

03

## Модели Стокса и Навье–Стокса в описании неустойчивости заряженной границы проводящей жидкости

© Н.М. Зубарев

Институт электрофизики УрО РАН, Екатеринбург, Россия  
Физический институт им. П.Н. Лебедева РАН, Москва, Россия  
E-mail: nick@ier.uran.ru

Поступило в Редакцию 21 мая 2025 г.

В окончательной редакции 4 июля 2025 г.

Принято к публикации 4 июля 2025 г.

Рассматриваются развитые стадии неустойчивости Тонкса–Френкеля свободной заряженной поверхности проводящей жидкости, когда из-за заострения границы масштаб задачи уменьшается до микроскопического и определяющую роль начинают играть вязкие эффекты. В такой ситуации для изучения течения жидкостей зачастую используется приближение Стокса. Однако, как показано, спецификой неустойчивости Тонкса–Френкеля с характерным для нее взрывным поведением ряда физических величин является некорректность ее анализа в рамках этого приближения. Корректное описание динамики жидкости при формировании сингулярности требует использования полных уравнений Навье–Стокса.

**Ключевые слова:** неустойчивость Тонкса–Френкеля, конус Тейлора, модель Навье–Стокса, приближение Стокса.

DOI: 10.61011/PJTF.2025.19.61148.20378

Свободная поверхность проводящей жидкости неустойчива в достаточно сильном внешнем электрическом поле [1–3]. Механизм этой неустойчивости — неустойчивости Тонкса–Френкеля (ТФ) — следующий: под действием поля напряженностью  $E$  на границе жидкости индуцируется свободный поверхностный электрический заряд плотностью  $\sigma = \varepsilon_0 E$ , где  $\varepsilon_0$  — электрическая постоянная. Взаимодействие поля с этим зарядом приводит к появлению силы, направленной от жидкости наружу, действие которой удобно описать, введя электростатическое давление  $p_E = \sigma E/2 = \varepsilon_0 E^2/2$ . При деформации границы напряженность поля на гребнях волн будет превышать напряженность во впадинах. Возникает градиент давления  $p_E$ , приводящий к дальнейшей деформации границы. Если пренебречь влиянием поля тяжести, то для неограниченной плоской поверхности неустойчивы моды с волновыми числами  $k < k_c = \varepsilon_0 E_0^2/\alpha$ , где  $E_0$  — напряженность внешнего поля (предполагается, что оно однородно и направлено по нормали к невозмущенной — плоской — границе),  $\alpha$  — коэффициент поверхностного натяжения. В области  $k > k_c$ , т.е. для мелкомасштабных возмущений границы, неустойчивость подавляется капиллярными силами.

Важнейшей особенностью неустойчивости ТФ является ее взрывной характер. На нелинейных стадиях происходит формально неограниченное заострение поверхности, приводящее за конечное время к обращению в бесконечность кривизны поверхности, локального электрического поля и скорости жидкости [4–7]. Завершает гидродинамическую стадию эволюции системы формирование конического острия. Для дальнейшего описания уже требуется учитывать эмиссионные процессы, которые будут определять поведение системы

при локальных полях  $\sim 10^8$  В/см и выше [8]. Обратим внимание на то, что не следует путать стационарные конические образования (обычные конусы Тейлора [9]) и динамические конусы, возникающие на финальных стадиях развития неустойчивости [10].

При формировании конического острия характерный пространственный масштаб задачи ( $\lambda$ ) радикально меняется. По оценкам [7] с начала развития неустойчивости до поздних стадий, когда инициируются эмиссионные процессы, он уменьшается на шесть порядков (с  $10^{-2}$  до  $10^{-8}$  м), при этом характерное время ( $\tau$ ) меняется еще существеннее — на девять порядков (реализуется скейлинг  $\tau^2 \propto \lambda^3$ ). При настолько значимом изменении пространственного и временного масштабов численные методы становятся неэффективными, и в пределе  $\lambda \rightarrow 0$  и  $\tau \rightarrow 0$  неустойчивость ТФ можно исследовать лишь аналитически. Ключевыми задачами такого исследования будут определение характера поведения основных физических величин вблизи сингулярности и нахождение предельного угла формирующегося конуса. Настоящая работа посвящена анализу корректности различных подходов к решению этих задач.

Если на начальных стадиях развития неустойчивости — в макромасштабе — жидкость можно считать идеальной, т.е. пренебрегать ее вязкостью, то на финальных стадиях — в микромасштабе — вязкие эффекты неизбежно начнут играть ведущую роль [5–7]. В терминах числа Рейнольдса  $Re = \rho \lambda^2/(\eta \tau)$ , где  $\rho$  — плотность жидкости,  $\eta$  — динамическая вязкость, с учетом скейлинга  $\tau^2 \propto \lambda^3$  имеем  $Re \propto \lambda^{1/2}$ . Число  $Re$  уменьшается в процессе эволюции системы, т.е. с уменьшением масштабов  $\lambda$  и  $\tau$  (в качестве оценки для  $\lambda$  можно взять радиус кривизны вершины формирующегося острия, для

$\tau$  — время, остающееся до момента формирования сингулярности). Как известно, при достаточно малых  $Re$  вязкие эффекты доминируют над динамическими. Понятно, что ввиду чрезвычайной сложности аналитического исследования течений жидкости со свободной границей будет ценно любое обоснованное упрощение в описании нелинейных стадий неустойчивости ТФ. Возникает вопрос, можно ли как-то использовать вывод о доминировании вязких эффектов.

Естественным упрощением представляется использование приближения Стокса, т. е. переход к формальному пределу  $Re = 0$  (см. пример его использования для электрогидродинамики микромасштабов в [11]). Применительно к неустойчивости заряженной поверхности проводящей жидкости стоксовское приближение использовалось в работах [12,13]. В них было продемонстрировано, что на поверхности заряженных и нейтральных капель в электрическом поле за конечное время формируются конические острия. Сделан вывод, что для напряженности поля на вершине острия реализуется скейлинг  $E \propto \tau^{-1/2}$ , обусловленный балансом между электростатическими и вязкими силами. Для скорости жидкости  $u$  и масштаба  $\lambda$  справедливо  $u \propto \lambda/\tau \propto \tau^{\chi-1}$ , где  $\chi$  — некоторый показатель. Примечательно, что значение  $\chi$  не удается однозначно определить в рамках использованного в [12,13] стоксовского приближения. Угол формирующегося конуса ( $\beta$ ) также не универсален: на него влияют начальные условия (обычно  $50 \leq \beta \leq 60^\circ$ ).

Отметим, что выявленные неопределенности в показателе  $\chi$  и угле  $\beta$  взаимосвязаны. В терминах масштаба  $\lambda$  локальная напряженность поля удовлетворяет скейлингу  $E \propto \lambda^{-1/(2\chi)}$ , а тогда потенциал поля — скейлингу  $\varphi \propto E\lambda \propto \lambda^{1-1/(2\chi)}$ . Как следует из известного решения для распределения потенциала поля вокруг проводящего конуса [7,13], справедлива зависимость  $\varphi \propto \lambda^\gamma$ , где показатель  $\gamma$  связан с углом конуса  $\beta$  соотношением  $P_\gamma(-\cos(\beta/2)) = 0$ . Здесь  $P_\gamma$  — функция Лежандра порядка  $\gamma$ , а при изменении угла от 0 до  $\pi$  показатель растёт от 0 до 1. Поскольку в обсуждаемом случае  $\gamma = 1 - 1/(2\chi)$ , неопределенность в  $\chi$  обуславливает неопределенности для  $\gamma$  и  $\beta$ .

В [5] был предложен для случая идеальной жидкости, а в [7] обобщен на случай вязкой жидкости подход к анализу развитых стадий неустойчивости ТФ, основанный на следующем приеме: связь между пространственным и временным масштабами находится из закона дисперсии линейных поверхностных волн, а влияние нелинейности учитывается заменой внешнего поля  $E_0$  на локальное поле  $E$ . Такой подход, несмотря на его простоту, позволяет учесть, что рост напряженности поля на вершине формирующегося острия приводит к изменению спектра неустойчивых мод. В итоге удается описать процесс изменения (уменьшения) масштабов  $\lambda$  и  $\tau$  при образовании сингулярности. Применение этого подхода для идеальной жидкости позволило выявить упомянутый выше скейлинг  $\tau^2 \propto \lambda^3$  и установить, что угол динамического конуса совпадает с углом статического

конуса Тейлора  $98.6^\circ$ . Эти результаты согласуются как с результатами экспериментов [10], так и с численными расчетами в пределе больших  $Re$  [5,6]. Для вязкой жидкости в рамках модели Навье–Стокса обсуждаемый подход предсказывает вдвое меньший предельный угол  $\beta \approx 33.1^\circ$  при сохраняющемся скейлинге, соответствующем  $\chi = 2/3$ . Это противоречит результатам, полученным в стоксовском пределе: согласно [12,13], величины  $\beta$  и  $\chi$  не являются универсальными и зависят от начальных условий. Разберемся, в чем причина такого несоответствия и какому подходу следует доверять.

Закон дисперсии электрокапиллярных волн для вязкой жидкости, соответствующий апериодическому режиму движения, имеет для модели Навье–Стокса следующий вид [7,14,15]:

$$\rho(\gamma + 2\eta k^2/\rho)^2 - \varepsilon_0 E_0^2 k^2 + \alpha k^3 = 4\rho^{-1/2} \eta^{3/2} k^3 \sqrt{\gamma + \eta k^2/\rho}, \quad (1)$$

где  $\gamma > 0$  — вещественный инкремент неустойчивости (для сравнения см. [16] для гравитационных и [17] для капиллярно-гравитационных волн). Рассматривая предельный случай  $Re = 0$ , можно из (1) получить закон дисперсии для приближения Стокса. Поскольку  $Re \propto \rho\gamma/(\eta k^2)$ , это приближение реализуется в формальном пределе  $\rho \rightarrow 0$ . Получим  $\gamma = (\varepsilon_0 E_0^2 - \alpha k)/(2\eta) = \alpha(k_c - k)/(2\eta)$ .

Как видно,  $\gamma > 0$ , т. е. поверхность неустойчива, при  $k < k_c$  (вязкость не влияет на диапазон неустойчивых волновых чисел). Особенностью стоксовского предела является то, что максимум инкремента неустойчивости всегда приходится на  $k = 0$ . Он равен  $\gamma_{St} = \varepsilon_0 E_0^2/(2\eta)$ .

Для дальнейшего анализа удобно использовать безразмерные переменные  $\kappa = k/k_c$  и  $\Gamma = \gamma/\gamma_{St}$ . Закон дисперсии в приближении Стокса принимает тогда компактный вид

$$\Gamma = 1 - \kappa. \quad (2)$$

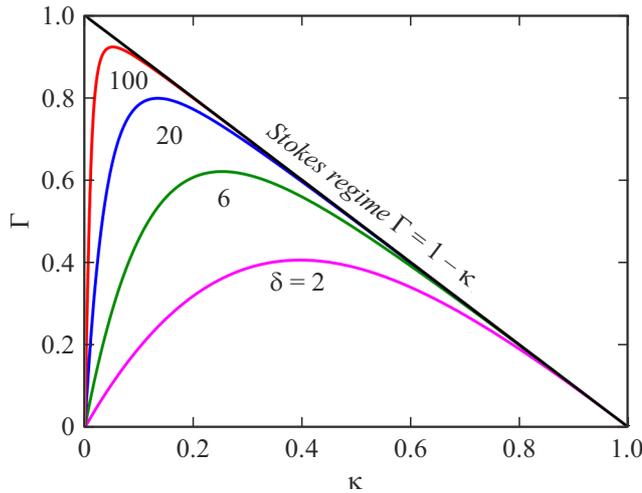
Для исходной модели Навье–Стокса имеем

$$(\Gamma + 2\delta^2 \kappa^2)^2 - 2\delta^2 \kappa^2 (1 - \kappa) - 4\delta^3 \kappa^3 \sqrt{\Gamma + \delta^2 \kappa^2} = 0, \quad (3)$$

где мы ввели безразмерный управляющий параметр  $\delta = 2^{1/2} \varepsilon_0^{1/2} \rho^{-1/2} \alpha^{-1} \eta E_0$ . Этот параметр можно интерпретировать как отношение характерных инкрементов для идеальной ( $\gamma_{id} \propto \varepsilon_0^{3/2} E_0^3 / (\alpha \rho^{1/2})$ , см. [5,7]) и сильно вязкой ( $\gamma_{St}$ ) жидкостей, т. е.  $\delta \propto \gamma_{id}/\gamma_{St}$ .

Рассмотрим, как меняется описываемая (3) связь инкремента  $\Gamma$  и волнового числа  $\kappa$  с изменением параметра  $\delta$ , т. е. фактически с изменением приложенного поля  $E_0$ . При  $\delta > 1$  закон дисперсии (3), соответствующий модели Навье–Стокса, аппроксимируется с хорошей точностью выражением, разрешенным относительно инкремента:

$$\Gamma \approx 2\delta\kappa \left( \sqrt{3 - 3\kappa + \delta^2 \kappa^2} - \delta\kappa \right) / 3. \quad (4)$$



Зависимости (4) инкремента неустойчивости  $\Gamma$  от волнового числа  $\kappa$ , соответствующие модели Навье–Стокса, для  $\delta = 2, 6, 20, 100$  (цветные кривые), а также зависимость (2), соответствующая режиму Стокса (черная прямая). Цветной вариант рисунка представлен к электронной версии статьи.

На рисунке показаны описываемые (4) зависимости  $\Gamma(\kappa)$  для  $\delta = 2, 6, 20, 100$  (цветные кривые). На рисунке также приведена зависимость (2), соответствующая приближению Стокса (черная прямая). Видно, каким образом реализуется предельный переход от модели Навье–Стокса к стоковскому приближению: с ростом  $\delta$  в области  $0 < \kappa \leq 1$  зависимости (4) асимптотически приближаются к линейной зависимости (2).

На первый взгляд иллюстрируемая рисунком трансформация зависимости  $\Gamma(\kappa)$  при вариации параметра  $\delta$  свидетельствует в пользу корректности использования приближения Стокса для описания развитых стадий неустойчивости ТФ. Однако это не так. Предельного перехода не происходит в точке  $\kappa = 0$ . В ней для приближения Стокса справедливо  $\Gamma = 1$ , а для модели Навье–Стокса при любых  $\delta$  имеем  $\Gamma = 0$ . Обсудим, как проявится такое несоответствие при формировании сингулярности.

Определяющую роль в развитии неустойчивости ТФ играет так называемая доминантная мода, которая обладает наибольшим инкрементом, т.е. соответствует условию экстремума  $\delta\Gamma/\delta\kappa = 0$  (обозначим соответствующие инкремент и волновое число как  $\Gamma_d$  и  $\kappa_d$  или  $\gamma_d \equiv \Gamma_d\gamma_{St}$  и  $k_d \equiv \kappa_d k_c$  в размерном виде). Как следствие, уже на линейных стадиях неустойчивости в итоге конкуренции различных мод из диапазона  $0 < \kappa < 1$  „победит“, т.е. разовьется до большей амплитуды, мода  $\kappa_d$ . Именно она будет определять характерный масштаб.

Рост острия приводит к увеличению напряженности поля на его вершине. Понятно, что на нелинейных стадиях неустойчивости поведение жидкости вблизи вершины будет определяться уже не внешним полем  $E_0$ , а значительно превышающим его локальным полем  $E$ . Фактически это приведет к тому, что управляющий

параметр  $\delta$  задачи не будет константой. Если положить, что он определяется локальным полем  $E$ , то его величина будет расти в процессе развития неустойчивости, а это приведет к трансформации закона дисперсии. Тогда рисунок можно интерпретировать как эволюцию закона дисперсии с ростом локального поля на вершине выступа. Принципиально важно, что будет меняться положение максимума зависимости  $\Gamma(\kappa)$ , т.е. параметры доминантной моды неустойчивости.

Находим из (4) при больших  $\delta$  в основном порядке:  $\kappa_d \approx (3/2)^{1/3}\delta^{-2/3}$ ,  $\Gamma_d \approx 1 - (3/2)^{4/3}\delta^{-2/3}$ , т.е., как это видно и из рисунка,  $\kappa_d \rightarrow 0$  и  $\Gamma_d \rightarrow 1$  при  $\delta \rightarrow \infty$ . Может сложиться неверное впечатление, что происходит переход к режиму Стокса, для которого доминантной модой является  $\kappa = 0$ , а для нее  $\Gamma = 1$ . В действительности в исходных размерных переменных получим (здесь мы заменили внешнее поле  $E_0$  локальным полем  $E$ )

$$k_d \approx \left( \frac{3\rho\varepsilon_0^2 E^4}{4\alpha\eta^2} \right)^{1/3}, \quad \gamma_d \approx \frac{\varepsilon_0 E^2}{2\eta} - \frac{3^{4/3}\varepsilon_0^{2/3} E^{4/3} \rho^{1/3} \alpha^{2/3}}{2^{8/3}\eta^{5/3}}. \quad (5)$$

Таким образом,  $k_d \propto E^{4/3}$ , и с ростом поля величина  $k_d$  будет расти. Как следствие, положение максимума в модели Навье–Стокса удаляется от такового ( $k = 0$ ) для режима Стокса.

Из (5) вытекает связь  $E \propto \lambda^{-3/4}$  между масштабом задачи  $\lambda \propto 1/k_d$  и локальным полем. Она в силу скейлинга  $E \propto \lambda^{-3/4}$  соответствует  $\chi = 2/3$ . Таким образом, показатель  $\chi$  при использовании модели Навье–Стокса определяется однозначно. В недавней работе [7] было показано, что такое значение  $\chi$  соответствует предельному углу конуса  $\beta \approx 33.1^\circ$ : для него выполняется условие  $P_\gamma(-\cos(\beta/2)) = 0$  при  $\gamma = 1 - 1/(2\chi) = 1/4$ . Отметим, что заострение вершины выступа можно интерпретировать как уменьшение пространственного масштаба  $\lambda \propto 1/k_d$  вследствие увеличения волнового числа доминантной моды. В рамках модели Стокса такая интерпретация не имеет смысла, поскольку сдвига максимума в законе дисперсии не происходит; максимум всегда приходится на  $k = 0$ .

Подведем итоги нашего анализа. На финальных стадиях развития неустойчивости ТФ, когда характерный пространственный масштаб неограниченно уменьшается за счет заострения поверхности, существенную роль начинают играть вязкие эффекты. Их влияние приводит к тому, что инкремент неустойчивости в основном порядке растет как  $\gamma_d \approx \varepsilon_0 E^2 / (2\eta)$ , т.е. как в стоковском режиме [12,13]. В это выражение не входит коэффициент поверхностного натяжения  $\alpha$ , отсюда следует вывод, что реализуется динамический баланс между вязкими и электростатическими силами. Качественным отличием предела Стокса от модели Навье–Стокса является вырождение доминантной моды неустойчивости. Для уравнений Навье–Стокса в зависимости инкремента от волнового числа имеется максимум, приходящийся на конечное значение волнового числа  $k_d \propto E^{4/3}$ , которое

растет на вершине выступа за счет увеличения локального поля  $E$ . Для режима Стокса максимум инкремента всегда приходится на  $k = 0$  и соответственно не сдвигается. Именно по этой причине в рамках модели Стокса невозможно однозначно определить значение показателя  $\chi$  в зависимости  $\lambda \propto \tau^\chi$ . Для более общей модели Навье–Стокса однозначно получается  $\chi = 2/3$ .

Можно заключить, что приближение Стокса не описывает корректно финальные стадии развития неустойчивости ТФ и необходимо использовать полные уравнения Навье–Стокса. Только они позволяют адекватно описать динамику жидкости на стадии формирования сингулярности, в том числе определить предельный угол формирующегося конического острия.

### Конфликт интересов

Автор заявляет, что у него нет конфликта интересов.

### Список литературы

- [1] L. Tonks, *Phys. Rev.*, **48**, 562 (1935). DOI: 10.1103/PhysRev.48.562
- [2] Я.И. Френкель, *ЖЭТФ*, **6** (4), 348 (1938).
- [3] Н.М. Зубарев, О.В. Зубарева, *ЖТФ*, **71** (7), 21 (2001). <https://journals.ioffe.ru/articles/38836> [N.M. Zubarev, O.V. Zubareva, *Tech. Phys.*, **46** (7), 806 (2001). DOI: 10.1134/1.1387535].
- [4] Н.М. Зубарев, *Письма в ЖЭТФ*, **73** (10), 613 (2001). [http://jetpletters.ru/ps/626/article\\_9763.pdf](http://jetpletters.ru/ps/626/article_9763.pdf) [N.M. Zubarev, *JETP Lett.*, **73**, 544 (2001). DOI: 10.1134/1.1387524].
- [5] V.G. Suvorov, N.M. Zubarev, *J. Phys. D*, **37**, 289 (2004). DOI: 10.1088/0022-3727/37/2/019
- [6] T.G. Albertson, S.M. Troian, *Phys. Fluids*, **31** (10), 102103 (2019). DOI: 10.1063/1.5123742
- [7] N.M. Zubarev, *Phys. Fluids*, **36** (4), 042102 (2024). DOI: 10.1063/5.0200820
- [8] I.V. Uimanov, D.L. Shmelev, S.A. Barenholts, *Vacuum*, **220**, 112823 (2024). DOI: 10.1016/j.vacuum.2023.112823
- [9] G.I. Taylor, *Proc. Roy. Soc. Lond. A*, **280** (1382), 383 (1964). DOI: 10.1098/rspa.1964.0151
- [10] L.M. Baskin, A.V. Batrakov, S.A. Popov, D.I. Proskurovsky, *IEEE Trans. Dielectr. Electr. Insul.*, **2**, 231 (1995). DOI: 10.1109/94.388245
- [11] Г.С. Ганченко, В.С. Шелистов, Е.А. Демехин, *Коллоид. журн.*, **87** (1), 16 (2025). DOI: 10.31857/S0023291225010024 [G.S. Ganchenko, V.S. Shelistov, E.A. Demekhin, *Colloid J.*, **87**, 15 (2025). DOI: 10.1134/S1061933X24600970].
- [12] S.I. Betelú, M.A. Fontelos, U. Kindelán, O. Vantzós, *Phys. Fluids*, **18** (5), 051706 (2006). DOI: 10.1063/1.2204044
- [13] M.A. Fontelos, U. Kindeán, O. Vantzós, *Phys. Fluids*, **20** (9), 092110 (2008). DOI: 10.1063/1.2980030
- [14] С.А. Баренгольц, Н.М. Зубарев, Е.А. Кочурин, *Письма в ЖТФ*, **50** (3), 36 (2024). DOI: 10.61011/PJTF.2024.03.57042.19731 [S.A. Barenholts, N.M. Zubarev, E.A. Kochurin, *Tech. Phys. Lett.*, **50** (2), 32 (2024). DOI: 10.61011/PJTF.2024.03.57042.19731].
- [15] А.А. Очиров, Ю.Д. Чашечкин, *Прикладная математика и механика*, **87** (3), 379 (2023). DOI: 10.31857/S0032823523030116 [A.A. Ochirov, Yu.D. Chashechkin, *Fluid Dyn.*, **58** (7), 1318 (2023). DOI: 10.1134/S0015462823602012].
- [16] Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц, *Теоретическая физика* (Наука, М., 1986), т. VI. [L.D. Landau, E.M. Lifshitz, *Course of theoretical physics* (Pergamon Press, 2013), vol. 6].
- [17] H. Lamb, *Hydrodynamics*, 6th ed. (Cambridge University Press, London, 1932).