04

Корреляционное восстановление изображений нелинейными наложенными голограммами Фурье

© А.В. Павлов

Университет ИТМО,
Санкт-Петербург, Россия

e-mail: avpavlov@itmo.ru, aleksandrv.pavlov@yandex.ru

Поступила в редакцию 06.12.2024 г.
В окончательной редакции 27.01.2025 г.
Принята к публикации 31.01.2025 г.

Рассмотрены отклики субголограмм, формирующихся при проявлении мультиплексной голограммы, записанной на регистрирующей среде с квадратичной нелинейностью экспозиционной характеристики в $4f$-схеме голографии Фурье с последовательным угловым мультиплицированием опорных пучков с плоским волновым фронтом. Показано, что эти субголограммы реализуют модель корреляционного восстановления полей комплексно-значимых амплитуд — гетеро-ассоциативную память, которая может быть соотнесена с концепцией фантомных изображений: отклик каждой субголограммы описывается сверткой эталона одной из наложенных голограмм с функцией корреляции входного поля и эталона другой наложенной голограммы. Показана инверсия этими субголограммами отношения удельных весов восстановленных эталонов относительно их соотношения при записи наложенных голограмм. Дан анализ корреляционного механизма усиления амплитуды восстанавливаемого эталона при уменьшении его размера и постоянном размере другого эталона. Теоретические выводы подтверждены результатами численного моделирования при представлении обрабатываемых изображений реализациями однородных изотропных случайных дельта-коррелированных полей.

Ключевые слова: голография, наложенные голограммы, преобразование Фурье, корреляция, нелинейная экспозиционная характеристика, фантомные изображения.

DOI: 10.61011/OS.2025.04.60533.7424-24

Введение

Развитие голографии неразрывно связано с реализацией корреляционных моделей обработки информации — здесь можно упомянуть голографические корреляторы [1] и ассоциативную память на их основе [2], регрессионные модели [3]. В настоящее время значительная часть работ в области оптоинформатики посвящена моделям и методам, объединяемым термином „фантомный“. Это направление, основанное на взаимной коррелированности двух волновых полей, изначально было предложено в квантовой оптике [4–6] применительно к порождаемым при спонтанном параметрическом рассеянии света парам коррелированных фотонов [7] и развито затем для оптики классической — полей и источников с тепловой статистикой [8–11]. На сегодня оно охватывает широкий круг задач передачи и восстановления изображений (Ghost Imaging) [8–14], в частности эндоскопию трехмерных пространственно-прозрачных объектов [12, 13] с использованием пространственно-временных корреляций [14], поляриметрию [15,16], дистанционное зондирование [17], криптографию [18–20], микроскопию [21,22] и целый ряд иных.

Практическая привлекательность фантомных методов во многих задачах обусловлена возможностью применения на первом этапе (регистрации исходного изображения) не изображающего, а интегрирующего сенсора [12–14]. Но поскольку в основе фантомных моделей лежит коррелированность — квантовая или классическая, то они характеризуются высокой вычислительной затратностью на этапе восстановления изображений как платой за инструментальный выигрыш на этапе регистрации. Поэтому для них актуальны методы операционного исчисления с естественно-параллельной обработкой двумерных массивов информации, к которым принадлежит и голография [1–3]. Концептуально важна также и аналогия в плане наличия как в фантомных моделях, так и в голографии двух массивов информации (изображений, полей, пучков) — опорного и сигнального. Здесь следует подчеркнуть, что классическая фантомная оптика работает с корреляцией интенсивностей, а голография — с корреляцией полей комплексно-значимых амплитуд. Последней аспект определяет актуальность голографии также и в типичной для биологических и медицинских исследований задаче визуализации фазового контраста [12–14,21,22].

Достаточно условно можно выделить два варианта применения голографии в фантомных моделях: для ввода в схему посредством пространственно-временных модуляторов света фазовых масок, необходимых для получения требуемого в рамках вычислительной фантомной визуализации поля амплитуд в плоскости исследуемого объекта [16,20], и фантомная голография [21,22]. В последнем случае оптическая схема усложняется добавлением к двум пучкам схемы фантомной дифракции (сигнального и опорного) третьего — случайного поля, играющего роль опорного для записи голограммы [21]. Но актуальную проблему вычислительной сложности эти реализации кардинально не решают, поскольку включают в себя этапы обычных цифровых вычислений [22].

Применение голографических методов в рамках корреляционных моделей по большей части основано на линейной записи голограмм. Но экспозиционные характеристики (ЭХ) голографических регистрирующих сред (ГРС) нелинейны. В этой связи обращает на себя внимание работа [23], в которой теоретически показано, что при записи наложенных голограмм с угловым мультиплексированием опорных пучков на ГРС с квадратичной нелинейностью ЭХ в составе мультиплексной голограммы на этапе её проявления формируются субголограммы, связывающие записанные на разных наложенных голограммах волновые поля. Этот результат, представляющий частный случай возникновения комбинационных частот в нелинейной системе [24], был конкретизирован для $4f$-схемы голографии Фурье и экспериментально подтвержден в статье [25].

В развитие этого подхода в настоящей статье показано, что квадратичные субголограммы в составе мультиплексной голограммы Фурье реализуют модель корреляционного восстановления изображений, которая может быть соотнесена с концепцией фантомных изображений. Показан механизм инверсии удельных весов восстановленных субголограммами образов относительно эталонных с акцентом на наиболее интересный для ряда возможных применений вариант постоянства на этапе записи удельного веса опорного эталона и уменьшения восстанавливаемого.

1. Подход и модель

1.1. Оптическая схема

На рис. 1 приведена классическая $4f$-схема голографии Фурье с мультиплексной голограммой, образованной двумя наложенными голограммами, последовательно записанными с пространственным разнесением точечных внеосевых опорных источников (угловым мультиплицированием опорных пучков с плоским волновым фронтом). В статье термин образ означает поле комплексных амплитуд в соответствующей плоскости.

При записи наложенных голограмм по схеме рис. 1 в фурье-плоскости H — задней фокальной плоскости первой фурье-преобразующей линзы L_1 — формируются последовательно записываемые на ГРС распределения интенсивностей:

$$I_A(\nu_x,\nu_y) \propto \left[D^A \exp(j2\pi\nu_x x^A) + \Im(A(x,y))\right] \times \left[D^A \cdot \exp(j2\pi\nu_x x^A) + \Im(A(x,y))\right]^*,$$

$$I_B(\nu_x,\nu_y) \propto \left[D^B \exp(j2\pi\nu_x x^B) + \Im(B(x,y))\right] \times \left[D^B \cdot \exp(j2\pi\nu_x x^B) + \Im(B(x,y))\right]^*,$$

где ν — пространственная частота, j — мнимая единица, D^A и D^B — действительные амплитуды плоских волновых фронтов, пропорциональные амплитудам соответствующих точечных опорных источников, описываемых дельта-функциями $\delta_A(x-x_A,y)$ и $\delta_B(x-x_B,y)$, x^A и x^B — их координаты, $\Im$ и астериск — символы преобразования Фурье и комплексного сопряжения соответственно.

Если скрытое изображение в ГРС проявляется после записи всех наложенных голограмм, а нелинейная ЭХ ГРС может быть аппроксимирована двумя первыми членами её разложения в степенной ряд, то зависимость локальной дифракционной эффективности голограммы по амплитуде от пространственной частоты имеет вид

$$\begin{aligned} H(\nu_x,\nu_y) &= H^1(\nu_x,\nu_y) + H^2(\nu_x,\nu_y) \\ &= h^1\Big\{[D^A \cdot \exp(j2\pi\nu_x x^A) + \Im(A(x,y))] \\ &\quad \times [D^A \cdot \exp(j2\pi\nu_x x^A) + \Im(A(x,y))]^* \\ &\quad + [D^B \cdot \exp(j2\pi\nu_x x^B) + \Im(B(x,y))] \\ &\quad \times [D^B \cdot \exp(j2\pi\nu_x x^B) + \Im(B(x,y))]^*\Big\} \\ &\quad + h^2\Big\{[D^A \cdot \exp(j2\pi\nu_x x^A) + \Im(A(x,y))] \\ &\quad \times [D^A \cdot \exp(j2\pi\nu_x x^A) + \Im(A(x,y))]^* \\ &\quad + [D^B \cdot \exp(j2\pi\nu_x x^B) + \Im(B(x,y))] \\ &\quad \times [D^B \cdot \exp(j2\pi\nu_x x^B) + \Im(B(x,y))]^*\Big\}^2, \end{aligned} \tag{1}$$

где верхние индексы 1 и 2 указывают линейный и квадратичный члены разложения, h^1 и h^2 — коэффициенты, зависящие от ЭХ и условий проявления ГРС. Разложение квадратичного члена в (1) (элементарные, но весьма громоздкие выкладки опустим) дает в числе прочих также и два слагаемых, каждое из которых описывает картину интерференции не интерферирующих в реальности эталонных образов $A(x,y)$ и $B(x,y)$

$$H^{B2}(\nu_x\cdot\nu_y) = h^2 D^A D^B \Im^*(A(x,y))\Im(B(x,y)) \times \exp(j2\pi\nu_x(x^A-x^B)), \tag{2.1}$$

$$H^{B2}(\nu_x\cdot\nu_y) = h^2 D^A D^B \Im(A(x,y))\Im^* B(x,y) \times \exp(-j2\pi\nu_x(x^A-x^B)). \tag{2.2}$$

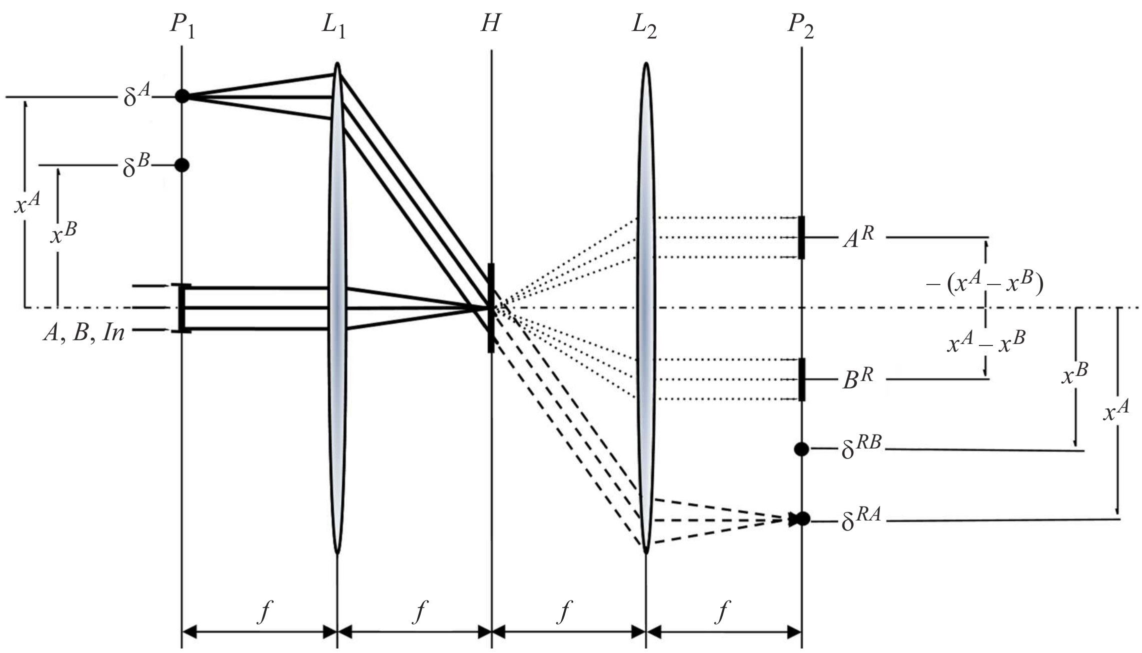

Рис. 1. $4f$-схема голографии Фурье для двух наложенных голограмм: A, B, In — образы: эталонные и входной, поочередно предъявляемые во входной плоскости P_1, короткими стрелками условно показан освещающий транспаранты с образами плоский волновой фронт; δ^A и δ^B — точечные опорные источники, смещенные на x^A и x^B относительно главной оптической оси соответственно; L_1, L_2 — первая и вторая фурье-преобразующие линзы с фокусными расстояниями f; H — плоскость голограммы Фурье; P_2 — плоскость откликов. Штриховыми линиями условно показан ход лучей, дифрагировавших на наложенной голограмме H^A и восстанавливающих в плоскости P_2 изображение опорного источника δ^{RA}, пунктирными — ход лучей, дифрагировавших на квадратичных субголограммах H^{B2} и H^{A2}, сформировавшихся за счет квадратичной нелинейности ЭХ ГРС, и восстанавливающих образы B^R и A^R соответственно.

Далее будем называть эти компоненты мультиплексной голограммы (1) квадратичными субголограммами, а определение „квадратичный“ для краткости по умолчанию опустим.

При предъявлении во входной плоскости P_1 схемы рис. 1 образа $In(x, y)$, субголограммы формируют в выходной плоскости P_2 два отклика, локализованных симметрично относительно главной оптической оси на расстояниях от неё $(x^A - x^B)$ и $-(x^A - x^B)$:

$$\begin{aligned} B^R(\Delta_x, \Delta_y) &= h^2 D^A D^B \Im\big[\Im(In(x, y))\Im^*(A(x, y)) \\ &\times \Im(B(x, y)) \exp(j2\pi\nu_x(x^A - x^B))\big] \\ &= h^2 D^A D^B \left\{B(x, y) * [In(x, y) \otimes A(x, y)] * \delta(x^A - x^B)\right\} \\ &\propto B(x, y) * [In(x, y) \otimes A(x, y)], \end{aligned} \tag{3.1}$$

$$\begin{aligned} A^R(\Delta_x, \Delta_y) &= h^2 D^A D^B \Im\big[\Im(In(x, y))\Im(A(x, y)) \\ &\times \Im^*(B(x, y)) \exp(-j2\pi\nu_x(x^A - x^B))\big] \\ &= h^2 D^A D^B \left\{A(x, y) * [In(x, y) \otimes B(x, y)] * \delta(x^A - x^B)\right\} \\ &\propto A(x, y) * [In(x, y) \otimes B(x, y)], \end{aligned} \tag{3.2}$$

где R в верхних индексах означает „восстановленный“, Δ_x, Δ_y — координаты в плоскости P_2, $*$ и $\otimes$ — символы операций свертки и корреляции соответственно. Отклики (3.1) и (3.2) каждой из квадратичных субголограмм (2.1) и (2.2) суть свертки одного из эталонов с взятой в квадратные скобки функцией корреляции образов: входного и другого эталонного, который в рамках данного описания формально, поскольку физически эталоны $A(x, y)$ и $B(x, y)$ не интерферируют, имеет смысл опорного. Восстанавливаемый субголограммой эталон будем, также формально, называть сигнальным. Это различение эталонов на сигнальный и опорный условно — оно имеет смысл только применительно к конкретной субголограмме, для второй субголограммы определения меняются местами.

1.2. Анализ модели

Объемная ГРС. В силу угловой селективности объемной голограммы корреляционные функции в (3.1) и (3.2) редуцируются к глобальным максимумам (ГМ) автокорреляционных функций (АКФ), представляющим дифракционно-ограниченные изображения точечных опорных источников; их амплитуды описываются скалярными произведениями входного и опорных образов: $\langle In(x, y)A(x, y)\rangle$ вместо функции корреляции $[In(x, y) \otimes A(x, y)]$ в (3.1) и $\langle In(x, y)B(x, y)\rangle$ вместо $[In(x, y) \otimes B(x, y)]$ в (3.2), соответственно и свертки в (3.1) и (3.2) редуцируются к умножению эталонов на эти скаляры

$$B^R(\Delta_x, \Delta_y) \propto B(x, y) \cdot \langle In(x, y)A(x, y)\rangle, \qquad (4.1)$$

$$A^R(\Delta_x, \Delta_y) \propto A(x, y) \cdot \langle In(x, y)B(x, y)\rangle, \qquad (4.2)$$

Таким образом, в силу угловой селективности объемной голограммы квадратичные субголограммы восстанавливают неискаженные, но с учетом потери разрешения вследствие дополнительной фильтрации на голограмме, обусловленной ограниченностью динамического диапазона и нелинейностью ЭХ ГРС [26,27], эталоны.

Примем в качестве меры скалярное произведение, введем отношение

$$k = \frac{\langle A(x, y)A(x, y)\rangle}{\langle B(x, y)B(x, y)\rangle}$$

и с учетом (4.1) и (4.2) определим отношение модулей амплитуд эталонных образов: восстановленных субголограммами и исходных, на этапе записи наложенных голограмм

$$\frac{|B^R(x, y)|}{|B(x, y)|} \propto \langle In(x, y)A(x, y)\rangle = k\cdot\langle In(x, y)B(x, y)\rangle$$
$$= k \cdot \langle B(x, y)B(x, y)\rangle + k\langle\overline{B(x, y)}B(x, y)\rangle, \qquad (5.1)$$

$$\frac{|A^R(x, y)|}{|A(x, y)|} \propto \langle In(x, y)B(x, y)\rangle = \frac{1}{k}\cdot\langle In(x, y)A(x, y)\rangle$$
$$= \frac{1}{k} \cdot \langle A(x, y)A(x, y)\rangle + \frac{1}{k}\langle\overline{A(x, y)}A(x, y)\rangle, \qquad (5.2)$$

где $\overline{A(x, y)}$ и $\overline{B(x, y)}$ — дополнения каждого из эталонов до входного поля $In(x, y)$. Из (5.1) и (5.2) следует, что если при записи наложенных голограмм доминировал по скалярному произведению как мере один из эталонов, например $A(x, y)$

$$\langle A(x, y)A(x, y)\rangle > \langle B(x, y)B(x, y)\rangle,$$

то в откликах субголограмм (3.1) и (3.2) имеет место инверсия отношения амплитуд восстановленных образов относительно эталонных: амплитуда восстановленного субголограммой (2.2) доминировавшего эталона $A^R(x, y)$ ослабляется (5.2), а в формируемом субголограммой (2.1) отклике (4.1) амплитуда более слабого образа $B^R(x, y)$, наоборот, усиливается (5.1).

Тонкая ГРС. Проведенное выше рассмотрение правомочно и для тонкой голограммы, но в силу её угловой инвариантности восстановленные образы описываются уже не умножением на скаляр (4.1) и (4.2), а свертками эталонов с полными корреляционными функциями, включающими как ГМ АКФ, так и боковые максимумы: авто- и взаимно-корреляционных функций, описываемых вторыми слагаемыми в (5.1) и (5.2). При этом ГМ АКФ в силу внутренней коррелированности образа — в общем случае не дельта-функция, но характеризуется ненулевым радиусом. Оба эти фактора снижают качество восстановленного изображения: ненулевой радиус корреляции влечет за собой потерю разрешения, а боковые максимумы формируют фон — и накладывающийся на восстановленный эталон, и окружающий его. Для повышения качества восстановленного образа и увеличения его контраста на фоне необходимо максимизировать отношение сигнал/помеха, т. е. отношение амплитуды ГМ АКФ к средней амплитуде боковых максимумов корреляционной функции, и уменьшить радиус корреляции [28], например, посредством пространственно-частотной фильтрации [26,27] или введением во входной плоскости P_1 ортогонализирующих масок [29].

Эффективность выделения эталона из фона. Введем оценку эффективности выделения в восстановленном поле (4.1) эталона $B^R(x, y)$ из фона $\overline{B^R(x, y)}$, описывающую контраст (по амплитуде) эталона на фоне:

$$K^B = \frac{M|B^R(x, y)|}{M|\overline{B^R(x, y)}|}, \qquad (6)$$

где $M|B^R(x, y)|$ — средний по площади восстанавливаемого эталона модуль его амплитуды, $M|\overline{B^R(x, y)}|$ средний по площади модуль амплитуды фона.

Если образы могут быть описаны реализациями однородного изотропного центрированного случайного поля, то

$$\langle A(x, y)A(x, y)\rangle = \sigma^2 S^A, \qquad (7)$$

где σ^2 — дисперсия поля, а S^A — площадь опорного эталона $A(x, y)$ [28]. Из (7) видно, что доминирование по скалярному произведению определяется двумя эквивалентными факторами: дисперсий образа σ^2 (или связанным с дисперсией средним модулем его амплитуды) и его площадью S. Наибольший интерес, например, для криптографии представляет именно последний фактор, т. е. вариант, когда эталоны и входное поле $In(x, y)$ суть реализации одного однородного изотропного случайного поля. Из (7) очевидна прямая (но не пропорциональная из-за наличия кросс-корреляционных компонент в (5.1)) зависимость оценки K^B от площади S^A опорного эталона $A(x, y)$. Менее очевидна допускаемая (5.1), но не описываемая (7), зависимость отношения (6) от площади сигнального эталона S^B при постоянстве S^A. Ниже рассмотрим её механизм.

Представим отклик (3.1) в виде

$$B^R(\Delta_x, \Delta_y) \propto B(x, y) * [A(x, y) \otimes A(x, y)]$$
$$+ B(x, y) * \left[\overline{A(x, y)} \otimes A(x, y)\right]. \qquad (8)$$

Здесь первое слагаемое описывает две компоненты:

1.1. восстановленный ГМ АКФ сигнальный образ $B(x, y)$: $B(x, y) * \langle A(x, y)A(x, y)\rangle$;

1.2. и накладывающийся на него ореол, формируемый боковыми максимумами АКФ $B(x, y) * [A(x, y) \otimes A(x, y)] - B(x, y) * \langle A(x, y)A(x, y)\rangle$.

2. Второе слагаемое в (8) описывает формируемый кросс-корреляционной компонентой фон, окружающий и накладывающийся на $B^R(x, y)$: $B(x, y) * [\overline{A(x, y)} \otimes A(x, y)]$.

Для оценки зависимости от r средней по модулю амплитуды компоненты 1.1. — восстанавливаемого сигнального эталона $B(x, y)$ — опишем зависимость интегральной дифракционной эффективности субголограммы H^{B2} от S^B как зависимость модуля амплитуды отклика в плоскости P_2 при освещении голограммы пучком единичной амплитуды с плоским волновым фронтом

$$|Out^{B2}(\Delta_x, \Delta_y)| = |\Im(H^{B2}(\nu_x, \nu_y))| \propto |B(x, y) \otimes A(x, y)| * \delta(x^A - x^B).$$

Поскольку предполагается некоррелированность эталонов, то средний по ансамблю модуль амплитуды отклика есть средняя амплитуда кросс-корреляционного поля и согласно [28] интересующая нас зависимость может быть оценена следующим образом:

$$\eta^B(S^B) \propto M|B(x, y) \otimes A(x, y)| = \sqrt{\kappa S^B \sigma^4 S^{Corr}} \propto \sqrt{S^B} = \sqrt{\frac{S^A}{r}}, \tag{9}$$

где M — символ математического ожидания, κ — коэффициент, зависящий от вида АКФ поля, σ^4 — квадрат его дисперсии, S^{Corr} — площадь корреляции, $r = \frac{S^A}{S^B}$ — отношение площадей эталонов.

При уменьшении S^B предельный случай существования отклика $B(x, y) = \delta(x - x^B, y - y^B)$:

$$|Out^{B2}(\Delta_x, \Delta_y)| \propto |\delta(x - x^B, y - y^b) \otimes A(x, y)| * \delta(x^A - x^B) = |A(x + (x^A - x^B), y)|,$$

т.е. интересующая нас зависимость средней по модулю амплитуды восстанавливаемого эталона $B(x, y)$ от его площади или, что эквивалентно при постоянстве площади опорного эталона S^A, от отношения площадей эталонов r имеет вид

$$M^B(r) = M|B^R(x, y)| \propto \eta^B(r) \propto a + b \cdot r^{-0.5}, \tag{10}$$

где a и b — параметры, определяемые характеристиками эталонов $A(x, y)$ и $B(x, y)$ соответственно. Поскольку нас интересуют не абсолютные значения дифракционной эффективности, а лишь её зависимость от r, то из нормировки на её значение при $r = 1$ получим $a + b = 1$.

Вклад компоненты (1.2) определяется отношением амплитуд ГМ и боковых максимумов АКФ, зависящим как от вида АКФ, определяющего площадь корреляции S^{Corr}, так и от отношения площадей опорного эталона и корреляции $\Omega^A = \dfrac{S^A}{S^{Corr}}$, являющегося информационной оценкой образа $A(x, y)$ [28]. Этот фактор имеет тот же механизм зависимости от S^B, что и рассмотренный выше, но с тем существенным уточнением, что, как показано в [26,28], отношение амплитуд ГМ и боковых максимумов АКФ зависит от площади корреляции немонотонно — с её уменьшением это отношение увеличивается и соответственно вклад компоненты уменьшается, но при приближении радиуса корреляции ориентировочно к двум — трем размерам элемента разрешения (пикселя) начинается резкий рост боковых максимумов, отражающий разрушение внутренней коррелированности эталона, и соответственно рост вклада компоненты 1.2 в фоновую составляющую восстановленного поля.

Для оценки зависимости от r средней по модулю амплитуды фона $M|\overline{B^r(x, y)}|$, формируемого вторым слагаемым в (8), примем, что площадь фона $\overline{A(x, y)}$ во входном образе не менее площади опорного эталона $A(x, y)$. Тогда при оценке средней амплитуды кросс-корреляционного поля $\left|\overline{A(x, y)} \otimes A(x, y)\right|$ опорный эталон $A(x)$ выступает в качестве эталона, и согласно [28] получаем независимость средней амплитуды кросс-корреляционного поля $\left|\overline{A(x, y)} \otimes A(x, y)\right|$ от S^B или, что эквивалентно, от отношения площадей эталонов r:

$$M\left|\overline{A(x, y)} \otimes A(x, y)\right| = \sqrt{\kappa S^A \sigma^4 S^{Corr}} \propto \sqrt{S^A}.$$

Применив этот же подход [28] ко второму слагаемому в (8) в целом, т.е. рассматривая свертку как корреляцию $B(x, y)$ с $|\overline{A(x, y)} \otimes A(x, y)|$, что правомочно с учетом принятой модели поля, получим зависимость среднего по площади модуля амплитуды фона $M|\overline{B^R(x, y)}|$ от площади сигнального эталона S^B или отношения площадей эталонов r

$$M^N(r) = M\left|B(x, y) * \left[\overline{A(x, y)} \otimes A(x, y)\right]\right| = \sqrt{\kappa S^B \sigma^4 S^{Corr}} \propto \sqrt{S^B} \propto \frac{c}{r^{0.5}}, \tag{11}$$

где c — параметр.

Тогда, в предположении достаточно высокой информационной меры опорного эталона Ω^A получим приближенную зависимость оценки эффективности выделения эталона из фона по введенному критерию отношения средних модулей их амплитуд — контрасту (6)

$$K(r) = \frac{M^B(r)}{M^N(r)} \propto \frac{r^{0.5}}{c}(a + b \cdot r^{-0.5}) = \frac{1}{2}(a \cdot r^{0.5} + b) = \frac{1}{c}(1 + a(r^{0.5} - 1)). \tag{12}$$

2. Численное моделирование

Моделировались отклики субголограмм (2.1) и (2.2) для представляющего наибольший практический интерес варианта тонкой ГРС. В качестве входного образа $In(x, y)$ использовалось случайное центрированное поле с нормальным распределением амплитуд в интервале

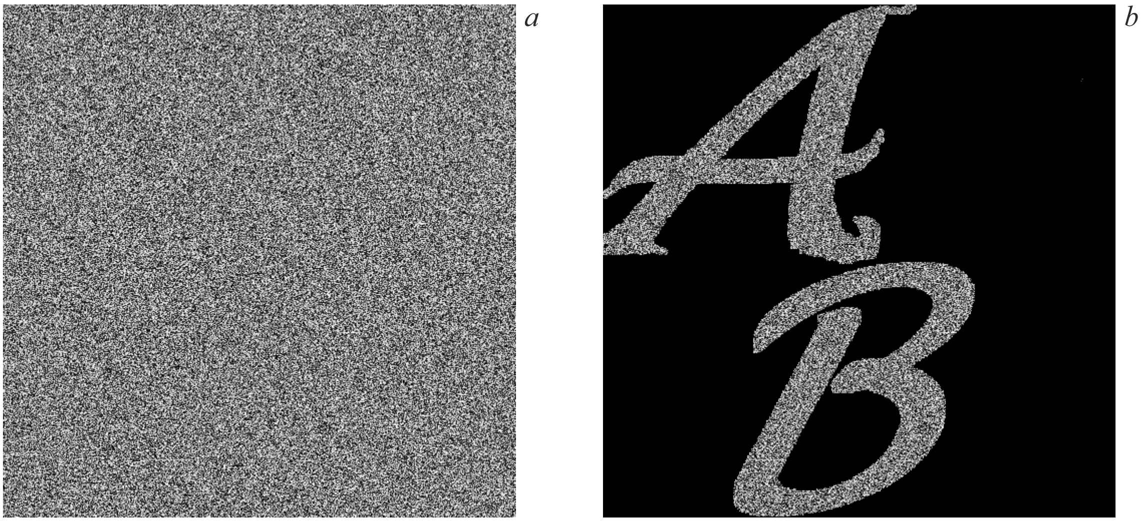

Рис. 2. Примеры входного образа, содержащего оба эталона $A(x,y)$ и $B(x,y)$: с заливкой фона (a), только эталоны $A(x,y)$ и $B(x,y)$, без заливки остальной части (b).

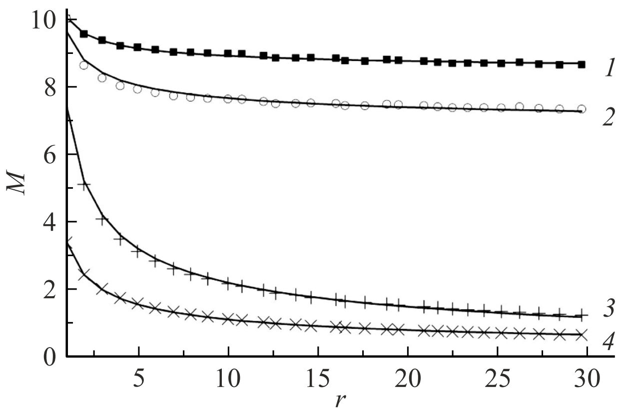

Рис. 3. Зависимости среднего модуля амплитуды фрагментов поля (рис. 2,a), восстановленного квадратичной субголограммой: эталонного образа $B(x,y)$ (*1* и *2*) или фона (*3* и *4*), от отношения площадей эталонов при предъявлении во входной плоскости только опорного эталона $A(x,y)$ (*1* и *3*) или всего поля $In(x,y)$ (*2* и *4*).

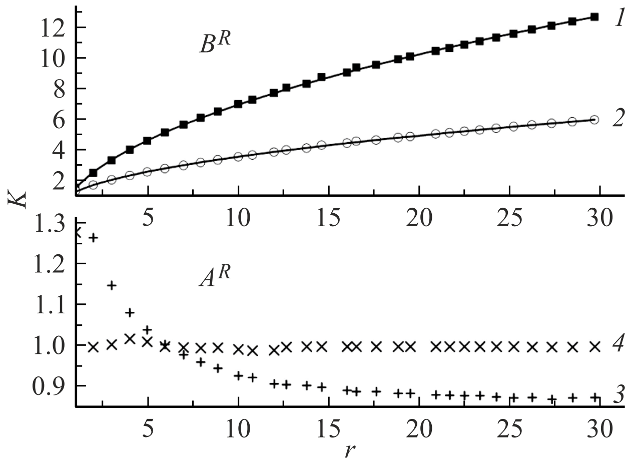

Рис. 4. Зависимости отношения средних модулей амплитуд восстановленных эталона и окружающего его фона от отношения площадей эталонов: *1* и *2* — для восстановленного эталонного образа $B(x,y)$; *3* и *4* — для восстановленного эталонного образа $A(x,y)$; при предъявлении во входной плоскости: *1* и *3* — только эталонов $A(x,y)$ и $B(x,y)$; *2* и *4* — всего поля $In(x,y)$ (рис. 2,a); точки — измеренные значения, линии — аппроксимация (10): *1* — $K^B(r) = 2.502 \cdot r^{0.5} - 0.986$, $\delta K = 0.005$; *2* — $K^B(r) = 1.052 \cdot r^{0.5} + 0.206$, $\delta K = 0.004$.

$[-0.5, 0.5]$, пример дан на рис. 2,a. Дисперсия поля $\sigma^2 = 0.083$, радиус корреляции по нулевому уровню 1 пиксель, т.е. поле было дельта-коррелированным. Размеры входного образа $In(x,y)$ задавали размер апертуры во входной плоскости P_1 и варьировались, максимальный размер составлял 512×512 пикселей ($S^{In} = 2.62144 \cdot 10^5$).

В качестве эталонов $A(x,y)$ и $B(x,y)$ использовались несовпадающие фрагменты поля, площади эталона $A(x,y)$: $S^A = \frac{1}{16}S^{In}$ и $S^A = \frac{1}{4}S^{In}$, размеры эталона $B(x,y)$ варьировались и задавались значениями параметра $r = \frac{S^A}{S^B}$. Для наглядности результатов в качестве эталонов также использовались буквы A и B, абрис которых заполнялся полем (рис. 2,b), максимальная площадь абриса доминировавшего эталона $S^A = 2.613 \cdot 10^4 \approx 0.1 \cdot S^{In}$.

Размерность субголограмм определялась при дискретном преобразовании Фурье как размерность фурье-образа апертуры во входной плоскости P_1. Геометрические размеры поля отклика соответствовали размерам входной апертуры.

Как следует из (2.1) и (2.2), на субголограммах регистрируется не абсолютный x^{A} и x^{B}, а взаимный $(x^{\mathrm{A}} - x^{\mathrm{B}})$ сдвиг точечных опорных источников. Соглас-

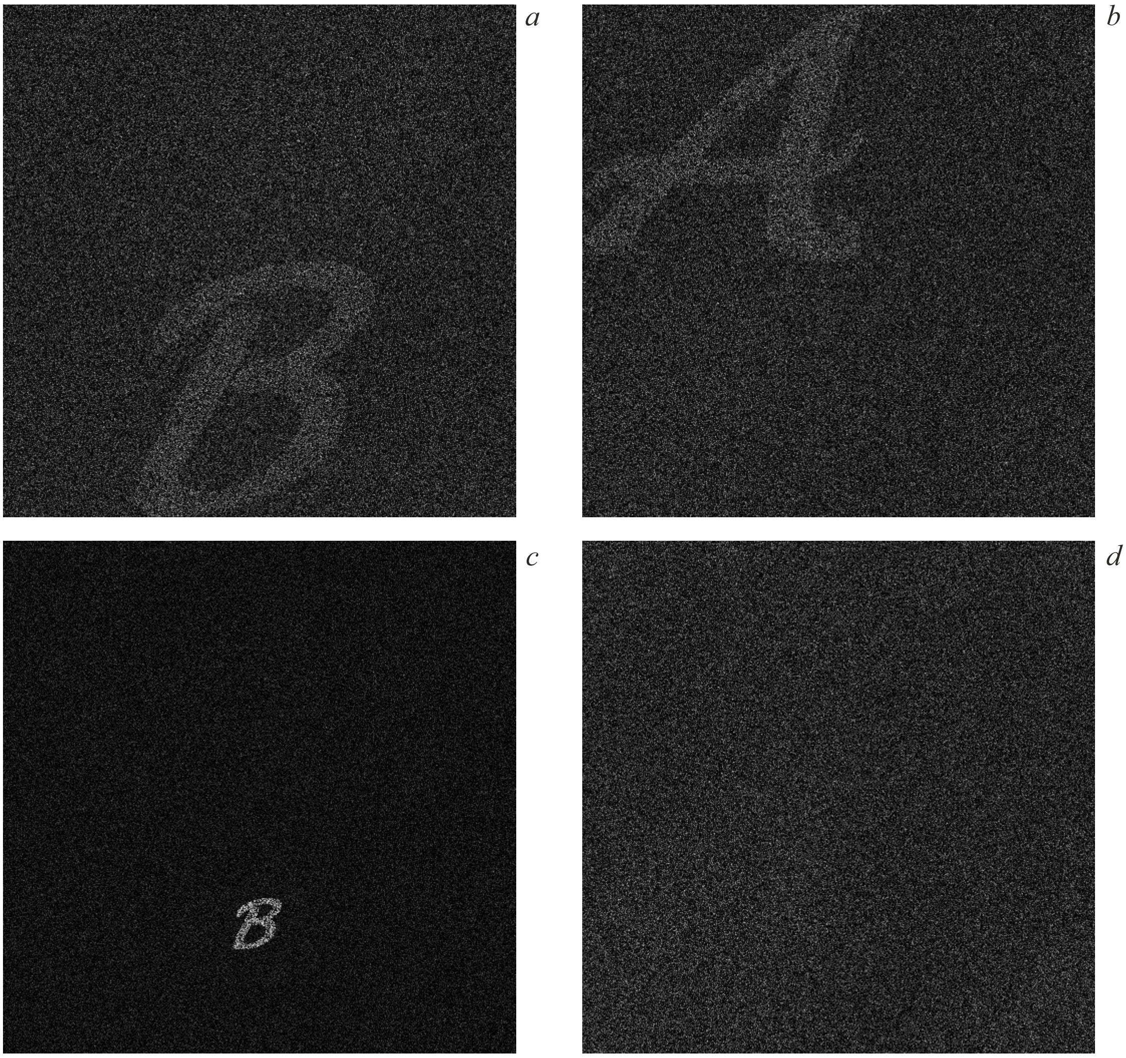

Рис. 5. Отклики субголограмм: H^{B2} — левая колонка (a и c) и H^{A2} — правая колонка (b и d) для отношений площадей эталонов: $r = 1$ — верхний ряд и $r = 31$ — нижний ряд.

но (3.1) и (3.2), при тонкой ГРС он эквивалентен взаимному смещению эталонов в пределах входной апертуры. Именно взаимный сдвиг эталонов и моделировался, как это показано на рис. 2, b и 5.

На рис. 3 представлены зависимости от отношения площадей эталонов r средних модулей амплитуд восстанавливаемого эталона $B(x, y)$ и фона, нормированные на значение $M^B(1)$ для размера входного образа 512×512 пикселей и присутствующего в нём опорного эталона $A(x, y)$ 256×256 (рис. 2, a). Измеренные значения аппроксимировались моделью (10).

Для размера опорного эталона $A(x, y)$ 128×128 и эталонов — букв зависимости имели аналогичный характер с тем очевидным отличием, что с уменьшением размеров эталонов увеличивался разброс измеренных значений относительно аппроксимирующей кривой. В таблице приведены значения параметров модели (10) и относительные погрешности аппроксимации δM^B для двух размеров эталонных образов.

Значения параметров и относительные погрешности аппроксимации экспериментальных данных рис. 3 моделью $M^B(r) = a + b \cdot r^{0.5}$ (10)

Параметр	Размер, pix	№ кривой на рис. 3			
		1	2	3	4
a	256×256	0.837	0.683	0.004	−0.023
	128×128	0.845	0.655	—	−0.014
b	256×256	0.167	0.29	0.337	0.766
	128×128	0.164	0.324	—	0.709
Погрешность	256×256	0.003	0.009	0.011	0.024
δM^B	128×128	0.006	0.007	—	0.015

Из таблицы видно, что значения параметра a для входного образа со сплошной заливкой рис. 2, a (кривые *3* и *4*) находятся в пределах относительной погрешности аппроксимации, т.е. ими можно пренебречь и использовать приближенную модель амплитуды фона (11).

На рис. 4 приведены зависимости оценки эффективности выделения эталона из фона (отношения средних модулей амплитуд восстановленных эталонов и фона (6) от отношения площадей эталонов r для входного образа размером 512×512 пикселей при постоянном размере опорного эталона $A(x,y)$ $S^A = 256 \times 256$.

Для других размеров опорного эталона $A(x,y)$ зависимости $K(r)$ имели аналогичный вид. Экспериментальные зависимости *3* и *4* для отклика $A^R(x,y)$, т.е. доминировавшего при записи эталона, приведены здесь в иллюстративных целях и не аппроксимировались.

На рис. 5 даны примеры откликов субголограмм H^{B2} (2.1) и H^{A2} (2.2) для значений $r = 1$ и $r = 31$ при входном поле, представленном на рис. 2, a и эталонах, представленных во входном образе на рис. 2, b (напомним, что эталоны при записи наложенных голограмм предъявляются по отдельности последовательно — каждый для своей наложенной голограммы). При выводе в формат bmp все образы (рис. 2 и 5) для удобства визуального восприятия нормировались в динамическом диапазоне $[0, 255]$.

Заключение

Таким образом, отклики субголограмм, самостоятельно формирующихся при проявлении мультиплексной голограммы Фурье, образованной наложенными голограммами, последовательно записанными в $4f$-схеме с угловым мультиплицированием опорных пучков с плоским волновым фронтом на голографической регистрирующей среде с квадратичной нелинейностью экспозиционной характеристики, описываются моделью корреляционного восстановления изображений. С этой точки зрения модель представляет собой гетеро-ассоциативную память и может быть соотнесена с концепцией фантомных изображений с учетом ряда отличий и особенностей, существенных как на концептуальном уровне, так и в плане её аппаратной реализации, в том числе цифровыми методами.

1. В основе представленной модели, как и метода фантомных изображений, лежит связность двух образов. Но в модели в отличие от классического подхода фантомных изображений взаимной коррелированности сигнального и опорного образов не требуется, поскольку восстановление сигнального образа обеспечивает автокорреляционная компонента функции корреляция входного образа и опорного эталона.

2. Связь сигнального и опорного образов возникает в результате нелинейной обработки суммы наложенных голограмм (1), физически это дифракционная решетка, возникающая при проявлении скрытого изображения мультиплексной голограммы. Поэтому реализация модели методами цифровой голографии требует введения в вычислительный алгоритм отдельного этапа, моделирующего нелинейное проявление скрытого изображения как суммы (1) всех наложенных голограмм.

3. Связь двух независимых образов формируется благодаря нелинейной обработке суммы наложенных голограмм в любой голографической схеме [23]. Но корреляционный механизм восстановления образов характерен именно для $4f$-схемы голографии Фурье, поскольку в ней корреляционная функция — не только физически реальное поле амплитуд в 1-м порядке дифракции каждой наложенной голограммы, но и входящая в аналитические описания (3.1) и (3.2) откликов квадратичных субголограмм — строится посредством двух последовательных преобразований Фурье. Мультиплексные голограммы, записанные по иным голографическим схемам (Френеля, сфокусированных изображений, безлинзовой голографии Фурье, *etc.*), также будут формировать отклики, но описываемые уже другими моделями, требующими отдельного рассмотрения.

С практической точки зрения для ряда задач, например дистанционного зондирования, криптографии, важно, что в силу корреляционного механизма восстановления оба эталона могут быть реализациями одного однородного случайного поля, т.е. иметь одинаковые дисперсии (средние модули амплитуд) и, следовательно, при передаче сообщения визуально — ни по амплитуде (интенсивности), ни по структуре — не выделяться из окружающего их фона, как то видно на рис. 2, a. Существенная особенность рассмотренной модели — инверсия в откликах субголограмм удельных весов восстановленных образов относительно эталонных — амплитуда более слабого по критерию скалярного произведения эталона в отклике усиливается, а доминировавшего — ослабляется. Этот феномен может представлять практический интерес в задачах детектирования и визуализации малоразмерных объектов на сложных структуроподобных фонах.

Конфликт интересов

Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.

Список литературы

[1] A.V. Lugt. IEEE Trans. Inf. Theory, **10**(2), 139-145 (1964). DOI: 10.1109/TIT.1964.1053650

[2] Psaltis D., Farhat N. Opt. Lett., **10**(2), 98–100 (1985). DOI: 10.1364/OL.10.000098

[3] А.В. Павлов. Опт. и спектр., **98** (6), 1033-1037 (2005). [A.V. Pavlov. Opt. Spectrosc., **98** (6), 949-953 (2005). DOI: 10.1134/1.1953992]

[4] Д.Н. Клышко. УФН, **154**(1), 133-152 (1988). DOI: 10.3367/UFNr.0154.198801e.0133 [D.N. Klyshko. Sov. Phys. Usp., **31**(1), 74–85 (1988). DOI: 10.1070/PU1988v031n01ABEH002537].

[5] Д.Н. Клышко. ЖЭТФ, **94**(6), 82-90 (1988). [D.N. Klyshko. JETP, **94**(6), 82-90 (1988). http://jetp.ras.ru/cgi-bin/dn/e_067_06_1131.pdf].

[6] D.V. Strekalov, A.V. Sergienko, D.N. Klyshko, Y.H. Shih. Phys. Rev. Lett., **74** (18), 3600 (1995). DOI: 10.1103/PhysRevLett.74.3600
[7] Д.Н. Клышко. Письма в ЖЭТФ, **6**(1), 490−492 (1967). http://jetpletters.ru/ps/820/article_12610.pdf [D.N. Klyshko. JETP Lett., **6**(1), 23−25 (1967). http://www.jetpletters.ru/ps/1655/article_25244.pdf].
[8] T.B. Pittman, Y.H. Shih, D.V. Strekalov, A.V. Sergienko. Phys. Rev. A, **52** (5), R3429(R) (1995). DOI: 10.1103/PhysRevA.52.R3429
[9] R.S. Bennik, S.J. Bently, R.W. Boyd, J.C. Howell. Phys. Rev. Lett., **92**(3), 033601 (2004). DOI: 10.1103/PhysRevLett.92.033601
[10] A. Gatti, E. Brambilla, M. Bache, L.A. Lugiato. Phys. Rev. Lett., **93**(9), 093602 (2004). DOI: 10.1103/PhysRevLett.93.093602
[11] A. Gatti, E. Brambilla, M. Bache, L.A. Lugiato Phys. Rev. A, **70**(1), 013802 (2004). DOI: 10.1103/PhysRevA.70.013802
[12] Д.А. Балакин, Д.П. Агапов, П.П. Гостев, С.А. Магницкий, Д.Н. Фроловцев, А.С. Чиркин. ЖЭТФ, **162**(6), 811-822 (2022). DOI: 10.31857/S004445102212001X [D.A. Balakin, D.P. Agapov, P.P. Gostev, S.A. Magnitskii, D.N. Frolovtsev, A.S. Chirkin. J. Experimental and Theor. Phys., **135**(6), 779−788 (2022). DOI: 10.1134/S1063776122120159].
[13] Д.П. Агапов, И.В. Беловолов, С.А. Магницкий, Д.Н. Фроловцев, А.С. Чиркин. ЖЭТФ, **164**(5), 722−730 (2023). DOI: 10.31857/S0044451023110032 [D.P. Agapov, I.V. Belovolov, S.A. Magnitskii, D.N. Frolovtsev, A.S. Chirkin J. Experimental Theoretical Phys., **137**(5), 622−629 (2023). DOI: 10.1134/S1063776123110122].
[14] А.В. Белинский, П.П. Гостев, С.А. Магницкий, А.С. Чиркин. Письма в ЖЭТФ, **117**(3-4)(2), 207-212 (2023). DOI: 10.31857/S1234567823030059 [A.V. Belinsky, P.P. Gostev, S.A. Magnitskiy, A.S. Chirkin. JETP Lett., **117**(3), 202−206 (2023). DOI: 10.1134/S0021364022602718].
[15] H. Kellock, T. Setälä, A.T. Friberg, et al. J. Opt., **16**(5), 055702 (2014). DOI: 10.1088/2040-8978/16/5/055702
[16] В.С. Шумигай, П.Е. Морева, Б.А. Наседкин, А.О. Исмагилов, А.В. Черных, А.А. Гайдаш, А.В. Козубов, А.Д. Киселев, А.Н. Цыпкин. Оптический журн., **91**(5), 25−32 (2024). DOI: 10.17586/1023-5086-2024-91-05-25-32 [V.S. Shumigai, P.E. Moreva, B.A. Nasedkin, A.O. Ismagilov, A.V. Chernykh, A.A. Gaidash, A.V. Kozubov, A.D. Kiselev, A.N. Tcypkin J. Optical Technol., **94**(5), 305-309 (2024). DOI: 10.1364/JOT.91.000305].
[17] X. Li, C. Deng, M. Chen, et al. Photonics Research. **3**(4), 153−157 (2015). DOI: 10.1364/PRJ.3.000153
[18] J. Wu, Z. Xie, Z. Liu, et al. Opt. Commun., **359**, 38−43 (2016). DOI: 10.1016/j.optcom.2015.09.039
[19] S. Yuan, L. Wang, X. Liu, X. Zhou. Opt. Lett., **45** (14), 3917−3920 (2020). DOI: 10.1364/OL.392424
[20] Z. Leihong, Z. Zhisheng, Ye Hualong, K. Yi, W. Zhaorui, W. Kaimin, Z. Dawei. Appl. Phys. B, **126**, 136 (2020). DOI: 10.1007/s00340-020-07487-4
[21] R.V. Vinu,, Z. Chen, R. Kumar Singh, Ji-X. Pu. Optica, **7**(12), 1697 (2020). DOI: 10.1364/OPTICA.409886
[22] Vinu Raveendran Pillai Vasantha Kumari, Z. Chen, R. Kumar Singh, J. Pu. In: *Holography: Recent Advantages and Applications*. Ed. by J. Rosen. (2023). DOI: 10.5772/intechopen.107011
[23] В.В. Орлов. Письма в ЖТФ, **30**(24), 77−81 (2004). https://journals.ioffe.ru/articles/viewPDF/13252 [V.V. Orlov. Technical Physics Lett., **30**(12), 1054-1056 (2004). DOI: 10.1134/1.1846856].
[24] S.A. Kozlov, V.V. Samartsev. *Fundamentals of femtosecond optics* (Elsevier, Washington, 2013), 253 P. DOI: 10.1533/9781782421290
[25] А.В. Павлов, В.В. Орлов. Квант. электрон., **49** (3), 246−52 (2019). DOI: 10.1070/qe16996 [A.V. Pavlov, V.V. Orlov. Quantum Electronics, **49**(3), 246−52 (2019). DOI: 10.1070/QEL16748].
[26] А.М. Кулешов, Е.И. Шубников, С.А. Смаева. Опт. и спектр., **60**(6), 1273-1276 (1986). [A.M. Kuleshov, E.I. Shubnikov, S.A. Smaeva. Opt. Spectrosc., **60** (6), 791 (1986)].
[27] С.А. Александрина, А.М. Кулешов. Опт. и спектр., **68**(3), 652−655 (1990). [S.A. Aleksandrina, A.M. Kuleshov. Opt. Spectrosc., **68** (3) 381 (1990)].
[28] Е.И. Шубников. Опт. и спектр., **62** (2), 450−456 (1987). [E.I. Shubnikov. Opt. Spectrosc., **62** (2), 268 (1987)].
[29] Ю.Н. Денисюк, И.Н. Давыдова. Опт. и спектр., **60** (2), 365−371 (1986). [Yu.N. Denisyuk, I.N. Davydova. Opt. Spectrosc., **60** (2), 365 (1986)].