Журнал технической физики, 2025, том 95, вып. 12

Спектральные задачи в теории галактического динамо: асимптотические и вычислительные подходы

© *Е.А. Михайлов,*[1,2,3] *В.А. Желиговский,*[4] *А.А. Таранюк,*[2,4] *М.В. Фролова*[2]

[1] Физический институт им. П.Н. Лебедева РАН,
119991 Москва, Россия
[2] Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова,
119991 Москва, Россия
[3] Московский центр фундаментальной и прикладной математики,
119899 Москва, Россия
[4] Институт теории прогноза землетрясений и математической геофизики РАН,
117997 Москва, Россия
e-mail: e.mikhajlov@lebedev.ru

Поступило в Редакцию 5 мая 2025 г.
В окончательной редакции 22 июля 2025 г.
Принято к публикации 23 июля 2025 г.

Возникновение магнитных полей галактик описано методами магнитной гидродинамики и теории динамо. Рассмотрены два различных масштаба — микроскопический, на котором применимы уравнения для эволюции и переноса магнитного поля, непосредственно следующие из уравнений Максвелла, и макроскопический, на котором после усреднения по масштабам турбулентности рассматриваются уравнения динамо средних полей. Особый интерес представляют модели, учитывающие значительную толщину галактического диска. Во всех моделях возможность генерации магнитного поля описана спектром соответствующих дифференциальных операторов.

Ключевые слова: галактики, спектр, дифференциальный оператор, магнетизм.

DOI: 10.61011/JTF.2025.12.61791.235-25

Введение

В настоящее время существуют однозначные доказательства наличия магнитных полей в спиральных галактиках [1]. Они основаны на данных о мерах фарадеевского вращения и исследовании спектра синхротронного излучения. Вместе с тем возникают вопросы о теоретическом объяснении возникновения магнитных полей в подобных объектах. Межзвездный газ в большинстве таких галактик представляет собой частично ионизованный водород, поэтому можно ожидать, что эволюция полей в них описывается законами магнитной гидродинамики для хорошо проводящих сред. Особую сложность вызывает наличие двух принципиально разных масштабов.

В случае небольших масштабов возможно использование микроскопических уравнений, вытекающих из уравнений Максвелла в сплошной среде. При наличии вихрей различных — подчас несоизмеримых — масштабов возможны затухание, перенос или усиление поля. Задача о возбуждении магнитного поля тогда сводится к исследованию спектра соответствующих дифференциальных операторов [2]. Наличие собственных значений с положительной действительной частью указывает на возможность генерации. Подобные задачи актуальны как для теоретической астрофизики, так и для вычислительной математики.

В случае глобальных магнитных полей гораздо бо́льшую роль играют поля, усредненные по масштабам, связанным с размерами турбулентных вихрей. После усреднения в уравнении индукции появляется дополнительное слагаемое, связанное со средней спиральностью турбулентных движений. Совместно с дифференциальным вращением (связанным с убыванием угловой скорости вращения галактики по мере удаления от центра) это приводит к действию $\alpha\Omega$-динамо [3]. Как и в предыдущем случае, возможность роста магнитного поля устанавливается путем исследования спектра соответствующего дифференциального оператора.

Для тонких галактик Д. Мосс [4] предложил планарное приближение, позволяющее свести задачу об эволюции магнитного поля к двум уравнениям в частных производных для радиальной и азимутальной компонент поля. Хотя эта модель создана для численного моделирования, она позволяет найти спектр точно в осесимметричном случае. Однако для многих реальных объектов этого недостаточно: так, хотя толщина диска существенно меньше радиуса, их величина может быть вполне сопоставимой.

RZ-модель для магнитного поля призвана решить данную проблему [5]. Она позволяет найти магнитное поле при конечной толщине диска (когда ее отношение к радиусу не есть малый параметр задачи), и учитывает его более сложную вертикальную структуру. Одна из трудностей подобного подхода — гораздо бо́льшая сложность дифференциального оператора, характеризующего эволюцию поля. Он не самосопряжен, поэтому применение стандартных подходов теоретической физики математически строго не обосновано. Мы рассмотрели упрощенную модель, в которой преобразование переменных приводит к задаче для эрмитовых операторов, откуда можно построить асимптотики для поля. Эти результаты относятся к случаю дисков, имеющих толщину, не являющуюся пренебрежимо малой. Кроме того, предполагалось, что она меняется по мере удаления от центра.

В настоящей работе исследован спектр оператора для галактического диска, расширяющегося по мере удаления от центра (данная задача соответствует реальным астрофизическим объектам). Ввиду сложности уравнений мы решаем ее численно, используя метод обратных итераций. Для этого приходится решать цепочку систем линейных уравнений.

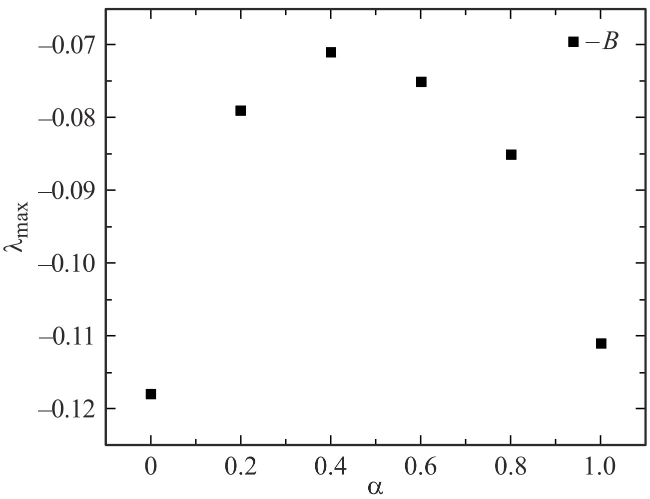

Рис. 1. Инкремент роста доминирующей моды в задаче о транспорте пассивного скаляра как функция степени квазипериодичности течения α.

1. Спектральные задачи для полей, квазипериодических по пространству

При рассмотрении задач о генерации магнитного поля турбулентным течением естественно пробовать моделировать такое течение квазипериодическим полем. Тогда задачу о динамо можно решать псевдоспектральными методами с разложением искомых магнитных мод в конечные ряды Фурье. Если для дискретизации для каждого из основных периодов используется N гармоник Фурье, мода описывается N^6 армониками, из-за чего задача оказывается весьма вычислительно сложной. В связи с этим указанный подход к решению задачи о динамо мы протестировали на примере вычисления доминирующих мод оператора транспорта пассивного скаляра. С учетом диффузии скалярной примеси он имеет вид

$$L[c] = k\Delta c - (\mathbf{u}\nabla)c,$$

где k — коэффициент диффузии, $\mathbf{u}$ — поле скорости, а c — скалярное поле концентрации примеси. Этот оператор описывает эволюцию скалярных полей (таких как температура или концентрация химического реагента в объеме жидкости) и используется для статистического анализа турбулентности (см., например, [6]). С вычислительной точки зрения он во многом подобен оператору магнитной диффузии. Однако, тогда как в кинематическом динамо по теореме Я.Б. Зельдовича [7] генерация возможна только для трехмерного течения, в данной задаче можно ограничиться выбором двумерного $\mathbf{u}$, зависящего от двух декартовых переменных, что уменьшает число расчетных гармоник Фурье до N^4 и требует существенно меньших оперативной памяти и объема вычислений.

Модельное течение задается как суперпозиция

$$\mathbf{U} = \alpha\boldsymbol{\nu} + (1-\alpha)\mathbf{w},$$

где пространственно-периодичные $\boldsymbol{\nu}(\mathbf{x})$ и $\mathbf{w}(\mathbf{x})$ имеют несоизмеримые периоды $L_{\boldsymbol{\nu}_j}$ и L_{w_j} по декартовой координате x_j, а параметр $0 \le \alpha \le 1$ можно интерпретировать как „степень квазипериодичности“ течения $\mathbf{u}$. Условия соленоидальности $\mathrm{div}(\mathbf{u}) = 0$ в терминах коэффициентов Фурье $\boldsymbol{\nu}_\mathbf{k}$ и $\mathbf{w}_\mathbf{k}$ имеют вид $\mathbf{k}_{\boldsymbol{\nu}}\boldsymbol{\nu}_\mathbf{k} = \mathbf{k}_\mathbf{w}\mathbf{w}_\mathbf{k} = 0$, где $\mathbf{k}_{\boldsymbol{\nu}} = 2\pi(n_1/L_{\boldsymbol{\nu}_1}, n_2/L_{\boldsymbol{\nu}_2})$, $\mathbf{k}_\mathbf{w} = 2\pi(m_1/L_{\mathbf{w}_1}, m_2/L_{\mathbf{w}_2})$ — волновые векторы, n_j и m_j — целые числа. Соленоидальные поля $\boldsymbol{\nu}$ и $\mathbf{w}$ синтезированы как конечные ряды Фурье ($N = 32$ гармоники по каждому декартовому направлению) с соответствующими периодичностями, псевдослучайными коэффициентами и экспоненциально убывающим энергетическим спектром. Мода с представляется в виде

$$c = \sum_{\mathbf{n},\mathbf{m}} c_{\mathbf{n},\mathbf{m}} \exp[i(\mathbf{k}_{\boldsymbol{\nu}} + \mathbf{k}_\mathbf{w})\mathbf{x}].$$

На рис. 1 показаны предварительные результаты расчетов для периодов $L_{\boldsymbol{\nu}} = 2\pi$, $L_\mathbf{w} = 2^{3/2}\pi$ и коэффициента диффузии $k = 0.1$. Невязки вычисления собственных мод не превосходят 10^{-4}. Согласно рис. 1, затухание доминирующей моды в рассматриваемой задаче в средней части интервала $0 \le \alpha \le 1$ существенно меньше, чем для периодических течений на границах этого интервала. Это можно интерпретировать как благоприятность квазипериодичности течения для улучшения перемешиваемости переносимого скаляра.

Данный эксперимент показал применимость предложенного подхода к расчету доминирующих мод для квазипериодических полей скорости; в дальнейшем планируется применить его для более сложных объектов при решении задачи о действии в них кинематического динамо.

2. Спектральная задача для RZ-модели в расширяющемся диске

Эволюция крупномасштабного магнитного поля описывается уравнением динамо среднего поля. При использовании RZ-модели основная компонента поля — азимутальная. В безразмерных переменных (когда расстояния измеряются в единицах радиуса объекта) азимутальное поле B подчиняется следующему дифференциальному уравнению [8]:

$$\partial B/\partial t = D^{1/2}B + D^{1/2}z\partial B/\partial z$$
$$+ \lambda^2(\partial^2 B/\partial z^2 + \partial^2 B/\partial r^2 + \partial B/r\partial r - B/r^2),$$

заданному в безразмерных переменных (расстояния измеряются в радиусах галактики) в области $0 < r < 1$, $-h(r) < z < h(r)$, $h(r) = h_0(r/r_0)^{9/8}$, на границе которой поле обращается в нуль. Здесь D — динамо-число, характеризующее одновременное действие α-эффекта и дифференциального вращения.

Переход к задаче на собственные значения осуществляется стандартной подстановкой

$$B(r, z, t) = B(r, z)\exp(\gamma t).$$

Далее переходим от переменной z к масштабированной координате

$$X = z/h(r)$$

с последующим разделением переменных:

$$B(r, x) = R(r)X(x).$$

Далее решаем задачи по переменным x и r. Задача на собственные значения для $R(r)$ включает в себя производные вплоть до второго порядка:

$$\gamma R = \hat{A}R;$$
$$\hat{A} = [D^{1/} - \lambda^2/r^{25/8} + \kappa_m/r^{9/8}]$$
$$+ \lambda^2/r^2 R + \lambda^2/r d/dr + \lambda^2 d^2/dr^2;$$
$$R(r_{\min}) = R(1) = 0,$$

где $\kappa_m = \lambda^2\pi^2 m^2/4$ — собственное значение, соответствующее моде $X_m(x)$.

Оценим теперь численно собственные функции и собственные значения. Для этого применен метод обратных итераций. Он особенно эффективен для вычисления нескольких первых собственных значений несамосопряженного оператора. Используя некоторую начальную аппроксимацию собственного вектора, метод последовательно улучшает ее итерациями

$$R_{k+1} = \big((\hat{A} - \sigma\hat{E})^{-1}R_k\big)/C_k,$$

где C_k — нормирующие константы, а σ — аппроксимация искомого собственного значения.

Дискретизировав уравнения конечными разностями второго порядка с учетом граничных условий $R(r_{\min}) = R(1) = 0$ [9], мы получили матричное представление уравнений в виде трехдиагональных систем. Решение этих систем проводилось методом прогонки. Однако в нашей задаче, из-за некоторых приближений,

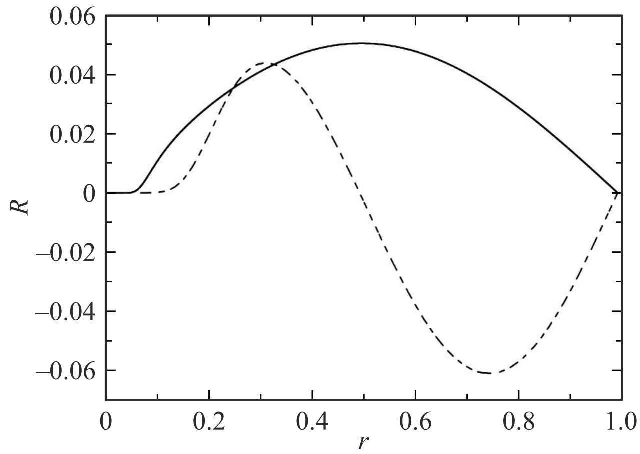

Рис. 2. Старшие радиальные собственные функции. Сплошная кривая — $R_1(r)$, штриховая — $R_2(r)$.

нарушается условие диагонального преобладания, что делает классическую схему неустойчивой. Для обеспечения устойчивости численного решения за счет учета возможных знакопеременных коэффициентов мы использовали модифицированный алгоритм немонотонной прогонки.

На рис. 2 представлены первая и вторая найденные собственные функции. Для собственных значений при $D = 10$ получаем $\gamma_1 = 3.1$, что означает возможность генерации магнитного поля. В то же время для мод высоких порядков приходится вести речь о затухании.

Выводы

В работе исследованы задачи на собственные значения, возникающие при генерации магнитных полей галактик. Для этого изучено модельное уравнение, описывающее рост мелкомасштабной компоненты. Также изучен процесс роста магнитного поля в „толстом“ диске с меняющейся толщиной, получены старшие собственные функции. Показано, что для реалистичных значений динамо-чисел рост возможен лишь для старшей радиальной моды.

Финансирование работы

Работа В.А. Желиговского и А.А. Таранюка по поиску спектра оператора адвекции выполнена в рамках темы НИР госзадания Института теории прогноза землетрясений и математической геофизики РАН „Развитие методов моделирования геодинамических процессов и решение задач математической геофизики“ № 124020900028-0. Работа М.В. Фроловой по исследованию спектра оператора для крупномасштабного динамо выполнена при поддержке Фонда развития теоретической физики и математики „БАЗИС“ (проект 24-2-2-36-1). Работа Е.А. Михайлова по общей постановке задачи о действии динамо и анализу полученных собственных значений выполнена при поддержке Московского центра фундаментальной и прикладной математики МГУ имени М.В. Ломоносова по соглашению № 075-15-2025-345.

Благодарности

Работа выполнена с использованием оборудования Центра коллективного пользования сверхпроизводительными вычислительными ресурсами МГУ им. М.В. Ломоносова.

Конфликт интересов

Авторы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

Список литературы

[1] R. Beck, A. Brandenburg, D. Moss, A. Shukurov, D. Sokoloff. Ann. Rev. Astron. Astrophys., **34**, 155 (1996). DOI: 10.1146/annurev.astro.34.1.155

[2] H.K. Moffatt. *Magnetic field generation in electrically conducting fluids* (Cambridge Univ. Press, 1978)

[3] T. Arshakian, R. Beck, M. Krause, D. Sokoloff. Astron. Astrophys., **494**, 21 (2009). DOI: 10.1051/0004-6361:200810964

[4] D. Moss. Mon. Not. R. Astr. Soc., **275**, 191 (1995). DOI: 10.1093/mnras/275.1.191

[5] E.A. Mikhailov, V.V. Pushkarev. Res. Astronom. Astrophys., **21**, 56 (2021). DOI: 10.1088/1674-4527/21/3/056

[6] G. Falkovich, K. Gawedzki, M. Vergassola. Rev. Mod. Phys., **73**, 913 (2001). DOI: 10.1103/RevModPhys.73.913

[7] Я.Б. Зельдович. ЖЭТФ, **31**, 154 (1956).

[8] E. Mikhailov, M. Pashentseva. Mathematics, **11**, 3106 (2023). DOI: 10.3390/math11143106

[9] Н.Н. Калиткин. *Численные методы* (Наука, М., 1978)