

11

Противоположность двух информационных характеристик направленной связи между стохастическими системами

© Д.А. Смирнов

Саратовский национальный исследовательский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского, Саратов, Россия
Саратовский филиал Института радиотехники и электроники им. В.А. Котельникова РАН, Саратов, Россия
E-mail: smirnovda@yandex.ru

Поступило в Редакцию 23 декабря 2024 г.

В окончательной редакции 12 марта 2025 г.

Принято к публикации 27 марта 2025 г.

Исследуются два известных теоретико-информационных инструмента для оценки направленных связей (взаимных влияний) между наблюдаемыми процессами: передаточная энтропия и поток информации Лианга–Климена. Они формально схожи, имеют одинаковое название единиц измерения и действительно во многих случаях характеризуют связь схожим образом. Однако здесь в рамках формализма динамических эффектов направленной связи на эталонной стохастической системе показано, что типичны также ситуации, когда эти величины ведут себя противоположным образом при изменении управляющих параметров (одна увеличивается, а другая уменьшается), т.е. характеризуют связь в существенно различных смыслах, что важно учитывать при их практическом применении.

Ключевые слова: стохастические динамические системы, теоретико-информационные характеристики направленных связей, временные ряды.

DOI: 10.61011/PJTF.2025.12.60616.20234

В различных физических и междисциплинарных исследованиях часто возникает задача количественной оценки взаимных влияний (направленных связей) двух систем X и Y по их наблюдаемым временным рядам $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$, где x и y — векторы состояния систем $x_n = x(t_n)$, $y_n = y(t_n)$, $t_n = n\Delta t$, Δt — интервал дискретизации, $n = 1, 2, \dots, N$ — целое. Для этого используют целый ряд количественных характеристик связи — мер „силы“ влияния (см., например, обобщающие работы [1–4]). Удобными (нелинейными) инструментами являются теоретико-информационные характеристики [1,2,5–19], наиболее широко используемые из которых передаточная энтропия (ПЭ) [5] и информационный поток Лианга–Климена (ИПЛК) [6]. Идея ПЭ дала начало огромному числу работ (например, [1–4,7–9,11,15,17,19,20]), в которых предлагались различные ее модификации [1,9,17] и способы оценки по временным рядам [1,7,17], в частности физиологическим [2,12], финансовым [12] и климатическим [3,9,17], и ей даже посвящена монография [12]. На основе ИПЛК также была проведена серия исследований (например, [4,10,13,14,16,18,19] представляют их малую часть) с разработкой способов его оценки по временным рядам [10,18], введением различных нормировок [10] и обобщений [16,18], приложениями к климатическим [13,14] и другим данным.

Сразу же отмечалось формальное сходство этих двух характеристик связи [6]. При этом одинаково называются единицы их измерения: „биты“ или „наты“ [6,12]. Указывалось и на то, что для одной и той же связи ПЭ и ИПЛК могут принимать отличные друг от друга значения [6] и даже заметно отличные [4]. Но

в целом обычно ожидается, что обе характеристики имеют схожий смысл, и тогда при изменении параметров исследуемых систем они должны меняться в одну и ту же сторону (обе уменьшаться или обе увеличиваться). Однако в настоящей работе показано, что они, напротив, часто могут меняться и в противоположные стороны.

Величина ПЭ в направлении $Y \rightarrow X$ введена [5] на основе идей анализа данных для марковских процессов как взаимная информация между настоящим состоянием y и будущим x при заданном настоящем x . Величина ИПЛК $Y \rightarrow X$ введена [6,10] на основе эволюционного уравнения для энтропии распределения x , из которого путем формальных преобразований извлекалась компонента, соответствующая потоку информации от y к x . При таких разных „идейных истоках“ ПЭ и ИПЛК нашли единообразную формулировку и обоснование в рамках теоретической схемы динамических эффектов направленной связи (ДЭНС) [4,11] в стохастических динамических системах, показавшей и их различие [4].

Формализм ДЭНС определяет характеристику направленной связи $Y \rightarrow X$ как отклик будущих состояний системы X (названный X -откликом в [20]) на изменение параметров или начальных состояний системы Y (названное Y -вариацией или „ Y -шевелением“ [20]). Здесь примем, что существует стационарное распределение одновременных состояний двух систем $\rho_{XY}^{st}(x, y) = \rho_X^{st}(x)\rho_{Y|X}^{st}(y|x)$. Тогда ПЭ $T_{Y \rightarrow X}^{(t)}$ определена как разность энтропий Шеннона двух ансамблей временных реализаций при $t > 0$ (время отклика), один из которых стартует с начального распределения $\rho_{XY}^*(x, y) = \delta(x - x_0)\delta(y - y_0)$, т.е.

заданы начальные состояния обеих систем x_0 и y_0 , а другой — с $\rho_{XY}^{**}(x, y) = \delta(x - x_0)\rho_{Y|X}^{st}(y|x)$, т.е. задано лишь начальное состояние x_0 . Тогда $T_{Y \rightarrow X}^{(t)} = \left\langle H(\rho_X^{(t)}[x|\rho_{XY}^{**}]) - H(\rho_X^{(t)}[x|\rho_{XY}^*]) \right\rangle_{\rho_{XY}^{st}(x_0, y_0)}$, где

$H(p) = - \int_{-\infty}^{\infty} p(x) \ln p(x) dx$ — энтропия Шеннона

распределения p , квадратные скобки с вертикальной чертой означают, что $\rho_X^{(t)}$ — это „функционально-условное“ распределение при условии заданного начального распределения x и y [4,20], а угловые скобки означают усреднение по x_0 и y_0 с весовой функцией $\rho_{XY}^{st}(x_0, y_0)$. Оценка ПЭ по стационарному временному ряду может быть получена путем поиска в нем всех значений x_n , близких к x_0 , так что будущие $x_{n+t/\Delta t}$ дадут эмпирическую оценку распределения $\rho_X^{(t)}[x|\rho_{XY}^{**}]$, и всех пар (x_n, y_n) , близких к (x_0, y_0) , так что их будущие $x_{n+t/\Delta t}$ дадут эмпирическую оценку $\rho_X^{(t)}[x|\rho_{XY}^*]$ [1,5]. При гауссовой аппроксимации распределений $\rho_X^{(t)}$ ПЭ оценивается [15,17] как разность логарифмов дисперсии ошибки прогноза x_t с учетом и без учета y_0 [8].

ИПЛК оказался [4,19] равен

$$L_{Y \rightarrow X}^{(t)} = \left\langle - \ln \rho_X^{(t)}[x|\rho_{XY}^{**}] + \ln \rho_X^{(t)}[x|\rho_{XY}^*] \right\rangle_{\rho_X^{(t)}[x|\rho_{XY}^{st}(y_0)]},$$

где $\tilde{\rho}_{XY} = \rho_{X|Y}^{st}(x|y)\delta(y - y_0)$. Это усредненная

разность величин вида $-\ln \rho_X^{(t)}(x)$ для двух ансамблей, стартующих с $\rho_{XY}^{st}(x, y) = \rho_X^{st}(x)\delta(y - y_0)$ и $\rho_{XY}^{**}(x, y) = \rho_X^{st}(x)\rho_{Y|X}^{st}(y|x)$, но усредненная с такой

весовой функцией, что $L_{Y \rightarrow X}^{(t)}$ не приводится к разности энтропий Шеннона. В отличие от ПЭ здесь задано начальное распределение $\rho_X^{st}(x)$, а не состояние x_0 . Точнее, для систем с непрерывным временем ИПЛК —

это производная по времени отклика $l_{Y \rightarrow X} = \left. \frac{dL_{Y \rightarrow X}^{(t)}}{dt} \right|_{t=0}$.

Формулы для его оценки по временным рядам даны в [10].

Далее исследованы зависимости ПЭ и ИПЛК от параметров для эталонной системы, для которой имеются их аналитические выражения, так что возможно точное аналитическое и численное исследование без статистического оценивания. Это два линейных релаксатора под действием белого шума — простая и потому очень широко используемая стохастическая модель с непрерывным временем (двумерный процесс Орнштейна–Уленбека):

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -\alpha_X x + k_{XY} y + \xi_X(t), \\ \dot{y} &= -\alpha_Y y + k_{YX} x + \xi_Y(t), \end{aligned} \quad (1)$$

где α_X, α_Y — коэффициенты релаксации („скорости“ систем), k_{XY}, k_{YX} — коэффициенты связи, ξ_X, ξ_Y — взаимно некоррелированные гауссовы белые шумы с нулевым средним и автоковариационными функциями $\langle \xi_X(t)\xi_X(t') \rangle = \Gamma_{XX}\delta(t - t')$ и $\langle \xi_Y(t)\xi_Y(t') \rangle = \Gamma_{YY}\delta(t - t')$.

Дифференциальные величины $\tau_{Y \rightarrow X} = \left. \frac{dT_{Y \rightarrow X}^{(t)}}{dt} \right|_{t=0}$ и $l_{Y \rightarrow X}$,

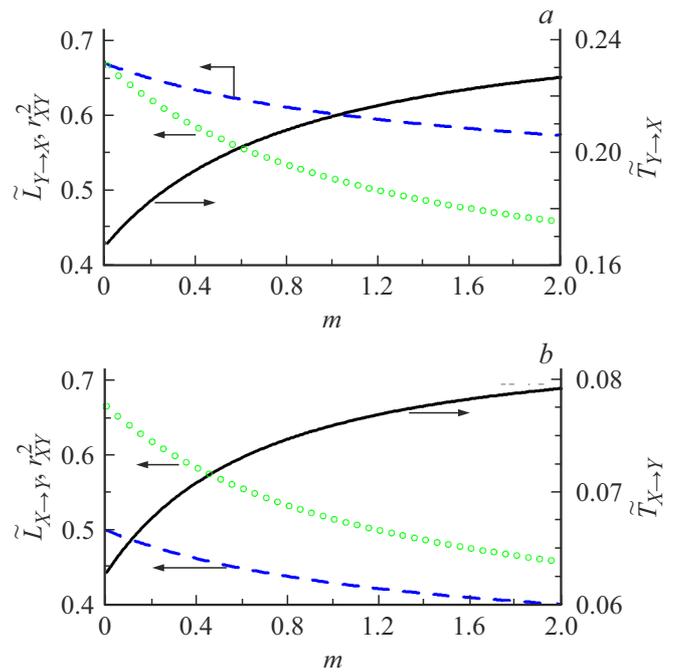


Рис. 1. Характеристики направленной связи в зависимости от относительной скорости m системы Y для системы (1) при $\beta_{XY} = 1, \beta_{YX} = 1/2$. *a* — в направлении $Y \rightarrow X$, *b* — в направлении $X \rightarrow Y$. Сплошные линии — безразмерная дифференциальная ПЭ $\tilde{T}_{Y \rightarrow X}$, штриховые линии — безразмерный ИПЛК $\tilde{L}_{Y \rightarrow X}$, кружки — квадрат коэффициента корреляции r_{XY} .

которые определяют роль связи на малых интервалах t , были найдены аналитически для системы (1) в [4,10,15]. Здесь их выражения представлены в удобной для исследования безразмерной форме как

$$\begin{aligned} \tilde{T}_{Y \rightarrow X} &\equiv \tau_{Y \rightarrow X} / \alpha_X = \beta_{XY}^2 (\sigma_Y^2 / \sigma_{Y,0}^2) (1 - r_{XY}^2) / 4, \\ \tilde{L}_{Y \rightarrow X} &\equiv l_{Y \rightarrow X} / \alpha_X = \beta_{XY} r_{XY} (\sigma_Y / \sigma_{Y,0}) / (\sigma_X / \sigma_{X,0}), \end{aligned} \quad (2)$$

где $\sigma_{X,0}^2, \sigma_{Y,0}^2$ — дисперсии x и y при нулевой связи, σ_X^2, σ_Y^2 — их дисперсии при данной связи с коэффициентами k_{XY}, k_{YX} , $\beta_{XY}^2 = k_{XY}^2 \sigma_{Y,0}^2 / (\alpha_X^2 \sigma_{X,0}^2)$ — безразмерный параметр связи $Y \rightarrow X$, который представляет собой отношение двух слагаемых в правой части первого уравнения системы (1) по их дисперсиям в режиме „разомкнутой цепи“, r_{XY} — коэффициент корреляции x и y для распределения $\rho_{XY}^{st}(x, y)$. Все аналогично для обратного направления связи $X \rightarrow Y$ с взаимной заменой индексов X и Y . Величины $r_{XY}, \sigma_X^2, \sigma_Y^2$ могут быть найдены в явном виде как стационарное решение уравнений эволюции вторых моментов распределения $\rho_{XY}(x, y)$ [11]:

$$\begin{aligned} \sigma_{X,0}^2 &= \Gamma_{XX} / (2\alpha_X), \\ \sigma_X^2 &= \sigma_{X,0}^2 \left(1 + \frac{\alpha_X \beta_{XY}^2 + \alpha_Y \beta_{XY} \beta_{YX}}{(\alpha_X + \alpha_Y)(1 - \beta_{XY} \beta_{YX})} \right), \end{aligned}$$

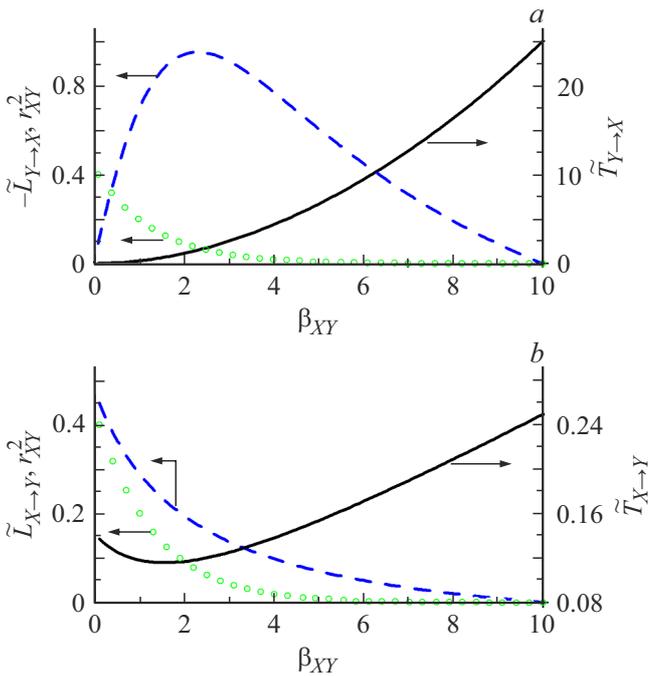


Рис. 2. Характеристики связи для системы (1) в зависимости от безразмерного параметра связи $Y \rightarrow X$ при $\beta_{YX} = -1$, $m = 10$. *a* — в направлении $Y \rightarrow X$, *b* — в направлении $X \rightarrow Y$. Сплошные линии — безразмерная дифференциальная ПЭ $\tilde{T}_{Y \rightarrow X}$, штриховые линии — безразмерный ИПЛК $\tilde{L}_{Y \rightarrow X}$ (на части *a* взят с обратным знаком), кружки — квадрат коэффициента корреляции r_{XY} .

$$r_{XY} = \frac{\sigma_{X,0}\sigma_{Y,0}(\alpha_X\beta_{XY} + \alpha_Y\beta_{YX})}{\sigma_X\sigma_Y(\alpha_X + \alpha_Y)(1 - \beta_{XY}\beta_{YX})}$$

[15], так что

$$\beta_{XY}^2 = \frac{k_{XY}^2\Gamma_{YY}}{\alpha_X\alpha_Y\Gamma_{XX}},$$

$$\beta_{YX}^2 = \frac{k_{YX}^2\Gamma_{XX}}{\alpha_X\alpha_Y\Gamma_{YY}}.$$

Единицы измерения $\tilde{T}_{Y \rightarrow X}$ и $\tilde{L}_{Y \rightarrow X}$ зависят от того, какое основание логарифма используется в определениях: „наты“ (натуральные единицы), если это натуральный логарифм (как в настоящей работе), или биты, если это логарифм по основанию 2 [6,12].

Безразмерные дифференциальные характеристики $\tilde{T}_{Y \rightarrow X}$ и $\tilde{L}_{Y \rightarrow X}$ (2) рассчитывались в настоящей работе в широкой области пространства безразмерных параметров системы (1). Во многих случаях они оказываются аналогичными друг другу. В частности, при однонаправленной связи $Y \rightarrow X$ обе растут квадратично по k_{XY} при малых k_{XY} . При двунаправленной связи с коэффициентами одного знака они также обе растут с ростом этих коэффициентов, хотя в общем случае и не пропорциональны друг другу. Это сходство вполне ожидаемо (см. также [4,15]), но далее выявлены ситуации их существенного различия.

Зафиксируем значения безразмерных параметров связи $\beta_{XY} = 1$ и $\beta_{YX} = 1/2$. Поскольку их отношение $\beta_{XY}/\beta_{YX} > 1$, в этом смысле связь асимметрична, а система Y является „ведущей“, так как параметр связи в направлении $Y \rightarrow X$ больше. При постоянных β_{XY} и β_{YX} будем менять безразмерный параметр $m = \alpha_Y/\alpha_X$ — относительную скорость релаксации системы Y . Например, зафиксируем интенсивности шумов Γ_{XX} , Γ_{YY} и скорость α_X , тогда m изменяем путем изменения α_Y ($m \propto \alpha_Y$), причем изменяем также $k_{XY}^2 \propto \alpha_Y$ и $k_{YX}^2 \propto \alpha_Y$. Отметим, что зависимости характеристик (2) от m остаются одними и теми же, если менять все шесть размерных параметров и иначе, соблюдая условие постоянства β_{XY} и β_{YX} . При увеличении m от $m < 1$ до $m > 1$ имеет место переход от ситуации, когда ведущая система Y более медленная из двух, к такой, когда она более быстрая. При этом в обоих направлениях ($Y \rightarrow X$ и $X \rightarrow Y$) безразмерная дифференциальная ПЭ растет (сплошные линии на рис. 1), в то время как ИПЛК уменьшается (штриховые линии на рис. 1). Так, при увеличении m от 0.1 до 2 величина ПЭ здесь растет на 20–30%, а ИПЛК снижается на 15–20% (рис. 1, *a, b*). При других значениях β_{XY} и β_{YX} вывод остается тем же, меняется лишь диапазон значений ПЭ и ИПЛК. Обнаруженное явление типично в пространстве безразмерных параметров системы (1). В частности, при заданных β_{XY} , β_{YX} остается один свободный безразмерный параметр m , и как раз при его изменении ПЭ и ИПЛК изменяются в противоположные стороны.

Интересно отметить, что ПЭ и ИПЛК могут меняться в противоположные стороны даже при изменении параметра связи β_{XY} или β_{YX} (хотя ожидается, казалось бы, рост обеих характеристик с ростом коэффициента связи), что имеет место при изменении положительного β_{XY} при фиксированных любом m и отрицательном β_{YX} . Эта ситуация показана на рис. 2 для $m = 10$ и $\beta_{YX} = -1$: при увеличении β_{XY} от 2 до 10 величина ПЭ в направлении $Y \rightarrow X$, для которого отношение $|\beta_{XY}/\beta_{YX}| < m$, т.е. связь $Y \rightarrow X$ является „относительно уступающей“ согласно [15], растет от 1 до 25 (все указано в „натах“), а ИПЛК отрицателен и уменьшается по модулю от 1 до 0 (рис. 2, *a*); при этом величина ПЭ в обратном направлении растет от 0.12 до 0.24, а ИПЛК уменьшается от 0.2 до 0 (рис. 2, *b*). Эти изменения очень значительные (в разы и даже на порядки величин). При других фиксированных значениях m и β_{YX} результаты качественно те же с изменением диапазона значений ПЭ и ИПЛК.

В обеих выделенных ситуациях противоположный характер изменений ПЭ и ИПЛК отчасти объясняется сильным изменением коэффициента корреляции r_{XY} (кружки на рис. 1, 2), с ростом модуля которого $\tilde{T}_{Y \rightarrow X}$ убывает, а $|\tilde{L}_{Y \rightarrow X}|$ растет, как это видно из выражений (2). При этом дисперсии x и y меняются не столь быстро или не в ту сторону, чтобы изменить направления изменений ПЭ и ИПЛК, происходящие за счет r_{XY} .

При оценивании ПЭ и ИПЛК по достаточно длинным временным рядам флуктуации оценок малы, так что они близки к рассмотренным теоретическим значениям ПЭ и ИПЛК. Для более коротких рядов нужно учитывать флуктуации оценок и оценивать доверительные интервалы (выдвигать „нулевую гипотезу“), что заслуживает отдельного исследования. Но факт уменьшения или роста значений ПЭ и ИПЛК при изменении параметров должен сохраняться в целом и для их оценок по коротким рядам, если эти оценки еще достаточно точны, тогда вывод о возможной противоположности ПЭ и ИПЛК относится даже к таким оценкам.

Таким образом, в работе показано, что две широко используемые информационные характеристики направленной связи между стохастическими системами (ПЭ и ИПЛК) могут изменяться в противоположные стороны при изменении параметров этих систем. Такие ситуации описаны в явном виде, и показано, что они типичны в пространстве параметров, а не вырождены. Поскольку они имеют место для простой стохастической системы (1), такие ситуации тем более возможны для более сложных, в том числе нелинейных, систем. Тогда обнаруженное явление противоположности этих двух характеристик связи должно быть типичным и в практике анализа временных рядов, так что его следует принимать во внимание при интерпретации результатов оценки связей и выводах о том, растет ли связь при изменении каких-либо условий и в каком смысле (согласно какой характеристике) она растет. С теоретической точки зрения полученные результаты показывают, что две рассматриваемые информационные характеристики связи и их единицы, будь то наты или биты, могут иметь совершенно отличный друг от друга смысл. Поэтому название „поток информации“, которое им обеим [6,12] дают из-за используемого в их определениях теоретико-информационного формализма, само по себе еще не обеспечивает их корректной однозначной интерпретации. Это в новом аспекте показывает отмечавшуюся ранее [4,11,20] нетривиальность задачи „измерения силы“ направленных связей.

Финансирование работы

Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда (грант № 23-12-00241).

Конфликт интересов

Автор заявляет, что у него нет конфликта интересов.

Список литературы

- [1] K. Hlaváčková-Schindler, M. Paluš, M. Vejmelka, J. Bhattacharya, *Phys. Rep.*, **441** (1), 1 (2007). DOI: 10.1016/j.physrep.2006.12.004
- [2] M. Wibral, R. Vicente, J.T. Lizier, *Directed information measures in neuroscience* (Springer-Verlag, Berlin–Heidelberg, 2014). DOI: 10.1007/978-3-642-54474-3
- [3] J. Runge, S. Bathiany, E. Bollt, G. Camps-Valls, D. Coumou, E. Deyle, C. Glymour, M. Kretschmer, M.D. Mahecha, J. Muñoz-Marí, E.H. van Nes, J. Peters, R. Quax, M. Reichstein, M. Scheffer, B. Schölkopf, P. Spirtes, G. Sugihara, J. Sun, K. Zhang, J. Zscheischler, *Nat. Commun.*, **10**, 2553 (2019). DOI: 10.1038/s41467-019-10105-3
- [4] D.A. Smirnov, *Phys. Rev. E*, **105** (3), 034209 (2022). DOI: 10.1103/PhysRevE.105.034209
- [5] T. Schreiber, *Phys. Rev. Lett.*, **85** (2), 461 (2000). DOI: 10.1103/PhysRevLett.85.461
- [6] X.S. Liang, R. Kleeman, *Phys. Rev. Lett.*, **95** (24), 244101 (2005). DOI: 10.1103/PhysRevLett.95.244101
- [7] M. Vejmelka, M. Palus, *Phys. Rev. E*, **77** (2), 026214 (2008). DOI: 10.1103/PhysRevE.77.026214
- [8] L. Barnett, A.B. Barrett, A.K. Set, *Phys. Rev. Lett.*, **103** (23), 238701 (2009). DOI: 10.1103/PhysRevLett.103.238701
- [9] J. Runge, J. Heitzig, V. Petoukhov, J. Kurths, *Phys. Rev. Lett.*, **108** (25), 258701 (2012). DOI: 10.1103/PhysRevLett.108.258701
- [10] X.S. Liang, *Phys. Rev. E*, **90** (5), 052150 (2014). DOI: 10.1103/PhysRevE.90.052150
- [11] D.A. Smirnov, *Phys. Rev. E*, **90** (6), 062921 (2014). DOI: 10.1103/PhysRevE.90.062921
- [12] T. Bossomaier, L. Barnett, M. Harre, J.T. Lizier, *An introduction to transfer entropy. Information flow in complex systems* (Springer, Cham, 2016). DOI: 10.1007/978-3-319-43222-9
- [13] A. Stips, D. Macias, C. Coughlan, E. Garcia-Gorriç, X.S. Liang, *Sci. Rep.*, **6**, 21691 (2016). DOI: 10.1038/srep21691
- [14] D.F.T. Hagan, G. Wang, X.S. Liang, H.A.J. Dolman, *J. Climate*, **32** (21), 7521 (2019). DOI: 10.1175/JCLI-D-18-0881.1
- [15] D.A. Smirnov, *Phys. Rev. E*, **102** (6), 062139 (2020). DOI: 10.1103/PhysRevE.102.062139
- [16] X.S. Liang, *Entropy*, **23** (6), 679 (2021). DOI: 10.3390/e23060679
- [17] R. Silini, C. Masoller, *Sci. Rep.*, **11**, 8423 (2021). DOI: 10.1038/s41598-021-87818-3
- [18] C. Pires, D. Docquier, S. Vannitsem, *Physica D*, **458**, 133988 (2024). DOI: 10.1016/j.physd.2023.133988
- [19] D.A. Smirnov, *Chaos*, **34** (3), 033130 (2024). DOI: 10.1063/5.0189544
- [20] Д.А. Смирнов, *Изв. вузов. Радиофизика*, **67** (2), 203 (2024). DOI: 10.52452/00213462_2024_67_02_203 [D.A. Smirnov, *Radiophys. Quantum Electron.*, **67**, 181 (2024). DOI: 10.1007/s11141-025-10364-9].