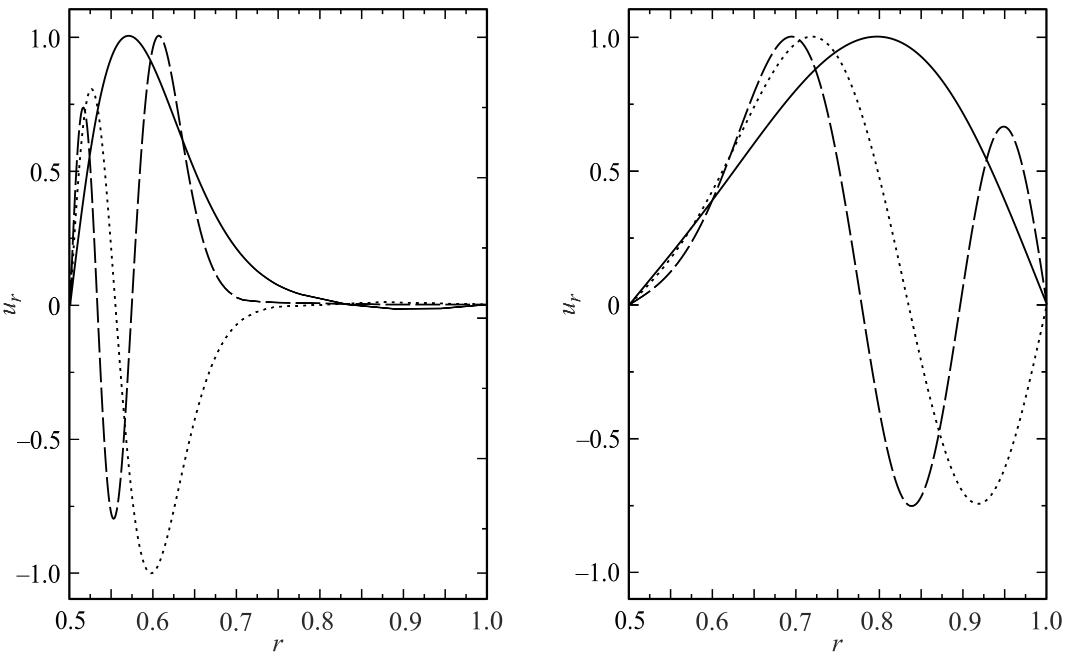

Рис. 2. Нормированные собственные функции течения Куэтта с $\eta = 0.5$ для возмущений с $k = 3$, $m = 0$ (осесимметричные возмущения) для цилиндров, вращающихся в разные стороны с $\mu = -1$ и с отрицательными квадратами собственных частот (слева) $\omega^2 = -0.0674$ (сплошная кривая), $\omega^2 = -0.0131$ (пунктирная кривая), $\omega^2 = -0.00536$ (штриховая кривая) и с положительными квадратами собственных частот (справа) $\omega^2 = 0.6$ (сплошная кривая), $\omega^2 = 0.142$ (пунктирная кривая), $\omega^2 = 0.0599$ (штриховая кривая).

раты максимальных собственных частот удовлетворяют условию (10).

На рис. 1 представлены результаты для течения с цилиндрами, вращающимися в одну сторону (т. е. $\mu > 0$). Для устойчивого течения с $\mu > \eta^2$ все квадраты собственных частот положительны. Естественно, они будут меняться при изменении параметров. Например, при изменении волнового числа k. На рисунке представлены собственные функции для первых трех (по величине) собственных частот. Видно, что число узлов собственных функций по радиусу, согласно теореме сравнения Штурма, соответствует номеру собственной частоты. Аналогично, для неустойчивого течения с $0 < \mu < \eta^2$ все квадраты собственных частот отрицательны. Существует предельная по модулю собственная частота и число узлов соответствующей собственной функции растет с уменьшением модуля собственной частоты.

На рис. 2 представлены результаты для течения с цилиндрами, вращающимися в разные стороны (с $\mu < 0$). В этом случае квадраты собственных частот будут как положительными, так и отрицательными в соответствии с тем, что течение неустойчиво вблизи внутреннего цилиндра и устойчиво вблизи внешнего. Это хорошо заметно по характеру собственных функций, которые концентрируются к внутреннему цилиндру для отрицательных квадратов собственных частот и к внешнему цилиндру для положительных квадратов собственных частот. При этом поведение спектра собственных частот соответствует вышеописанному: существует предельная по модулю частота, а количество узлов собственных функций по радиусу растет с уменьшением модуля собственной частоты.

Заключение

Несмотря на более чем столетнюю историю исследования устойчивости вращения жидкости, проблема еще далека от своего окончательного решения. В работе даже для простейшего случая однородной идеальной жидкости впервые показно, что собственные частоты осесимметричных возмущений ограничены по модулю.

Кроме того, собственные частоты можно пронумеровать по мере уменьшения их модуля от максимальной по модулю частоты, которой присваивается номер ноль. При этом числов узлов собственной функции по радиусу будет соответствовать (в соответствии с теорией Штурма) номеру собственной частоты. Общие результаты проиллюсрированы расчетами для цилиндрического течения Куэтта.

Отметим, что полученные в работе результаты в существенной степени опираются на результаты теории осцилляции решений обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка с вещественными коэффициентами. Необходимо подчеркнуть, что эту теорию невозможно распространить как на дифференциальные уравнения второго порядка с комплексными коэффициентами, так и на дифференциальные уравнения высших порядков. Несмотря на это, указанная теория может найти и уже нашла (см., например, [9]) широкое применение в различных проблемах гидродинамики и магнитной гидродинамики.

Конфликт интересов

Автор заявляет, что у него нет конфликта интересов.

Список литературы

[1] S. Chandrasekhar. *Hydrodynamic and Hydromagnetic Stability* (Clarendon Press, Oxford, 1961)
[2] H.P. Greenspan. *The Theory of Rotating Fluids* (Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1968) [Х. Гринспен. *Теория вращающихся жидкостей* (Гидрометеоиздат, Л., 1975)]
[3] P.G. Drazin, W.H. Raid. *Hydrodynamic stability* (Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1981)
[4] R. Lord, Proc. R. Soc. London A, **93**, 148 (1917). DOI: 10.1098/rspa.1917.0010
[5] J.L. Synge. Trans. R. Soc. Can., **27**, 1 (1933).
[6] Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. *Теоретическая физика. Гидродинамика* (Москва, Наука, 1986), т. 6, с. 66.
[7] В.А. Кондратьев. УМН, **12** (3), 159 (1957).
[8] C.A. Swanson, *Comparision and oscillation theory of linear differential equation* (Academic Press, NY., London, 1968)
[9] J.P. Goedbloed, S. Poedts. *Principles of Magnetohydrodynamics* (Cambridge Univ. Press, Cambridge 2004)