

01
Скин-эффект в тонкой цилиндрической проволоке из металла

© Э.В. Завитаев¹, О.В. Русаков², А.А. Юшканов³

¹ Московский государственный университет леса,
 Мытищи, Московская обл., Россия

² Московский государственный областной гуманитарный институт,
 Орехово-Зуево, Московская обл., Россия

³ Московский государственный областной университет,
 Москва, Россия

E-mail: EduardZavitaev@yandex.ru

(Поступила в Редакцию 12 октября 2011 г.)

Впервые решена задача о распределении электрического поля и электрического тока внутри тонкой цилиндрической проволоки из металла при наличии скин-эффекта с учетом зеркально-диффузного характера отражения электронов от внутренней поверхности проволоки. Рассмотрены предельные случаи и проведено обсуждение полученных результатов.

1. Введение

Электрические свойства проводников, характерный линейный размер которых сравним с длиной свободного пробега электронов, существенно отличаются от свойств „массивных“ проводников [1,2].

В работе [3] рассчитана высокочастотная электрическая проводимость тонкой цилиндрической проволоки (отношение ее радиуса к длине много меньше единицы). В работе [4] решена задача о влиянии на электрическую проводимость цилиндрической проволоки продольного магнитного поля. В упомянутых работах применялся подход, основанный на решении кинетического уравнения Больцмана для электронов в металле при произвольном характере их отражения от внутренней поверхности проволоки.

Исследование проявления скин-эффекта в различных условиях до сих пор остается актуальной задачей, что подтверждается широким спектром научных публикаций, например [5–7].

В научной литературе достаточно часто встречается решение классической задачи макроскопической электродинамики о скин-эффекте в цилиндрической проволоке (см., например, [8–10]). Однако такое решение становится некорректным для проволок, характерный линейный размер которых сравним с длиной свободного пробега электронов в них, так как в этом случае необходимо учитывать рассеяние электронов не только в объеме металлического объекта, но и на его поверхности.

Заметим, что задачи о проводимости тонких металлических проволок становятся особенно актуальными в связи с бурным развитием микроэлектроники, где такие проволоки широко применяются.

В настоящей работе моментным методом рассчитана функция распределения, описывающая линейный отклик электронов в однородной цилиндрической проволоке на переменное электрическое поле, ориентированное вдоль оси симметрии проволоки. По найденной функ-

ции распределения удастся рассчитать зависимость напряженности электрического поля внутри проволоки, плотности тока и полного тока через поперечное сечение проволоки от „скин-параметра“ (отношения радиуса проволоки к глубине скин-слоя), от отношения радиуса проволоки к длине свободного пробега электронов и частоты, а также от коэффициента зеркальности металла.

2. Постановка задачи

Рассматривается цилиндрическая проволока из немагнитного металла радиуса R и длины L (считаем, что $L \gg R$), к концам которой приложено переменное электрическое напряжение частоты ω . Принимается, что направление электрического поля совпадает с осью симметрии проволоки.

Однородное периодическое по времени электрическое поле

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 \exp(-i\omega t) \tag{1}$$

действует на электроны проводимости (они рассматриваются как вырожденный Ферми-газ) внутри проволоки и вызывает отклонение f_1 их функции распределения f от равновесной фермиевской f_0

$$f(\mathbf{r}, \mathbf{v}) = f_0(\varepsilon) + f_1(\mathbf{r}, \mathbf{v}), \quad \varepsilon = \frac{m\mathbf{v}^2}{2},$$

где \mathbf{r} — радиус-вектор (начало системы координат выбирается на оси симметрии проволоки), \mathbf{v} — скорость электрона, m — эффективная масса электрона в металле.

Это приводит к возникновению высокочастотного тока плотности

$$\mathbf{j} = e \int \mathbf{v} f \frac{2d^3(m\mathbf{v})}{h^3} = 2e \left(\frac{m}{h}\right)^3 \int \mathbf{v} f_1 d^3v, \tag{2}$$

где e — заряд электрона, h — постоянная Планка.

В формуле (2) используется стандартная нормировка функции распределения f , при которой плотность

электронных состояний равна $2/h^3$. Для равновесной функции $f_0(\varepsilon)$ далее используется ступенчатая аппроксимация [11]

$$f_0(\varepsilon) = \theta(\varepsilon_F - \varepsilon) = \begin{cases} 1, & 0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_F, \\ 0, & \varepsilon_F < \varepsilon, \end{cases}$$

где $\varepsilon_F = mv_F^2/2$ — энергия Ферми (v_F — скорость Ферми). Предполагается, что Ферми-поверхность имеет сферическую форму.

Задача сводится к отысканию отклонения f_1 функции распределения электронов от равновесной f_0 , возникающего под действием высокочастотного поля (1). В линейном приближении по электрическому полю функция f_1 удовлетворяет кинетическому уравнению [11–13]

$$-i\omega f_1 + \mathbf{v} \frac{\partial f_1}{\partial \mathbf{r}} + e(\mathbf{vE}) \frac{\partial f_0}{\partial \varepsilon} = -\frac{f_1}{\tau}, \quad (3)$$

где предполагается стационарная зависимость от времени ($f_1 \sim \exp(-i\omega t)$), а интеграл столкновений взят в приближении времени релаксации электронов τ .

3. Функция распределения

Преобразуем кинетическое уравнение (3), используя функцию

$$f_1(\mathbf{r}, \mathbf{v}) = g(\mathbf{r}, \mathbf{v}) \delta(\varepsilon - \varepsilon_F) \exp(-i\omega t); \quad (4)$$

в результате получим новое уравнение

$$-i\omega g + \mathbf{v} \frac{\partial g}{\partial \mathbf{r}} - e(\mathbf{vE}) = -\frac{g}{\tau}.$$

Переходя в последнем уравнении к цилиндрическим координатам [14] и выбирая направление полярной оси Z так, чтобы она совпадала с осью симметрии проволоки, имеем

$$\begin{aligned} -i\omega g + v_r \frac{\partial g}{\partial r} + \frac{v_\varphi}{r} \frac{\partial g}{\partial \varphi} + v_z \frac{\partial g}{\partial z} \\ + \frac{v_\varphi^2}{r} \frac{\partial g}{\partial v_r} - \frac{v_r v_\varphi}{r} \frac{\partial g}{\partial v_\varphi} - ev_z E_z = -\frac{g}{\tau}. \end{aligned} \quad (5)$$

Решение уравнения (5) проведем с помощью моментного метода [14], согласно которому функция g в приближении двух моментов представляется в виде

$$g = a_1(r)v_z + a_2(r)v_z v_r. \quad (6)$$

Найдем соответствующие частные производные от выражения (6) и подставим их в уравнение (5). В результате получим

$$\begin{aligned} -i\omega(a_1(r)v_z + a_2(r)v_z v_r) + v_r v_z \frac{\partial a_1(r)}{\partial r} + v_r^2 v_z \frac{\partial a_2(r)}{\partial r} \\ + \frac{\partial a_\varphi^2 v_z}{r} a_2(r) - ev_z E_0 = -\frac{1}{\tau}(a_1(r)v_z + a_2(r)v_z v_r). \end{aligned} \quad (7)$$

Умножая выражение (7) на v_z , с учетом того, что комплексная частота рассеяния электронов $\nu = 1/\tau - i\omega$, имеем

$$\begin{aligned} \nu(a_1(r)v_z + a_2(r)v_z v_r)v_z + v_r v_z^2 \frac{\partial a_1(r)}{\partial r} \\ + v_r^2 v_z^2 \frac{\partial a_2(r)}{\partial r} + \frac{v_\varphi^2 v_z^2}{r} a_2(r) - ev_z^2 E_z = 0. \end{aligned}$$

Проинтегрируем полученное равенство по пространству скоростей:

$$\begin{aligned} (\nu a_1(r) - eE_z) \int v_z^2 d^3v + \left(\nu a_2(r) + \frac{\partial a_1(r)}{\partial r} \right) \int v_z^2 v_r d^3v \\ + \frac{\partial a_2(r)}{\partial r} \int v_r^2 v_z^2 d^3v + \frac{a_2(r)}{r} \int v_\varphi^2 v_z^2 d^3v = 0. \end{aligned}$$

Далее вычислив значения всех четырех интегралов (учитывая связи $v_r = v_\perp \cos \varphi$, $v_\varphi = v_\perp \sin \varphi$, $v_\perp^2 + v_z^2 = v_F^2$) и подставив их в последнее равенство, приходим к уравнению

$$\nu a_1(r) - eE_z + \frac{1}{7} v_F^2 \frac{\partial a_2(r)}{\partial r} + \frac{1}{7} v_F^2 \frac{a_2(r)}{r} = 0. \quad (8)$$

Еще одно уравнение для нахождения моментных коэффициентов $a_1(r)$ и $a_2(r)$ найдем, умножив (7) на $v_z v_r$ и интегрируя по пространству скоростей,

$$\frac{\partial a_1(r)}{\partial r} = -\nu a_2(r). \quad (9)$$

Объединим уравнения (8) и (9) в систему, разрешив ее относительно $a_1(r)$

$$\frac{\partial^2 a_1(r)}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial a_1(r)}{\partial r} - \frac{7\nu^2}{v_F^2} a_1(r) = -\frac{7\nu e E_z}{v_F^2}.$$

Перейдем в полученном уравнении к новой безразмерной переменной $\xi = r/R$, также учтем, что $z = \frac{R}{v_F} v = \frac{R}{v_F} \left(\frac{1}{\tau} - i\omega \right) = x - iy$, тогда

$$\frac{\partial^2 a_1}{\partial \xi^2} + \frac{1}{\xi} \frac{\partial a_1}{\partial \xi} - 7z^2 a_1 = -\frac{7zeE_z R}{v_F}. \quad (10)$$

Однозначное решение поставленной задачи возможно при выборе граничного условия для неизвестной функции $f_1(\mathbf{r}, \mathbf{v})$ на цилиндрической поверхности металлической проволоки. В качестве такового принимаем условия зеркально-диффузного отражения электронов от поверхности ($r = R$)

$$\int_{v_r < 0} v_z f_1(v_r) d^3v = q \int_{v_r < 0} v_z f_1(-v_r) d^3v, \quad (11)$$

где v_r и v_z — соответственно компоненты скорости электрона в плоскости, перпендикулярной к оси симметрии проволоки, и вдоль оси симметрии проволоки,

q — коэффициент зеркальности (вероятность зеркального отражения): $0 \leq q \leq 1$.

При $q = 0$ получаем условие диффузного отражения электронов проводимости от внутренней поверхности металлической проволоки, а при $q = 1$ — условие чисто зеркального отражения. При значениях $q \neq 0$ и $q \neq 1$ получаем различные варианты смешанного зеркально-диффузного отражения электронов.

Кроме того, для решения поставленной задачи необходимо использовать уравнение для напряженности электрического поля внутри проволоки. Такое уравнение получаем из системы уравнений Максвелла без учета тока смещения, который пренебрежимо мал по сравнению с током проводимости,

$$\frac{1}{\xi} \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\xi \frac{\partial E(\xi)}{\partial \xi} \right) = -i\omega\mu_0 R^2 j_z, \quad (12)$$

где оператор Лапласа записан в цилиндрических координатах (индекс z у напряженности мы опустили).

Для уравнения (12) будем использовать следующее граничное условие:

$$E|_{\xi=1} = E_0. \quad (13)$$

Функция (4) позволяет определить плотность тока (2) внутри проволоки. При вычислении интеграла (2) удобно перейти к цилиндрическим координатам как в пространстве координат, так и в пространстве скоростей. Вектор \mathbf{E} параллелен оси Z , ось симметрии проволоки совпадает с осью Z .

Поле (1) в цилиндрических координатах имеет лишь z -компоненту, соответственно и плотность тока (2) обладает лишь z -компонентой (линии тока являются прямыми, параллельными оси Z).

В силу симметрии задачи интегрирование по всему диапазону скоростей v_z заменяется интегрированием по положительному диапазону, и результат удваивается, поэтому, подставляя пределы интегрирования и воспользовавшись свойствами δ -функции [3,4], приходим к выражению

$$j_z = \frac{4em^2}{h^3} \exp(-i\omega t) \int_0^{v_F} \int_0^{2\pi} \int_0^\infty \frac{v_z^2 \delta(v_z - \sqrt{v_F^2 - v_\perp^2})}{\sqrt{v_F^2 - v_\perp^2}} \times [a_1(\xi) + a_2(\xi)v_\perp \cos \varphi] v_\perp dv_\perp d\varphi dv_z = \frac{8\pi em^2 v_F^3}{3h^3} a_1(\xi) \exp(-i\omega t).$$

Окончательно получим

$$j_z = \frac{ne}{m} \exp(-i\omega t) a_1(\xi). \quad (14)$$

Здесь мы учли, что концентрация электронов n в проволоке определяется по стандартной формуле, согласно которой

$$n = 2 \frac{m^3}{h^3} \int f_0 d^3 v = 2 \frac{m^3}{h^3} \frac{4\pi v_F^3}{3}.$$

Поэтому уравнение (12) для амплитуды напряженности электрического поля внутри проволоки можно записать в виде

$$\frac{1}{\xi} \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\xi \frac{\partial E(\xi)}{\partial \xi} \right) = -i\omega\mu_0 R^2 \frac{ne}{m} a_1(\xi)$$

или

$$\frac{\partial^2 E}{\partial \xi^2} + \frac{1}{\xi} \frac{\partial E}{\partial \xi} = A a_1(\xi), \quad (15)$$

где $A = -i\omega\mu_0 R^2 \frac{ne}{m} = -i \frac{2}{\delta^2} \frac{R^2}{e\tau} = -i \frac{2\psi^2}{e\tau}$. Здесь учтено, что глубина скин-слоя δ связана с объемной статической проводимостью металла $\sigma_0 = \frac{ne^2\tau}{m}$ соотношением $\frac{1}{\delta^2} = \frac{1}{2} \sigma_0 \omega \mu_0$, а „скин-параметр“ $\psi = \frac{R}{\delta}$.

Объединим в систему уравнения (10) и (15)

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 a_1}{\partial \xi^2} + \frac{1}{\xi} \frac{\partial a_1}{\partial \xi} - 7z^2 a_1 = -\frac{7zeR}{v_F} E(\xi), \\ \frac{\partial^2 E}{\partial \xi^2} + \frac{1}{\xi} \frac{\partial E}{\partial \xi} = A a_1(\xi). \end{cases}$$

Обозначив константы $C = 7z^2$ и $B = -\frac{7zeR}{v_F}$, получим

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 a_1}{\partial \xi^2} + \frac{1}{\xi} \frac{\partial a_1}{\partial \xi} - C a_1 = B E(\xi), \\ \frac{\partial^2 E}{\partial \xi^2} + \frac{1}{\xi} \frac{\partial E}{\partial \xi} = A a_1(\xi). \end{cases} \quad (16)$$

Будем искать решение системы (16) в виде

$$E = k a_1, \quad (17)$$

где k — некоторая комплексная величина, не зависящая от ξ .

Тогда система (16) примет следующий вид:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 E}{\partial \xi^2} + \frac{1}{\xi} \frac{\partial E}{\partial \xi} - (Bk + C)E = 0, \\ \frac{\partial^2 E}{\partial \xi^2} + \frac{1}{\xi} \frac{\partial E}{\partial \xi} = \frac{A}{k} E(\xi). \end{cases}$$

Отсюда

$$\frac{A}{k} E(\xi) - (Bk + C)E(\xi) = 0 \Rightarrow \frac{A}{k} = Bk + C \quad (18)$$

или

$$Bk^2 + Ck - A = 0.$$

Тогда

$$k_{1,2} = \frac{-C \pm \sqrt{C^2 + 4BA}}{2B}. \quad (19)$$

Подставляя (19) в первое уравнение системы (16), получим

$$\frac{\partial^2 E}{\partial \xi^2} + \frac{1}{\xi} \frac{\partial E}{\partial \xi} - \left[\frac{C}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{C^2 + 4BA} \right] E = 0$$

или

$$\frac{\partial^2 E}{\partial \xi^2} + \frac{1}{\xi} \frac{\partial E}{\partial \xi} - \chi_{1,2}^2 E = 0, \quad (20)$$

где $\chi_{1,2}^2 = \frac{C}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{C^2 + 4BA} = \frac{A}{k_{1,2}}$ в силу (18).

Решение полученного модифицированного уравнения Бесселя (20) можно представить как

$$E(\xi) = C_1 I_0(\chi_1 \xi) + C_2 I_0(\chi_2 \xi) + C_3 J_0(\chi_1 \xi) + C_4 J_0(\chi_2 \xi),$$

где $I_0(\chi_1 \xi)$, $I_0(\chi_2 \xi)$ и $J_0(\chi_1 \xi)$, $J_0(\chi_2 \xi)$ — соответственно модифицированные функции Бесселя первого и второго рода.

Учитывая то обстоятельство, что при $\xi = 0$ напряженность электрического поля внутри проволоки $E(\xi)$ не должна быть расходящейся функцией, константы C_3 и C_4 естественно положить равными нулю. В результате решение (20) примет следующий вид:

$$E(\xi) = C_1 I_0(\chi_1 \xi) + C_2 I_0(\chi_2 \xi), \tag{21}$$

где

$$I_0(\chi_1 \xi) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \exp(\xi \chi_1 \cos \alpha) d\alpha, \tag{22}$$

$$I_0(\chi_2 \xi) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \exp(\xi \chi_2 \cos \alpha) d\alpha. \tag{23}$$

Применим граничные условия (11) и (13) для нахождения C_1 и C_2 .

Из (13) и (21) следует, что

$$C_1 I_0(\chi_1) + C_2 I_0(\chi_2) = E_0, \tag{24}$$

где $I_0(\chi_1)$ и $I_0(\chi_2)$ могут быть найдены из (22) и (23) соответственно при $\xi = 1$.

Граничное условие (11) позволяет получить выражение, связывающее значения моментных коэффициентов $a_1(\xi)$ и $a_2(\xi)$ на границе проволоки. После проведения соответствующих вычислений имеем

$$\frac{2}{3} a_1(1 - q) = \frac{v_F}{4} a_2(1)(1 + q). \tag{25}$$

Выражение для $a_1(\xi)$ следует из (17) и (21)

$$a_1(\xi) = \frac{C_1}{k_1} I_0(\chi_1 \xi) + \frac{C_2}{k_2} I_0(\chi_2 \xi). \tag{26}$$

Тогда при $\xi = 1$

$$a_1(\xi) = \frac{C_1}{k_1} I_0(\chi_1) + \frac{C_2}{k_2} I_0(\chi_2). \tag{27}$$

Выражение для $a_2(\xi)$ можно получить, используя уравнение (9)

$$a_2(\xi) = -\frac{1}{z v_F} \left[\frac{C_1 \chi_1}{k_1} I_1(\chi_1 \xi) + \frac{C_2 \chi_2}{k_2} I_1(\chi_2 \xi) \right],$$

где

$$I_1(\chi_1 \xi) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \exp(\xi \chi_1 \cos \alpha) \cos \alpha d\alpha, \tag{28}$$

$$I_1(\chi_2 \xi) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \exp(\xi \chi_2 \cos \alpha) \cos \alpha d\alpha. \tag{29}$$

Тогда при $\xi = 1$

$$a_2(1) = -\frac{1}{z v_F} \left[\frac{C_1 \chi_1}{k_1} I_1(\chi_1) + \frac{C_2 \chi_2}{k_2} I_1(\chi_2) \right]. \tag{30}$$

Таким образом, уравнение (25) принимает вид

$$\begin{aligned} & \frac{2}{3} \left(\frac{C_1}{k_1} I_0(\chi_1) + \frac{C_2}{k_2} I_0(\chi_2) \right) (1 - q) \\ & = \frac{v_F}{4} \left(-\frac{1}{z v_F} \left[\frac{C_1 \chi_1}{k_1} I_1(\chi_1) + \frac{C_2 \chi_2}{k_2} I_1(\chi_2) \right] \right) (1 + q). \end{aligned} \tag{31}$$

Уравнения (24) и (31) образуют систему, решая которую можно определить C_1 и C_2

$$C_1 = \frac{-\frac{E_0}{I_0(\chi_2)} \left(\frac{2\chi_2^2}{3} (1 - q) I_0(\chi_2) + \frac{\chi_2^3}{4z} (1 + q) I_1(\chi_2) \right)}{\frac{2\chi_1^2}{3} (1 - q) I_0(\chi_1) + \frac{\chi_1^3}{4z} (1 + q) I_1(\chi_1) - \frac{I_0(\chi_1)}{I_0(\chi_2)} \left(\frac{2\chi_1^2}{3} (1 - q) I_0(\chi_2) + \frac{\chi_1^3}{4z} (1 + q) I_1(\chi_2) \right)}, \tag{32}$$

$$C_2 = \frac{-\frac{E_0}{I_0(\chi_2)} \left(\frac{2\chi_1^2}{3} (1 - q) I_0(\chi_1) + \frac{\chi_1^3}{4z} (1 + q) I_1(\chi_1) \right)}{\frac{2\chi_1^2}{3} (1 - q) I_0(\chi_1) + \frac{\chi_1^3}{4z} (1 + q) I_1(\chi_1) - \frac{I_0(\chi_1)}{I_0(\chi_2)} \left(\frac{2\chi_2^2}{3} (1 - q) I_0(\chi_2) + \frac{\chi_2^3}{4z} (1 + q) I_1(\chi_2) \right)}. \tag{33}$$

Здесь мы учли, что $k_{1,2} = \frac{A}{\chi_{1,2}^2}$ согласно (18).

4. Расчет напряженности и тока

Амплитуду напряженности электрического поля внутри тонкой цилиндрической проволоки на основании формул (21), (32) и (33) можно представить в виде

$$E(\xi) = E_0 [C_1^* I_0(\chi_1 \xi) + C_2^* I_0(\chi_2 \xi)], \tag{34}$$

где $C_1^* = \frac{C_1}{E_0}$, а интегралы $I_0(\chi_1 \xi)$ и $I_0(\chi_2 \xi)$ определены равенствами (22) и (23).

Когда радиус тонкой проволоки R значительно превосходит длину свободного пробега электронов в ней $\Lambda = \tau v_F$ ($x \gg 1$, где $x = R/\Lambda$), предельным случаем формулы (34) является результат, совпадающий с результатом работы [10] (классический скин-эффект).

Плотность тока внутри проволоки определяется соотношением (14). Тогда, используя (26), выражение для амплитуды плотности тока в тонкой цилиндрической проволоке можно записать следующим образом:

$$j_z = \frac{en}{m} \left[\frac{C_1}{k_1} I_0(\chi_1 \xi) + \frac{C_2}{k_2} I_0(\chi_2 \xi) \right]. \tag{35}$$

Используя связь между константами $k_{1,2} = \frac{A}{\chi_{1,2}}$, преобразуем выражение (35) как

$$j_z = \frac{en}{mA} \left[C_1 \chi_1^2 I_0(\chi_1 \xi) + C_2 \chi_2^2 I_0(\chi_2 \xi) \right]. \quad (36)$$

С учетом того, что $A = -i \frac{2\psi^2}{e\tau} = \frac{2\psi^2}{ie\tau}$, выражение (36) принимает вид

$$j_z = \frac{ne^2\tau}{m} \frac{i}{2\psi^2} \left[C_1 \chi_1^2 I_0(\chi_1 \xi) + C_2 \chi_2^2 I_0(\chi_2 \xi) \right]$$

или

$$j_z = \sigma_0 \frac{i}{2\psi^2} \left[C_1 \chi_1^2 I_0(\chi_1 \xi) + C_2 \chi_2^2 I_0(\chi_2 \xi) \right],$$

где $\sigma_0 = \frac{ne^2\tau}{m}$ — объемная статическая проводимость металла, а интегралы $I_0(\chi_1 \xi)$ и $I_0(\chi_2 \xi)$ определены соответственно равенствами (22) и (23).

Учитывая, что $C_{1,2}^* = \frac{C_{1,2}}{E_0}$ и $j_{0z} = \sigma_0 E_0$, окончательно получим

$$j_z = j_{0z} \frac{i}{2\psi^2} \left[C_1^* \chi_1^2 I_0(\chi_1 \xi) + C_2^* \chi_2^2 I_0(\chi_2 \xi) \right]. \quad (37)$$

В случае отсутствия скин-эффекта ($\psi = 0$) из (37) с помощью предельного перехода имеем

$$j_z = j_{0z} \frac{x}{z} \times \left(1 + \frac{(q-1)I_0(z\sqrt{7}\xi)}{3\left[\frac{1}{3}(1-q)I_0(z\sqrt{7}) + \frac{\sqrt{7}}{8}(1+q)I_1(z\sqrt{7})\right]} \right). \quad (38)$$

Проинтегрировав выражение (37), определяем полный ток через поперечное сечение тонкой цилиндрической проволоки

$$I = 2\pi R^2 \int_0^1 j_z \xi d\xi = \pi R^2 j_{0z} \frac{i}{\psi^2} \left[C_1^* \chi_1^2 I_1(\chi_1) + C_2^* \chi_2^2 I_0(\chi_2) \right], \quad (39)$$

где $I_1(\chi_1)$ и $I_1(\chi_2)$ определены равенствами (28) и (29) при $\xi = 1$.

В случае отсутствия скин-эффекта ($\psi = 0$) из (39) с помощью предельного перехода имеем

$$I = \pi R^2 j_{0z} \frac{x}{z} \times \left(1 + \frac{2}{z\sqrt{7}} \frac{(q-1)I_1(z\sqrt{7})}{3\left[\frac{1}{3}(1-q)I_0(z\sqrt{7}) + \frac{\sqrt{7}}{8}(1+q)I_1(z\sqrt{7})\right]} \right). \quad (40)$$

Асимптотикой формул (37) и (39) в случае больших x ($x \gg 1$, где $x = R/\Lambda$) являются результаты, совпадающие с результатами работы [10] (классический скин-эффект).

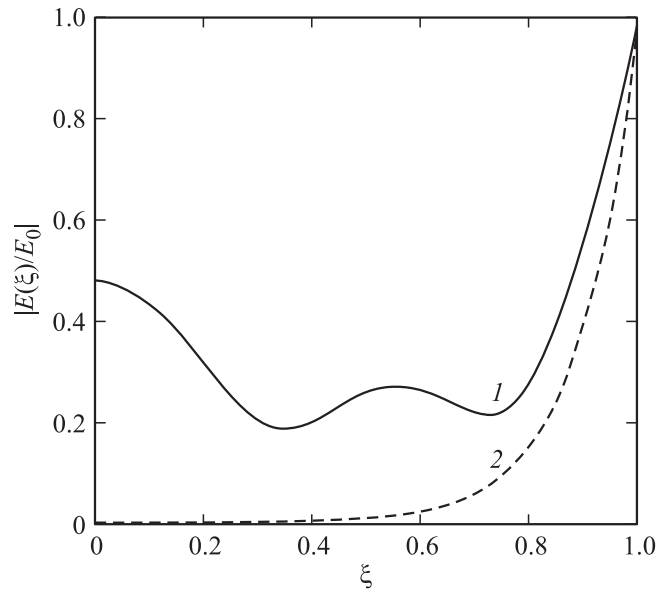


Рис. 1. Зависимость модуля амплитуды безразмерной напряженности электрического поля от безразмерной координаты внутри проволоки ξ . 1 — $\psi = 10$, $x = 1$, $y = 1$, $q = 0$, 2 — $\psi = 0$, $x \gg 1$.

Заметим, что при проведении численных расчетов результаты, полученные после применения формул (38) и (40) (случай отсутствия скин-эффекта), совпадают с результатами работы [3], в которой использовался другой математический подход к проблеме.

На рис. 1 представлена зависимость модуля амплитуды безразмерной напряженности электрического поля $|E(\xi)/E_0|$ от безразмерной координаты внутри проволоки ξ . Обе кривые построены для случая сильного скин-эффекта ($\psi = 10$). Отличие состоит в том, что кривая 1 соответствует проволоке, у которой радиус R равен длине свободного пробега электронов Λ ($x = 1$), а кривая 2 — макроскопической проволоке ($x \gg 1$). Как видно из рисунка, это обстоятельство заметно сказывается на величине модуля амплитуды безразмерной напряженности электрического поля $|E(\xi)/E_0|$. Практически во всем объеме проволоки ход кривой 1 носит осциллирующий характер, что связано с прохождением величины $|E(\xi)/E_0|$ через квазирезонансы — области, где вклады от различных траекторий электронов с одинаковыми фазами складываются, а с разными фазами — уничтожаются. Анализ хода кривой 2, напротив, показывает, что в случае сильного скин-эффекта электрическое поле отсутствует практически во всем объеме макроскопической проволоки, за исключением небольшого поверхностного слоя (назовем его слоем Кнудсена), глубина которого составляет величину порядка длины свободного пробега электронов Λ . По мере роста размера частицы (увеличения x) осцилляции на кривой 1 будут сглаживаться. Это произойдет за счет увеличения объемного рассеяния электронов и преобладания его над поверхностным. При больших значениях безразмер-

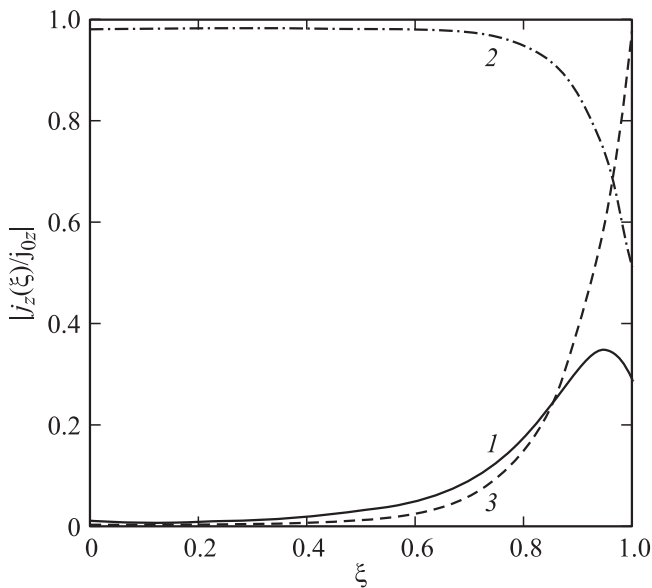


Рис. 2. Зависимость модуля амплитуды безразмерной плотности тока от безразмерной координаты внутри проволоки ξ . 1 — $\psi = 10$, $x = 5$, $y = 1$, $q = 0$, 2 — $\psi = 0$, $x = 5$, $y = 1$, $q = 0$, 3 — $\psi = 10$, $x \gg 1$.

ной обратной длины свободного пробега электронов x ($x \gg 1$) кривые 1 и 2 практически совпадают.

На рис. 2 приведены зависимости модуля амплитуды безразмерной плотности тока $|j_z(\xi)/j_{0z}|$ от безразмерной координаты внутри проволоки ξ . Кривые 1 и 3 (макроскопическая проволока) построены для случая сильного скин-эффекта ($\psi = 10$). Кривая 2 построена без учета скин-эффекта ($\psi = 0$). Наиболее интересно поведение этих кривых в слое Кнудсена вблизи поверхности проволоки. Анализ хода кривых 1 и 2 (результаты получены с помощью кинетического подхода) показывает, что в приповерхностном слое имеет место некоторое увеличение плотности тока за счет поверхностного рассеяния электронов. При этом следует отметить наличие на кривой 1 максимума плотности тока. Анализ хода кривой 3, которая соответствует классическому скин-эффекту, показывает монотонное убывание безразмерной плотности тока $|j_z(\xi)/j_{0z}|$ в слое Кнудсена.

На рис. 3 отображена зависимость модуля амплитуды безразмерной плотности тока $|j_z(\psi)/j_{0z}|$ внутри проволоки от безразмерного скин-параметра ψ . При малых значениях скин-параметра ψ ($\psi \ll 1$) кривые 1 и 2 (кривая 2 построена без учета скин-эффекта, когда $\psi = 0$), полученные с помощью кинетического подхода, совпадают, так как в этом случае скин-эффект практически не проявляется. По мере роста скин-параметра ψ кривая 1 асимптотически приближается к кривой 3, соответствующей классическому скин-эффекту в макроскопической проволоке, когда $x \gg 1$.

На рис. 4 показана зависимость модуля амплитуды безразмерной плотности тока $|j_z(x)/j_{0z}|$ внутри проволоки от безразмерной обратной длины свободного пробега электронов x .

При малых значениях радиуса проволоки ($x \ll 1$) кривые 1 и 2 (кривая 2 построена без учета скин-эффекта, когда $\psi = 0$), полученные с помощью кинетического подхода, выходят из точки нуля. Плотность тока в этом случае крайне мала, так как ток в основном обусловлен поверхностным рассеянием электронов на границе проволоки, а объемное рассея-

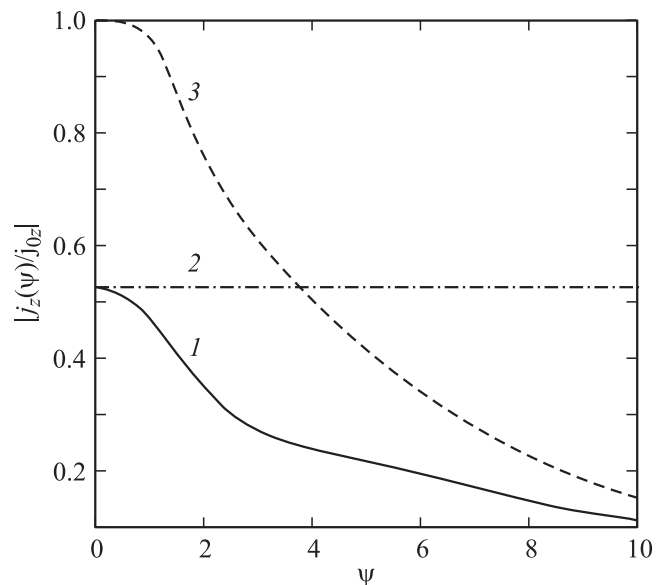


Рис. 3. Зависимость модуля амплитуды безразмерной плотности тока внутри проволоки от безразмерного скин-параметра ψ . 1 — $\xi = 0.8$, $x = 1$, $y = 1$, $q = 0$, 2 — $\xi = 0.8$, $\psi = 0$, $x = 1$, $y = 1$, $q = 0$, 3 — $\xi = 0.8$, $x \gg 1$.

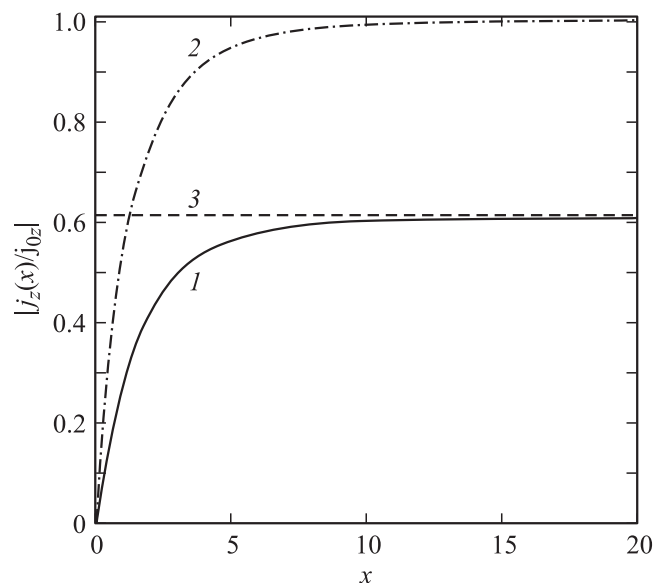


Рис. 4. Зависимость модуля амплитуды безразмерной плотности тока внутри проволоки от безразмерной обратной величины длины свободного пробега электронов x . 1 — $\xi = 0.8$, $\psi = 3$, $y = 1$, $q = 0$, 2 — $\xi = 0.8$, $\psi = 0$, $y = 1$, $q = 0$, 3 — $\xi = 0.8$, $\psi = 3$, $x \gg 1$.

ние электронов практически отсутствует. Если радиус проволоки достаточно большой ($x \gg 1$), то имеет место классический скин-эффект. При этом кривая I асимптотически приближается к кривой 3 , построенной для макроскопической проволоки.

Список литературы

- [1] Ю.И. Петров. Физика малых частиц. Наука, М. (1984).
- [2] R.V. Dingle. Proc. Roy. Soc. A **201**, 545 (1950).
- [3] Э.В. Завитаев, А.А. Юшканов. Микроэлектроника **37**, 429 (2008).
- [4] Э.В. Завитаев, А.А. Юшканов. ЖЭТФ **130**, 887 (2006).
- [5] E. Tuncer, D.P. Neikirk. Electron. Lett. **29**, 2127 (1993).
- [6] В.И. Мирошниченко, В.Н. Остроушко. Электромагнитные явления **2**, 324 (2001).
- [7] E.H. Sondheimer. Adv. Phys. **50**, 499 (2001).
- [8] Л.А. Вайнштейн. Электромагнитные волны. Наука, М. (1957).
- [9] В. Смайт. Электростатика и электродинамика. ИЛ, М. (1954).
- [10] Л.Д. Ландау, И.М. Лифшиц. Электродинамика сплошных сред. Наука, М. (1982).
- [11] У. Харрисон. Теория твердого тела. Мир, М. (1972).
- [12] Дж. Займан. Электроны и фотоны. ИЛ, М. (1962).
- [13] И.М. Лифшиц, М.Я. Азбель, М.И. Каганов. Электронная теория металлов. Наука, М. (1971).
- [14] М.Н. Коган. Динамика разреженного газа. Наука, М. (1967).