

03

Граничные условия скольжения при движении тел в разбавленной эмульсии газовых пузырьков

© Б.В. Бошенятов

Институт прикладной механики РАН, Москва, Россия
E-mail: bosbosh@mail.ru

Поступило в Редакцию 2 декабря 2024 г.

В окончательной редакции 23 марта 2025 г.

Принято к публикации 27 марта 2025 г.

Показано, что причиной граничных условий скольжения при движении тел в вязкой и несжимаемой эмульсии газовых пузырьков является гидродинамическое взаимодействие пузырьков с поверхностью тела. Влияние гидродинамического взаимодействия на параметр скольжения ξ увеличивается с увеличением объемной концентрации пузырьков φ и с уменьшением размеров тела R по сравнению с размером пузырьков a . Получены предельные аналитические зависимости параметра скольжения для шара, движущегося в эмульсии идентичных газовых пузырьков: $\xi_{down} < \xi(a/R, \varphi) < \xi_{up}$.

Ключевые слова: граничные условия скольжения, уравнения Стокса, эмульсия газовых пузырьков, гидродинамическое взаимодействие.

DOI: 10.61011/PJTF.2025.12.60615.20208

Бурное развитие энергосберегающих микро- и нанотехнологий в последние десятилетия поставило перед фундаментальной наукой ряд новых научно-технических проблем, связанных с математическим моделированием свойств и динамики различных микродисперсных сред [1–3]. В частности, при повышенной концентрации дисперсной фазы в таких средах возникает сложная проблема учета дистанционного влияния дисперсных частиц друг на друга, проблема гидродинамического взаимодействия [4,5], которая является разновидностью известной проблемы многих тел в классической механике. Подобная задача возникает и при постановке граничных условий в механике дисперсных сред.

Известно, что в ряде случаев гетерогенные среды можно рассматривать как гомогенные [6], усредняя их физические характеристики по некоторому представительному объему Ω , размеры которого удовлетворяют условию $l \ll \Omega^{1/3} \ll L$, где l — характерный размер микроструктурной неоднородности гетерогенной среды, L — характерный размер задачи. В макроскопическом масштабе задачи объем Ω представляет собой физическую точку непрерывной гомогенной среды, для математического описания которой применимы классические дифференциальные уравнения гидродинамики. При интегрировании уравнения Навье–Стокса (второго порядка) возникает вопрос о граничных условиях. Первое граничное условие тривиально: в лабораторной системе отсчета на бесконечности скорость среды равняется нулю. Постановка второго граничного условия на границе движущееся тело–среда (или ограничивающая среду жесткая стенка–среда) до сих пор является проблемой научных исследований и дискуссий [7–9].

Что касается жидкостей и газов, то здесь достигнуто значительное понимание проблемы. Так, многочислен-

ные эксперименты показали, что на границе твердое тело–жидкость в макроскопическом масштабе с высокой точностью реализуется так называемое условие „прилипания“, когда скорость жидкости на стенке \mathbf{u}_w (здесь и далее нижний индекс w относит параметр к стенке) равна локальной скорости стенки $\mathbf{u}_w = \mathbf{v}$, где $\mathbf{v}(x_i)$ — локальная скорость тела (стенки). Однако в разреженных газах и в микромасштабных течениях жидкостей наблюдался эффект скольжения [1,10]. Навье (1823) предположил, что напряжение силы трения $\boldsymbol{\tau}_s$, которое возникает из-за скольжения жидкости, в первом приближении пропорционально скорости скольжения: $\boldsymbol{\tau}_s = \beta \mathbf{u}_w$, где β — коэффициент трения скольжения. В равновесии $\boldsymbol{\tau}_s = \boldsymbol{\tau}$, где $\boldsymbol{\tau}$ — касательное напряжение в прилегающей к стенке жидкости. Таким образом, в случае ньютоновской жидкости, когда вязкость не зависит от скорости сдвиговой деформации

$$\boldsymbol{\tau} = \eta \dot{\gamma} = \eta \left(\frac{\partial u_\tau}{\partial n} \right)_w,$$

где u_τ — проекция скорости жидкости на плоскости, перпендикулярные нормали, получается граничное условие на стенке в виде

$$\beta \mathbf{u}_w = \eta \left(\frac{\partial u_\tau}{\partial n} \right)_w, \quad (1)$$

где \mathbf{n} — вектор внешней нормали к поверхности тела, η — динамическая вязкость жидкости. Из (1) видно, что параметр $\lambda = \eta/\beta$ имеет размерность длины и называется длиной скольжения. В рамках макроскопической модели газа вычислить параметр λ нельзя, так как он определяется микрокопическими свойствами газа, поверхности и их взаимодействием. Позже Максвелл (1879), используя методы кинетической теории газов и

зеркально-диффузионную модель взаимодействия молекул газа с гладкой поверхностью твердого тела, получил аналитическое выражение для скорости скольжения u_w , которая для изотермического случая разреженного газа имеет вид [11]:

$$u_w = \alpha l_m \left(\frac{\partial u_\tau}{\partial n} \right)_w, \quad (2)$$

где $\alpha = (2 - \sigma)/\sigma$; σ — коэффициент аккомодации касательного импульса молекул газа при их отражении от твердой поверхности ($0 < \sigma < 1$), при $\sigma \rightarrow 0$ — зеркальное отражение, $\sigma = 1$ — диффузное отражение, импульс молекулы полностью передается стенке; l_m — длина свободного пробега молекул газа. Из (1) и (2) видно, что в разреженном газе величина αl_m является аналогом длины скольжения λ в жидкости. В безразмерном виде, например, при обтекании сферы с радиусом R данная аналогия имеет вид

$$\alpha Kn \leftrightarrow \xi, \quad (3)$$

где $Kn = l_m/R$ — число Кнудсена, $\xi = \lambda/R$ — безразмерная длина (параметр) скольжения.

Таким образом, Максвелл теоретически доказал, существование эффекта скольжения в разреженных газах и объяснил его механизм [11].

Вообще говоря, граничное условие „прилипания“ в газах является следствием гипотезы сплошности гомогенной среды, когда ее с высокой точностью можно рассматривать как непрерывный континуум. Когда же важный масштаб задачи (например, R) приближается по величине к размеру структурной неоднородности среды (l_m), то, как доказал Максвелл [11], этот структурный параметр среды через граничные условия скольжения (2) войдет в решение задачи. Из соотношения (3) видим, что при движении сферы в газе граничные условия „прилипания“ реализуются, когда число $Kn \ll 1$. В работе [12] приведена более точная оценка применимости условия „прилипания“ — $Kn \leq 0.001$.

Аналогично в дисперсных средах, когда масштаб задачи L (размер тела или поперечный размер канала с жесткими стенками) сравним со структурными параметрами среды (l , a и др., где a — радиус дисперсной частицы), следует ожидать, что структурные параметры дисперсной среды через граничные условия скольжения войдут в решение задачи. Действительно, когда соблюдаются перечисленные выше условия, в экспериментах надежно регистрируется граничное условие скольжения и в дисперсных средах [8,9]. Проблема в том, чтобы понять физический механизм возникновения „скольжения“ в дисперсных средах.

В работе [9] дана упрощенная феноменологическая модель, которая якобы объясняет эффект скольжения на непроницаемой твердой поверхности уменьшением эффективной вязкости среды в тонком слое ($h = 2a$) вблизи этой поверхности из-за уменьшения в указанном слое объемной концентрации частиц от заданного значения φ

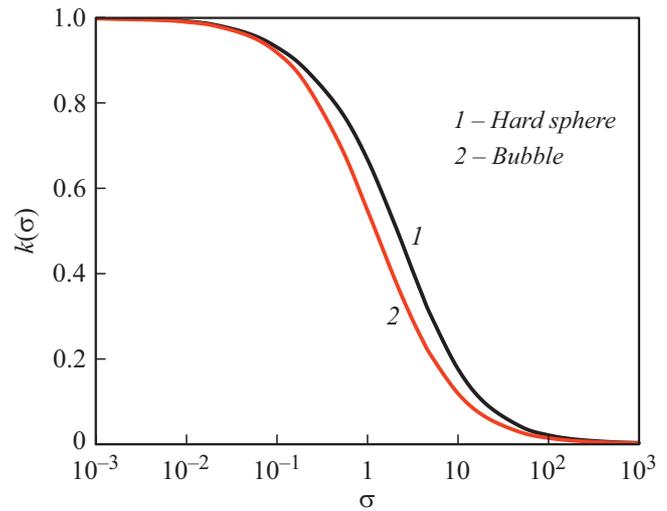


Рис. 1. Зависимость коэффициентов $k_s(hard\ sphere, \xi = 0)$ и $k_b(bubble, \xi = \infty)$ в формуле (5) от параметра $\sigma = a/R$.

до нуля. При этом на поверхности реализуется граничное условие „прилипания“, поэтому авторы называют его „кажущимся скольжением“. В других работах авторы рассматривают „истинное скольжение“ и, используя граничные условия Навье (1), исследуют степень влияния параметра скольжения ξ на динамику дисперсной среды, в том числе с учетом гидродинамического взаимодействия частиц [13,14]. В частности, в работе [13] в первом приближении по концентрации вычислен коэффициент диффузии частиц в монодисперсной суспензии сферических частиц с учетом их гидродинамического взаимодействия в виде $D = D_0[1 - \lambda(\xi)\varphi]$. Показано, что, например, при $\xi = 0$ коэффициент $\lambda = 1.56$, а при $\xi = \infty$ коэффициент $\lambda = 3.50$. В работе [14] показано, что скорость осаждения пробной частицы, имеющей радиус R , под действием силы тяжести в монодисперсной суспензии сферических частиц, имеющих радиус a , зависит не только от параметра ξ , но и от параметра $\sigma = a/R$.

Таким образом, параметр скольжения ξ играет важную роль в динамике дисперсных сред. Однако, насколько нам известно, в настоящее время отсутствует надежная математическая модель, которая способна предсказать величину относительной длины скольжения ξ для конкретной задачи в зависимости от параметров внутренней структуры дисперсной среды. В настоящей работе дано обоснование гипотезы автора, которая заключается в том, что механизм граничного условия скольжения в дисперсных средах можно полностью объяснить гидродинамическим взаимодействием дисперсных частиц с обтекаемой жесткой и гладкой поверхностью. Используя эту гипотезу, можно определить величину параметра ξ для конкретной задачи.

Рассмотрим стационарное движение жесткого сферического тела в неограниченной макроскопически однородной и изотропной среде, состоящей из гомогенной

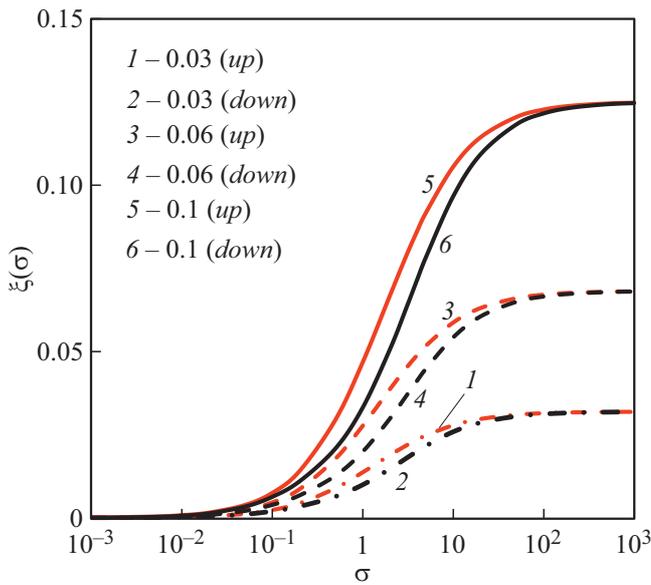


Рис. 2. Границы изменения безразмерной длины скольжения $\xi = \lambda/R$ в зависимости от параметра $\sigma = a/R$ при объемных концентрациях пузырьков $\varphi = 0.03, 0.06$ и 0.1 .

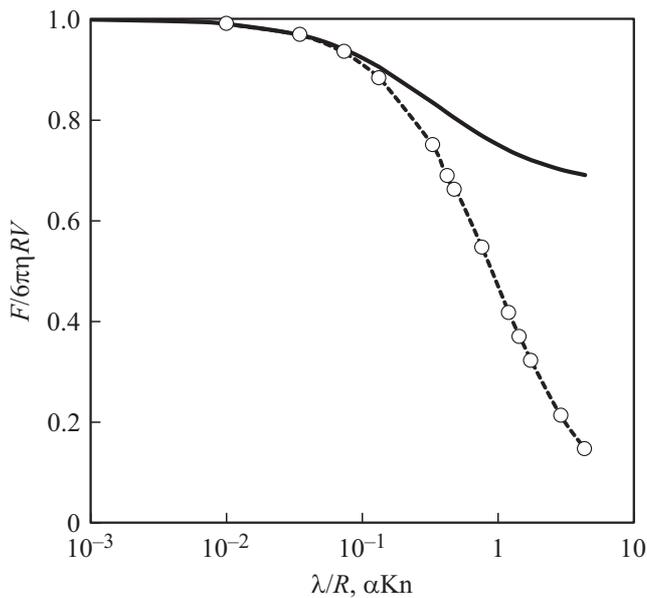


Рис. 3. Сравнение зависимости безразмерной силы сопротивления шара от параметра скольжения ξ при его движении в пузырьковой среде (сплошная линия) с экспериментальной зависимостью $F_{exp}/F_s = f(\alpha Kn)$ в разреженном воздухе (кружки).

жидкости и хаотически диспергированных в ней идентичных сферических газовых пузырьков. Размеры пузырьков и их объемная концентрация φ не изменяются, т.е. в среде отсутствуют процессы коалесценции и дробления пузырьков. Дисперсная среда, эмульсия газовых пузырьков, несжимаема и является (при $\varphi \ll 1$) ньютоновской жидкостью, имеющей динамическую вязкость

$\eta = \eta_1(1 + \varphi)$ [15]. Необходимо в приближении Стокса оценить величину параметра скольжения ξ , определяющего граничное условие Навье (1) на поверхности движущегося тела.

Задача о движении шара в гомогенной, усредненной по объему Ω , среде с граничными условиями Навье (1) имеет точное решение (Basset, 1888):

$$\mathbf{F} = -\frac{6\pi\eta_1(1 + \varphi)RV}{C}, \quad (4)$$

где \mathbf{F} — сила сопротивления, \mathbf{V} — скорость тела, $C = (1 + 3\xi)/(1 + 2\xi)$. При $\xi = 0$ формула (4) переходит в точное решение Стокса (1850), которое соответствует граничному условию „прилипания“. При $\xi \rightarrow \infty$ формула (4) совпадает с сопротивлением сферического газового пузыря. Решение (4) записано в лабораторной системе отсчета, в которой при $\mathbf{r} \rightarrow \infty$ равна нулю среднеобъемная скорость дисперсной среды $w_\infty = \varphi v_\infty + (1 - \varphi)u_\infty$, где v_∞ — скорость дисперсных частиц. В нашем случае $w_\infty \approx u_\infty$, так как $\varphi \ll 1$. Важно отметить, что формула (4) правильно учитывает влияние кривизны поверхности тела на длину скольжения [16].

В рамках макроскопической (усредненной по объему Ω) модели эмульсии газовых пузырьков параметр ξ задан и может быть определен только из эксперимента. Чтобы вычислить макроскопический параметр ξ , необходимо сначала решить задачу в полной постановке (с учетом коллективного гидродинамического взаимодействия пузырьков с поверхностью шара) на микроструктурном уровне (т.е. внутри объема Ω), а затем усреднить решение. Решение этой задачи при смешанных ($0 < \xi < \infty$) граничных условиях Навье (1) на поверхности сферического тела пока не получено. Однако, используя метод самосогласованного поля, который детально изложен в работах [17,18] и кратко в Приложении, удалось получить усредненное аналитическое решение для двух крайних случаев [4] — движение твердой сферы ($\xi = 0$) и сферического пузыря ($\xi = \infty$) — в виде

$$\mathbf{F} = -6\pi\eta_1RV[1 + k(\sigma)\varphi], \quad (5)$$

где $\sigma = a/R$, $k(\sigma) = k_s(\sigma)$ соответствует случаю $\xi = 0$, а $k(\sigma) = k_b(\sigma)$ соответствует случаю $\xi = \infty$. Коэффициенты $k_s(\sigma)$ и $k_b(\sigma)$ вычислены с точностью $O(\delta^7)$ по малому параметру $\delta = a/l$, где l — усредненное расстояние между центрами соседних дисперсных частиц. На рис. 1 представлены зависимости коэффициентов $k_s(\sigma)$ и $k_b(\sigma)$ от соотношения характерных размеров задачи и дисперсной среды.

Используя решения (5), можно оценить границы изменения параметра скольжения ξ в зависимости от σ и концентрации пузырьков: ξ_{up} (соответствует зависимости k_b) и ξ_{down} (соответствует зависимости k_s). Для этого необходимо приравнять решение Бассета

(4) к соответствующим усредненным решениям (5), в результате чего получим

$$\xi_{up} = \frac{\lambda_b}{R} = \frac{[1 - k_b(\sigma)]\varphi}{1 + [3k_b(\sigma) - 2]\varphi},$$

$$\xi_{down} = \frac{\lambda_s}{R} = \frac{[1 - k_s(\sigma)]\varphi}{1 + [3k_s(\sigma) - 2]\varphi}, \quad (6)$$

$$\frac{F_s}{F} = C = \frac{1 + \varphi}{1 + k(\sigma)\varphi} = \left|_{\varphi \ll 1} \right.$$

$$\approx 1 + [1 - k(\sigma)]\varphi + O(\varphi^2). \quad (7)$$

Из формулы (7) видно, что относительная погрешность определения силы сопротивления $\Delta = 100(F_s/F - 1) \%$ в случае пренебрежения эффектом скольжения не превышает $\Delta \leq 100\varphi \%$. На рис. 2 даны рассчитанные по формулам (6) возможные границы изменения безразмерной длины скольжения ξ в зависимости от параметра σ при различных объемных концентрациях пузырьков.

Используя аналогию (3), проведем сравнение (рис. 3) теоретической зависимости $F/F_s = f(\xi)$ для пузырьковой среды (7) с детальными измерениями [19] зависимости силы сопротивления сферических частиц в разреженном газе от числа Кнудсена $F_{exp}/F_s = f(\alpha Kn)$. Из рис. 3 видно, что с погрешностью менее 1% теоретическая зависимость совпадает с экспериментальной в диапазоне $0 < \alpha Kn < 0.1$ ($0 < \xi < 0.1$). И это неудивительно, поскольку именно в этом диапазоне чисел Кнудсена разреженный газ можно считать непрерывным континуумом и описывать его динамику уравнениями Навье–Стокса [12]. При $\xi < 0.01$ с погрешностью менее 1% можно использовать граничные условия „прилипания“, так как $F = F_s$, а в диапазоне $0.01 < \xi < 0.1$ необходимо использовать граничные условия скольжения Навье (2). Кроме того, указанное выше совпадение теории с экспериментом подтверждает применимость модели $\tau_s = \beta \mathbf{u}_w$ и граничного условия (1).

Финансирование работы

Работа выполнена при поддержке Министерства науки и высшего образования РФ.

Конфликт интересов

Автор заявляет, что у него нет конфликта интересов.

Приложение. Краткое описание метода самосогласованного поля

В приближении линейных уравнений для несущей сплошной среды решение классической задачи о движении сферического тела (радиуса R) при наличии в жидкости произвольного конечного числа N сфер (радиуса a) представляет собой суперпозицию полей возмущений от всех сфер, каждое из которых выражается в виде функционального ряда, содержащего заранее

неизвестные коэффициенты тензорного вида, которые определяются заданными граничными условиями на поверхности соответствующей сферы. Запись граничных условий на поверхности произвольной сферы приводит к системе из $N + 1$ уравнений относительно тензорных коэффициентов, относящихся ко всем сферам (включая большую). Однако данная система является незамкнутой, так как содержит заранее неизвестные скорости дисперсных частиц. Поэтому необходимо замыкающее условие согласования всех полей возмущений между собой. Такими условиями в рамках метода самосогласованного поля являются уравнения движения сфер (второй закон Ньютона), в которых силы выражены через параметры набегающего на сферу потока: для вязкой задачи [4,18] используется теорема Факсена, для невязкой [17] — теорема Бика. Метод самосогласованного поля позволяет вычислять в аналитическом виде все искомые в задаче величины в любом заданном приближении по малому параметру $\delta = a/l$.

Список литературы

- [1] В.Я. Рудяк, А.В. Минаков, *Современные проблемы микро- и нанофлюидики* (Наука, Новосибирск, 2016), с. 7–33.
- [2] Б.В. Бошнятов, *Микропузырьковые газожидкостные среды и перспективы их использования* (LAP Lambert Academic Publ., Saarbrücken, 2016), с. 149–166.
- [3] B.V. Boshenyatov, I.V. Chernyshev, *Fluid Mech. Sov. Res.*, **20** (6), 124 (1991).
- [4] О.Б. Гуськов, *Прикладная математика и механика*, **77** (6), 842 (2013). [O.B. Gus'kov, *J. Appl. Math. Mech.*, **77** (6), 603 (2013). DOI: 10.1016/j.jappmathmech.2014.03.005].
- [5] Б.В. Бошнятов, *Письма в ЖТФ*, **44** (3), 17 (2018). DOI: 10.21883/PJTf.2018.03.45574.16864 [B.V. Boshenyatov, *Tech. Phys. Lett.*, **44**, 94 (2018). DOI: 10.1134/S1063785018020049].
- [6] Б.В. Бошнятов, А.А. Глазунов, А.Н. Ищенко, Ю.Н. Карнет, *Вестн. Томск. гос. ун-та. Математика и механика*, **86**, 35 (2023). DOI: 10.17223/19988621/86/3
- [7] V. Christos, V. Gelbgras, M.V. Papalexandris, *J. Non-Newtonian Fluid Mech.*, **305**, 104830 (2022). DOI: 10.1016/j.jnnfm.2022.104830
- [8] M. Kroupa, M. Soos, J. Kosek, *Phys. Chem. Chem. Phys.*, **19** (8), 5979 (2017). DOI: 10.1039/c6cp07666a
- [9] S. Ghosh, D. van den Ende, F. Mugele, M.H.G. Duits, *Coll. Surf. A*, **491**, 50 (2016). DOI: 10.1016/j.colsurfa.2015.11.066
- [10] J.F. Collis, S. Olcum, D. Chakraborty, S.R. Manalis, J.E. Sader, *Nano Lett.*, **21**(12), 4959 (2021). DOI: 10.1021/acs.nanolett.1c00603
- [11] J.C. Maxwell, *Phil. Trans. Roy. Soc. (Part I)*, **170**, 231 (1879). DOI: 10.1098/rstl.1879.0067
- [12] M. Gad-el-Hak, *J. Fluids Eng.*, **121** (1), 5 (1999). DOI: 10.1115/1.2822013
- [13] B.U. Felderhof, *J. Phys. A*, **11** (5), 929 (1978). DOI: 10.1088/0305-4470/11/5/022
- [14] H.J. Keh, S.H. Chen, *Chem. Eng. Sci.*, **52** (11), 1789 (1997). DOI: 10.1016/s0009-2509(96)00514-3

- [15] G.I. Taylor, Proc. Roy. Soc. Lond. A., **138**, 41 (1932). DOI: 10.1098/rspa.1932.0169
- [16] R.W. Barber, Y. Sun, X.J. Gu, D.R. Emerson, Vacuum, **76** (1), 73 (2004). DOI: 10.1016/j.vacuum.2004.05.012
- [17] О.Б. Гуськов, Б.В. Бошнятов, ДАН, **438** (5) 626 (2011). [O.B. Guskov, B.V. Boshenyatov, Dokl. Phys., **56** (6), 352 (2011). DOI: 10.1134/S1028335811060073].
- [18] О.Б. Гуськов, Прикладная математика и механика, **77** (4), 557 (2013). [O.B. Guskov, J. Appl. Math. Mech., **77** (4), 401 (2013). DOI: 10.1016/j.jappmathmech.2013.11.009].
- [19] M.D. Allen, G.R. Otto, Aerosol Sci. Technol., **4** (3), 269 (1985). DOI: 10.1080/02786828508959055