Линейная стадия эволюции электронно-дырочных лавин в полупроводниках

© А.С. Кюрегян ¶

Всероссийский электротехнический институт им. В.И. Ленина,
111250 Москва, Россия

(Получена 12 марта 2007 г. Принята к печати 27 марта 2007 г.)

Получено полное аналитическое решение задачи о линейной стадии эволюции электронно-дырочных лавин в однородном и постоянном внешнем электрическом поле E_{ext}. Теория учитывает дрейф, диффузию и ударную ионизацию электронов и дырок и позволяет вычислить пространственно-временны́е распределения полей и зарядов, а также все основные параметры лавин вплоть до начала проявления нелинейных эффектов в момент времени t_a. Выведены формулы для групповой скорости лавины и скорости распространения ее лидирующих фронтов. Показано, что время t_a следует определять из условия уменьшения коэффициентов ударной ионизации α в центре лавины на заданную малую величину η. Получено трансцендентное уравнение, позволяющее рассчитать t_a как функцию η, невозмущенного значения $\alpha(E_{\text{ext}})$ и других параметров полупроводника. Обнаружено, что при увеличении $\alpha(E_{\text{ext}})$ на 2 порядка полное число рожденных к моменту t_a пар уменьшается почти на 3 порядка.

PACS: 72.20.Ht, 72.20.Jv, 85.30.De, 85.30.Mn, 85.30.Kk, 52.80.-s, 51.50.+v

1. Введение

Электрический пробой длинных промежутков, заполненных газом при больших давлениях, обычно начинается с электронных лавин, которые превращаются в стримеры после прохождения лавиной некоторого критического расстояния [1,2]. Подобное развитие пробоя возможно и в полупроводниках, в частности в сильно перенапряженных $p-n$-переходах [3,4], однако электронно-дырочные лавины должны существенно отличаться от электронных лавин в газах. Причиной этого различия является то, что все кинетические коэффициенты электронов и дырок в полупроводниках соизмеримы, тогда как в газах и ударная ионизация, и перенос заряда осуществляются главным образом электронами. В недавнем сообщении автора [5] была предложена первая аналитическая теория электронно-дырочной лавины, позволяющая вычислить ее основные параметры до начала искажения внешнего поля объемным зарядом лавины и определить время t_a начала лавинно-стримерного перехода (ЛСП). В настоящей работе эволюция электронно-дырочной лавины в однородном и постоянном электрическом поле $(-E_{\text{ext}})$ изучена более подробно. В отличие от [5] учтена продольная диффузия носителей заряда, что позволило не только значительно повысить точность вычисления времени t_a и остальных параметров лавины (особенно в сильном внешнем поле и при больших коэффициентах диффузии), но и упростить сами вычисления и конечные формулы. Кроме того, найдены групповая скорость лавины и скорости распространения ее фронтов.

Для описания распределения электронов $n(t,\mathbf{r})$ и дырок $p(t,\mathbf{r})$ в лавине мы использовали систему уравнений непрерывности

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \nabla(\mathbf{v}_e n - D_e \nabla n) = \frac{\partial p}{\partial t} + \nabla(\mathbf{v}_h p - D_h \nabla p) = (g_e n + g_h p) \qquad (1)$$

с начальными и граничными условиями

$$n(\mathbf{r},0) = p(\mathbf{r},0) = n_0(\mathbf{r}), \quad n(\infty,t) = p(\infty,t) = 0, \qquad (2)$$

где $D_{e,h}$, $\mathbf{v}_{e,h}$, $\alpha_{e,h}$ и $g_{e,h} = \alpha_{e,h}\nu_{e,h}$ — коэффициенты диффузии, средние дрейфовые скорости, коэффициенты и частоты ударной ионизации, индексы „e“ и „h“ относятся к электронам и дыркам соответственно. Этих уравнений достаточно до тех пор, пока искажение внешнего поля объемным зарядом лавины пренебрежимо мало. Граничные условия (2) подразумевают, что размеры лавины значительно меньше расстояния между электродами d. Если зародышем лавины является единичная электронно-дырочная пара, возникшая в точке $\mathbf{r} = 0$ в момент времени $t = 0$, то следует использовать начальное условие в виде δ-функции Дирака $n_0(\mathbf{r}) = \delta(\mathbf{r})$. Однако сначала в разд. 2 мы рассмотрим случай плоского одномерного начального возмущения. Это целесообразно сделать по двум причинам. Во-первых, одномерное решение имеет самостоятельную ценность, так как позволяет описать начальную стадию эволюции плоских волн ударной ионизации, представление о которых широко используется для описания динамики пробоя перенапряженных $p-n$-переходов (см., например, последние работы [6,7] и приведенный в них список литературы). Во-вторых, как будет показано в разд. 3, его можно использовать для описания линейных (т. е. проинтегрированных по площади) плотностей носителей заряда в электронной лавине, порожденной точечным начальным возмущением, в частности единичной электронно-дырочной парой. В разд. 4 будет дана оценка длительности стадии линейной эволюции начального возмущения,

¶ E-mail: ask@vei.ru

которая в случае $n_0(\mathbf{r}) = \delta(\mathbf{r})$ равна времени начала ЛСП t_a. Наконец, в Заключении суммированы основные результаты работы.

2. Одномерное начальное возмущение

Если начальное возмущение зависит только от одной координаты x, то уравнения (1) принимают вид

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\left(\nu_e n - D_e \frac{\partial n}{\partial x}\right) = \frac{\partial p}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x}\left(\nu_h p + D_h \frac{\partial p}{\partial x}\right) = (g_e n + g_h p). \quad (3)$$

Решение задачи Коши (2), (3) можно получить, используя преобразования Фурье по координате и Лапласа по времени. В системе координат $z = (x - Vt)$, движущейся относительно кристаллической решетки вдоль поля со скоростью V, плотность объемного заряда $Q = q(p - n)$ и напряженность создаваемого этим зарядом поля $E_a(z, t)$ представимы в виде

$$Q(z, t) = -\frac{q}{\pi} \times \int_{-\infty}^{\infty} \bar{n}_0(k)(i\nu_+ k - D_- k^2)\left[\frac{e^{\omega_+ t} - e^{\omega_- t}}{s_+ - s_-}\right] e^{ikz} dk, \quad (4)$$

$$E_a(z, t) = \frac{q}{\pi\varepsilon} \times \int_{-\infty}^{\infty} \bar{n}_0(k)(\nu_+ + iD_- k)\left[\frac{e^{\omega_+ t} - e^{\omega_- t}}{s_+ - s_-}\right] e^{ikz} dk, \quad (5)$$

где $\omega_\pm = s_\pm(k) + iVk$, q — элементарный заряд, ε — диэлектрическая проницаемость полупроводника,

$$s_\pm(k) = g_+ - i\nu_- k - D_+ k^2 \pm \sqrt{\left(g_- - i\nu_+ k - D_- k^2\right)^2 + g_e g_h} \quad (6)$$

— решения дисперсионного уравнения задачи (3), $\bar{n}_0(k) = \int_{-\infty}^{\infty} n_0(x) e^{-ikx} dx$, $g_\pm = (g_e \pm g_h)/2$, $\nu_\pm = (\nu_e \pm \nu_h)/2$, $D_\pm = (D_e \pm D_h)/2$. Для оценки интегралов (4), (5) при больших t можно воспользоваться методом перевала. Так как

$$\omega_\pm(i\lambda) = g_+ - (V - \nu_-)\lambda + D_+\lambda^2 \pm \sqrt{\left(g_- + \nu_+\lambda + D_-\lambda^2\right)^2 + g_e g_h}, \quad (7)$$

то $\operatorname{Im}\omega(i\lambda) = 0$ и седловые точки $k_\pm^V$ функций $\omega_\pm(k)$ расположены на мнимой оси комплексной плоскости $k = \kappa + i\lambda$, т.е. $k_\pm^V = i\lambda_\pm^V$, а $\lambda_\pm^V$ определяется из условий минимума $\omega_\pm(i\lambda)$:

$$\left.\frac{\partial\omega_\pm(i\lambda)}{\partial\lambda}\right|_{\lambda=\lambda_\pm^V} = 0, \quad \left.\frac{\partial^2\omega_\pm(i\lambda)}{\partial\lambda^2}\right|_{\lambda=\lambda_\pm^V} > 0. \quad (8)$$

Подстановка (7) в (8) дает уравнение для $\lambda_\pm^V$ при заданной скорости V:

$$V = \nu_- + 2D_+\lambda_\pm^V \pm \frac{\left(\nu_+ + 2D_-\lambda_\pm^V\right)\left[g_- + \nu_+\lambda_\pm^V + D_-(\lambda_\pm^V)^2\right]}{\sqrt{\left[g_- + \nu_+\lambda_\pm^V + D_-(\lambda_\pm^V)^2\right]^2 + g_e g_h}}. \quad (9)$$

При деформировании исходного контура интегрирования (действительной оси) в содержащий точку $k_\pm^V$ контур „наискорейшего спуска“ C^V можно игнорировать существование точек ветвления у $s_\pm(k)$, так как, несмотря на это, функция в квадратных скобках под интегралами (4), (5) является целой.

Анализ формулы (7) показывает, что не только $\omega_+(i\lambda) > \omega_-(i\lambda)$ при любых λ, но и $\omega_+(i\lambda_+^V) > \omega_-(i\lambda_-^V)$ при всех разумных соотношениях между кинетическими коэффициентами электронов и дырок. Поэтому асимптотика $Q(z, t)$ для больших t и любых z определяется первым слагаемым в (4) и должна вычисляться по формуле

$$Q(z, t) \propto \int_{C^V} \exp[\omega_+(k)t + ikz] dk \propto \frac{1}{\sqrt{\Delta_+ t}} \exp\left[\omega_+(i\lambda_+^V)t - \lambda_+^V z - \frac{z^2}{4\Delta_+ t}\right], \quad (10)$$

коль скоро между действительной осью и контуром C^V нет особых точек функции $n_0(k)$. Это последнее условие выполняется, если начальное возмущение достаточно сильно локализовано, например, по экспоненциальному закону

$$n(x, 0) \propto \exp(-|\lambda_0 x|) \quad (11)$$

при $|\lambda_0| > |\lambda_+^V|$ или по функции Гаусса, для которой формально $|\lambda_0| = \infty$. В противном случае контур интегрирования при деформировании „зацепляется“ за особую точку $i\lambda_0$, обход которой по соответствующему контуру C_0 дает основной вклад в асимптотику $Q(x, t)$, так как по определению $\omega_+(i\lambda_+^V) < \omega_+(i\lambda_0)$. Поэтому для начального возмущения вида (11) при $|\lambda_0| < |\lambda_+^V|$ получается

$$Q(z, t) \propto \int_{C_0} \exp[\omega_+(k)t + ikz] \frac{dk}{k^2 + \lambda_0^2} \propto \exp[\omega_+(i\lambda_0)t - \lambda_0 z]. \quad (12)$$

В медленно движущихся системах координат инкремент нарастания возмущения $\omega_+(i\lambda_+^V)$ или $\omega_+(i\lambda_0)$ положителен, т.е. ионизационная неустойчивость абсолютна. Однако с ростом $|V|$ характер неустойчивости должен смениться на конвективный [8]. Очевидно, это происходит при $V = V_c$, где критическая скорость V_c

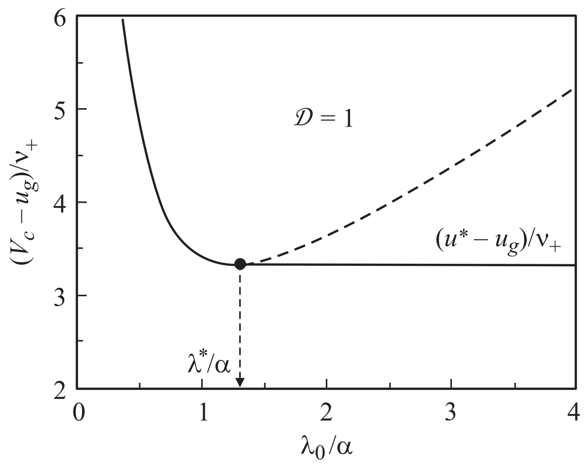

Рис. 1. Зависимость скорости распространения фронта от масштаба затухания начального возмущения при $D_e = D_h = D$, $g_e = g_h = g$ и $\mathscr{D} = D\hat{\alpha}/\nu_+ = 1$. Пунктиром указана нереализуемая зависимость $V_c(\lambda_0)$ в области значений $\lambda_0 > \lambda^*$

определяется из условий

$$\omega_+(i\lambda^*) = 0 \quad \text{или} \quad \omega_+(i\lambda_0) = 0. \qquad (13)$$

Поэтому при $|\lambda_0| > |\lambda^*|$ имеем $V_c = u^* = s_+(i\lambda^*)/\lambda^*$, где λ^* является корнем вытекающего из (8), (13) уравнения [9]

$$\frac{s_+(i\lambda^*)}{\lambda^*} = \left.\frac{\partial s_+(i\lambda)}{\partial \lambda}\right|_{\lambda=\lambda^*}, \qquad (14)$$

или, что то же самое,

$$(D_+\lambda^{*2} - g_+)\sqrt{\left(g_- + \nu_+\lambda^* + D_-\lambda^{*2}\right)^2 + g_e g_h}$$
$$= g_+^2 + g_-\nu_+\lambda^* - D_-\lambda^{*3}(\nu_+ + D_-\lambda^*). \qquad (15)$$

Если же $|\lambda_0| < |\lambda^*|$, то из (13) следует, что $V_c = s_+(i\lambda_0)/\lambda_0$, или (см. (6), (7))

$$V_c(\lambda_0) = \Bigg[g_+ + \nu_-\lambda_0 + D_+\lambda_0^2$$
$$+ \sqrt{\left(g_- + \nu_+\lambda_0 + D_-\lambda_0^2\right)^2 + g_e g_h}\,\Bigg]\lambda_0^{-1}. \qquad (16)$$

Легко видеть, что уравнение (15) эквивалентно условию $\partial V_c/\partial\lambda_0\big|_{\lambda_0=\lambda^*}$ минимума функции $V_c(\lambda_0)$, так что $u^* = V_c(\lambda^*)$ — минимально возможная критическая скорость [9]. Пример зависимости $V_c(\lambda_0)$ приведен на рис. 1.

Величины u^* или $V_c(\lambda_0)$ определяют скорости движения систем координат, в которых инкремент нарастания неустойчивости равен нулю, а $|\lambda^*|$ или $|\lambda_0|$ — соответствующие масштабы затухания возмущения в направлениях движения систем координат. Другими словами, можно сказать, что u^* и $V_c(\lambda_0)$ являются скоростями, с которыми движутся лидирующие области фронтов возмущения в пределе $t \to \infty$ при сильной ($|\lambda_0| > |\lambda^*|$) и слабой $|\lambda_0| < |\lambda^*|$ начальной локализации [9]. Простые формулы для u^* и λ^* получаются только в некоторых предельных случаях. Например, в „газовом пределе“ (т.е. при $g_h = 0$, $\nu_h = 0$, $D_h = 0$) [10,11]

$$u^* = \nu_e + 2D_e\lambda^*, \quad \lambda^* = \pm\sqrt{g_e/D_e}, \qquad (17)$$

а в случае биполярных переноса и ударной ионизации при $D_e = D_h = D$, $g_e = g_h = g$

$$u^* = \nu_- + \frac{D}{2}\left(3 + \sqrt{1 + \frac{4}{\mathscr{D}}}\right)\lambda^*,$$

$$\lambda^* = \pm\hat{\alpha}\sqrt{\frac{1}{2}\left(\frac{2}{\mathscr{D}} - 1 + \sqrt{1 + \frac{4}{\mathscr{D}}}\right)}, \qquad (18)$$

где $\hat{\alpha} = g/\nu_+$, $\mathscr{D} = \hat{\alpha}D/\nu_+$. Следует отметить, что знаки „$\pm$“ в (17) и (18) никак не связаны с выбором ветви закона дисперсии $s_\pm(k)$, поскольку в любом случае инкремент нарастания определяется величиной $\omega_+(i\lambda_+^V)$. Они отражают существование двух пар значений (u^*, λ^*) (или (u_0, λ_0) при $|\lambda_0| < |\lambda^*|$), характеризующих распространение правого и левого фронтов. Чтобы возмущение затухало при $z \to \pm\infty$, очевидно, нужно выбирать значения $\lambda^*, \lambda_0 > 0$ для правого фронта ($z > 0$) и $\lambda^*, \lambda_0 < 0$ для левого фронта ($z < 0$). Разумеется, в общем случае соответствующие значения λ^*, λ_0 отличаются не только знаком, но и абсолютной величиной.

В процессе своей эволюции возмущение не только расширяется, но и смещается как целое со своей „групповой“ скоростью u_g, т.е. со скоростью системы координат, в которой инкремент нарастания максимален [8]. Следовательно, при $V = u_g$ должны выполняться условия

$$\left.\frac{\partial\omega_+(i\lambda_+^V)}{\partial V}\right|_{V=u_g} = 0, \quad \left.\frac{\partial^2\omega_+(i\lambda_+^V)}{\partial V^2}\right|_{V=u_g} < 0. \qquad (19)$$

Нетрудно убедиться с учетом (8), что это происходит, когда в соответствии с общей теорией [8] седловая точка расположена на действительной оси, т.е. при $\lambda_+^V = 0$. Подстановка этого значения в (7) и (9) сразу дает формулы

$$\max\omega_+ = (g_e + g_h) \quad \text{и} \quad u_g = \frac{g_e\nu_e - g_h\nu_h}{g_e + g_h}, \qquad (20)$$

которые верны при любых $\lambda_0 \neq 0$. Заметим, что при $V = u_g$ первый член асимптотического разложения $Q(z,t)$, пропорциональный $1/\sqrt{t}$, равен нулю в точке $z = 0$. Это означает, что в неподвижной системе координат точка, где $Q(z,t) = 0$, также движется со скоростью u_g при больших t. Если же $D_e = D_h = D$, $g_e = g_h = g$, то $u_g = \nu_-$, поэтому при симметричном начальном возмущении и $V = u_g$ формулы (4), (5) принимают вид

$$Q(z,t) = -\frac{q\hat{\alpha}}{\pi}\, e^{\tau}$$

$$\times \int\limits_{-\infty}^{\infty} \bar{n}_0(\hat{\alpha}\xi)\xi \sin(\hat{\alpha}z\xi) e^{-\mathscr{D}\xi^2} \frac{\operatorname{sh}\left(\tau\sqrt{1-\xi^2}\right)}{\sqrt{1-\xi^2}}\, d\xi, \quad (21)$$

$$E_a(z,t) = -\frac{q}{\pi\varepsilon}\, e^{\tau}$$

$$\times \int\limits_{-\infty}^{\infty} \bar{n}_0(\hat{\alpha}\xi) \cos(\hat{\alpha}z\xi) e^{-\mathscr{D}\xi^2} \frac{\operatorname{sh}\left(\tau\sqrt{1-\xi^2}\right)}{\sqrt{1-\xi^2}}\, d\xi, \quad (22)$$

где $\tau = gt$. Как видно, в этом частном случае точка, где $Q(z,t) = 0$, а концентрации носителей заряда и поле возмущения максимальны, расположена точно в начале координат системы с $V = u_g$ при любых t. Если выполнено условие применимости метода перевала

$$\tau > \frac{4}{\Delta}\max(1, \hat{\alpha}^2/\lambda_0^2), \quad (23)$$

то приемлемую точность дают главные члены асимптотических разложений интегралов в (21), (22), поэтому

$$Q(z,t) \approx -\frac{q\bar{n}_0(0)\hat{\alpha}^2 z}{\sqrt{2\pi}(\Delta\tau)^{3/2}} \exp\left[2\tau - \frac{(\hat{\alpha}z)^2}{2\Delta\tau}\right], \quad (24)$$

$$E_a(z,t) \approx \frac{q\bar{n}_0(0)}{\varepsilon\sqrt{2\pi\Delta\tau}} \exp\left[2\tau - \frac{(\hat{\alpha}z)^2}{2\Delta\tau}\right], \quad (25)$$

где $\Delta = (1 + 2\mathscr{D})$. Максимум плотности объемного заряда достигается в точках $z = \pm z_Q$ и равен

$$Q(z_Q,t) \approx \frac{\mp 1}{\sqrt{2\pi e}} \frac{q\bar{n}_0(0)\hat{\alpha}}{\Delta\tau} \exp(2\tau), \quad (26)$$

где $z_Q = v_+ t\sqrt{\Delta/\tau}$. Из (25) следует, что отношение заряда возмущения в областях $z > 0$ и $z < 0$ к заряду всех электронов $q\bar{n}_0(0)\exp(2\tau)$ равно $(2\pi\Delta\tau)^{-1/2}$. Это означает, что при больших τ заряды большинства электронов и дырок в лавине компенсируют друг друга и лишь малая часть (около 15%) влияет на искажение внешнего поля.

3. Точечное начальное возмущение — электронно-дырочная лавина

Прежде всего заметим, что интегрирование (1) по плоскости $\boldsymbol{\rho} \perp x$ с учетом граничных условий (2) приводит к системе уравнений для функций $\mathscr{N}_{n,p}(x,t) = \int n, p(\mathbf{r},t)d\boldsymbol{\rho}$, которая точно совпадает с (3). Поэтому все результаты предыдущего раздела, каксающиеся плоского начального возмущения, можно использовать для описания эволюции *линейных* плотностей электронов $\mathscr{N}_n$, дырок $\mathscr{N}_p$ и объемного заряда $q(\mathscr{N}_p - \mathscr{N}_n)$ с начальными условиями $\mathscr{N}_{n,p}(x,0) = \int n_0(\mathbf{r})d\boldsymbol{\rho}$ и в трехмерном случае.[1] Однако для вычисления искажения внешнего поля необходимо еще знать радиальное распределение объемного заряда. Его нетрудно найти для начального возмущения типа $n_0(\mathbf{r}) = n_0^x(x)n_0^\rho(\rho)$ в частном случае $D_e = D_h = D$, когда „работает“ метод разделения переменных и аксиально-симметричное решение представимо в виде[2] $n, p(\mathbf{r},t) = \mathscr{N}_{n,p}(x,t)R(\rho,t)$, так что

$$Q(\mathbf{r},t) = -i\,\frac{q}{\pi}\, v_+ R(\rho,t) \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{\omega_+ t} - e^{\omega_- t}}{s_+ - s_-}\, e^{ikz} k\,dk. \quad (27)$$

В частности, это относится также к эволюции начального возмущения в виде единичной электронно-дырочной пары, для которой $n_0(\mathbf{r}) = \delta(\mathbf{r})$ и $R(\rho,t) = (4\pi Dt)^{-1}\exp(-\rho^2/4Dt)$.

Очевидно, продольное поле объемного зраяда лавины $E_a^{\parallel}(\mathbf{r},t)$ максимально на ее оси. Для вычисления $E_a^{\parallel}(z,t)$ удобно воспользоваться формулой

$$E_a^{\parallel}(z,t) = \frac{1}{2\pi\varepsilon} \int \frac{(z'-z)Q(\mathbf{r}',t)}{\left[(z-z')^2 + \rho^2\right]^{3/2}}\, dz' d\boldsymbol{\rho}. \quad (28)$$

Подставляя (27) в (28), получим после интегрирования по $\mathbf{z}'$ и $\boldsymbol{\rho}$

$$E_a^{\parallel}(z,t) = \frac{q v_+}{4\pi^2\varepsilon}$$

$$\times \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{\omega_+ t} - e^{\omega_- t}}{s_+ - s_-} e^{-ikz + k^2 Dt} \operatorname{Ei}(-k^2 Dt) k^2 dk, \quad (29)$$

где $\operatorname{Ei}(z)$ — интегральная показательная функция. Если, кроме уже использованного при выводе (27), (29) равенства $D_e = D_h = D$, еще положить $g_e = g_h = g$, то в системе координат с $V = u_g = v_-$ формула (29) принимает вид

$$E_a^{\parallel}(z,t) = \frac{q\hat{\alpha}^2}{2\pi^2\varepsilon}\, e^{\tau}$$

$$\times \int\limits_{-\infty}^{\infty} \cos(\hat{\alpha}z\xi) \frac{\operatorname{sh}\left(\tau\sqrt{1-\xi^2}\right)}{\sqrt{1-\xi^2}} \operatorname{Ei}(-\xi^2\mathscr{D}\tau)\xi^2 d\xi. \quad (30)$$

Формулы (29), (30) содержат одно из главных отличий локализованной в плоскости $\boldsymbol{\rho}$ лавины от одномерного возмущения: внешнее поле $(-E_{\text{ext}})$ не только ослабляется в центральных областях лавины, но и усиливается на периферии. Пример типичных зависимостей $E_a^{\parallel}(z,t)$, полученных путем численного интегрирования (30), приведен на рис. 2. Видно, что $E_a^{\parallel}(z,t)$ максимально в

[1] Для этого лишь необходимо, чтобы функция $n_0(\mathbf{r})$ была достаточно сильно локализована в плоскости $\boldsymbol{\rho}$.

[2] Такая процедура пригодна для вычислений также в случае, когда $D_e \neq D_h$, но одна из величин $g_{e,h}$ равна нулю. Получающееся при этом решение описывает эволюцию электронной лавины в газах (см., например, [2]).

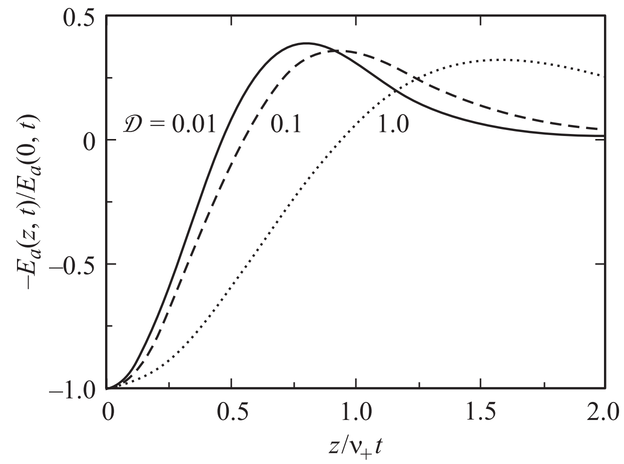

Рис. 2. Зависимости напряженности поля лавины на оси симметрии от координаты при $\tau = 6$ и различных значениях параметра $\mathscr{D} = \hat{\alpha} D/\nu_+$.

точке $z = 0$. При $\Delta\tau > 4$ главный член асимптотического разложения (30) равен

$$E_a^{\parallel}(0,t) \approx \frac{q\hat{\alpha}^2}{\varepsilon} \frac{e^{2\tau}}{(2\pi\tau)^{3/2}} f(\mathscr{D}), \qquad (31)$$

где

$$f(\mathscr{D}) = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} \int\limits_0^\infty \sqrt{y}\exp(-y/2)\mathrm{Ei}(-\mathscr{D}y)dy.$$

После дифференцирования этого равенства по $\mathscr{D}$ интеграл в правой части сводится к элементарным функциям. Решение получившегося таким образом дифференциального уравнения для функции $f(\mathscr{D})$ с очевидным граничным условием $f(\infty) = 0$ имеет вид $f(\mathscr{D}) = [\mathrm{arcth}(\sqrt{\Delta}) - 1/\sqrt{\Delta}]$. Численное решение уравнения $\partial E_a^{\parallel}(z,t)/\partial z = 0$ показывает, что при больших τ усиление внешнего поля на оси максимально в точках $z = \pm z_E$, где $z_E \approx \nu_+ t\sqrt{7(3\mathscr{D}+1)/2\tau}$. Как видно из рис. 2, обычно ослабление внешнего поля $(-E_{\mathrm{ext}})$ в центре лавины значительно превосходит его усиление на периферии. В диапазоне значений $D = 10^{-4}$–10 с ошибкой не более 7% выполняется соотношение

$$E_a^{\parallel}(0,t) \approx -E_a^{\parallel}(z_E,t)\left[5/2 + \ln(1+\sqrt{\mathscr{D}}/2)\right]. \qquad (32)$$

Поперечное поле $E_a^{\perp}(\mathbf{r},t)$ оказывает заметное влияние на развитие лавины только в слабых полях и при малых коэффициентах диффузии [5], когда $\sqrt{\Delta/\mathscr{D}} \gg 1$ и длина лавины (порядка $4z_Q$) много больше ее радиуса (порядка $2\sqrt{Dt}$). В этом случае для вычисления $E_a^{\perp}(\mathbf{r},t)$ на расстояниях от оси $\rho \approx 2\sqrt{Dt}$ можно воспользоваться приближением равномерно заряженной нити, которое дает

$$E_a^{\perp}(\mathbf{r},t) \approx \frac{q\hat{\alpha}^2 z}{\varepsilon\rho(2\pi\Delta\tau)^{3/2}} \exp\left(2\tau - \frac{\hat{\alpha}^2 z^2}{2\Delta\tau}\right) \times \left[1 - \exp\left(\frac{-\hat{\alpha}^2\rho^2}{4\mathscr{D}\tau}\right)\right]. \qquad (33)$$

Наибольшее значение $|E_a^{\perp}(\mathbf{r},t)|$ достигается на окружностях $\{z = \pm z_Q,\ \rho = 2.14\sqrt{Dt}\}$, где

$$E_a^{\perp}(\mathbf{r},t) = E_M^{\perp}(t) \approx \frac{\pm q\hat{\alpha}^2}{8\pi^2\varepsilon\tau^{3/2}\Delta\sqrt{\mathscr{D}}} e^{2\tau}. \qquad (34)$$

Сравнение (34) с (31) показывает, что отношение $E_M^{\perp}(t)/E_a^{\parallel}(0,t)$ не зависит от времени, причем $E_M^{\perp}(t) < E_a^{\parallel}(0,t)$ при $\mathscr{D} > 10^{-5}$, а в наиболее интересном интервале значений $\mathscr{D} > 10^{-2}$ оказывается $E_M^{\perp}(t) = (0.12$–$0.18)E_a^{\parallel}(0,t)$.

4. Длительность линейной стадии эволюции возмущения

Полученные выше результаты верны до начала проявления нелинейных эффектов, которые вызываются искажением внешнего поля $(-E_{\mathrm{ext}})$ объемным зарядом $Q(\mathbf{r},t)$. Для определения моментов времени, в которые характеризующие процесс величины отклоняются от своих „невозмущенных“ значений, необходимо задаться некоторой допустимой величиной отклонения $\eta \ll 1$. Далее при конкретных расчетах мы будем считать, что $\eta = 0.2$.

При плоском начальном возмущении искажение поля приводит лишь к снижению частоты ударной ионизации, которое максимально в точке $z = 0$. Используя (25), легко найти момент времени $t_f \equiv \tau_f/g$, в который $\{1 - g[E(0,t)]/g(E_{\mathrm{ext}})\} = \eta$: безразмерное время τ_f является корнем уравнения

$$\sqrt{\tau_f}e^{-2\tau_f} = \frac{q\bar{n}_0(0)}{\sqrt{2\pi\Delta}\varepsilon\eta} \left.\frac{d\ln g}{dE}\right|_{E=E_{\mathrm{ext}}}. \qquad (35)$$

В свою очередь уменьшение частоты ионизации вызывает замедление скорости роста концентраций носителей заряда. Без учета искажения внешнего поля $n, p \propto \exp[2g(E_{\mathrm{ext}})t]$, а с учетом этого эффекта в первом приближении $n, p \propto \exp\{2\int_0^t g[E_{\mathrm{ext}} + E_a(0,t)]dt\}$. Так как относительное различие между этими двумя законами роста достигнет величины η в центре лавины при условии[3]

$$\ln(1+\eta) \approx \eta \approx 2\int_0^\tau \{1 - g[E(0,t)]/g(E_{\text{ext}})\}\,d\tau$$

$$\approx 2\int_0^\tau E_a(0,t)d\tau \left.\frac{d\ln g}{dE}\right|_{E=E_{\text{ext}}} \approx E_a(0,t)\left.\frac{d\ln g}{dE}\right|_{E=E_{\text{ext}}},$$

соответствующий момент времени опять определяется уравнением (35), т. е. равен t_f.

В случае точечного начального возмущения использование формулы (31) приводит к уравнению

$$\tau_a^{3/2}e^{-2\tau_a} = \frac{q\hat{\alpha}^2 f(\mathscr{D})}{(2\pi)^{3/2}\varepsilon\eta}\left.\frac{d\ln g}{dE}\right|_{E=E_{\text{ext}}} \tag{36}$$

для времени $t_a \equiv \tau_a/g$, которое имеет тот же смысл, что и t_f в одномерном случае. Однако теперь, кроме уменьшения g, возможно еще ускорение расширения лавины за счет появления поперечного поля $E_a^\perp(\mathbf{r},t)$ и соответствующей радиальной компоненты дрейфовой скорости,[4] которая в линейном по $E_a^\perp$ приближении равна $v_{e,h}^\perp \approx v_{e,h}E_a^\perp/E_{\text{ext}}$. Этому эффекту соответствуют два характерных времени. Во-первых, время $t_v \equiv \tau_v/g$, при котором отношение дрейфового потока $nv^\perp$ к диффузионному $D\partial n/\partial\rho$ достигнет величины η. Используя (33), для τ_v можно получить уравнение

$$\tau_v e^{-2\tau_v} = \frac{q\hat{\alpha}^2}{2(2\pi)^{3/2}\varepsilon E_{\text{ext}}\eta\mathscr{D}\Delta}. \tag{37}$$

Во-вторых, время $t_\rho \equiv \tau_\rho/g$, при котором максимальное радиальное смещение электронов за счет поперечного дрейфа $\rho_M(t_\rho) = \max\left[\int_0^\rho v_e^\perp(\mathbf{r},t)dt\right]$ достигнет величины $2\eta\sqrt{Dt_\rho}$. Численное интегрирование с учетом (33) показывает, что при актуальных значениях $\tau = 3-11$ поперечное смещение максимально в плоскостях $z \approx \pm z_Q$ и с точностью около 10% равно $\rho_M(t) \approx q\hat{\alpha}^2e^{2\tau_v}/\varepsilon E_{\text{ext}}(2\pi)^{5/2}\sqrt{\mathscr{D}\tau}\,\Delta\tau$. Вследствие этого уравнение для τ_ρ имеет вид

$$\tau_\rho^2 e^{-2\tau_\rho} = \frac{q\hat{\alpha}^2}{2(2\pi)^{5/2}\varepsilon E_{\text{ext}}\eta\mathscr{D}\Delta}. \tag{38}$$

Результаты решения уравнений (36)–(38) при $g(E) = v_s\tilde{\alpha}\exp(-\tilde{E}/E)$, типичных значениях $\varepsilon = 10^{-12}$ Ф/см, $\tilde{\alpha} = 10^6$ см$^{-1}$, $\tilde{E} = 1.5\cdot10^6$ В/см, $v_s = 10^7$ см/с, и $\tilde{\mathscr{D}} = D\tilde{\alpha}/v_s = 2$ приведены на рис. 3. Там же для сравнения приведены результаты расчетов безразмерного

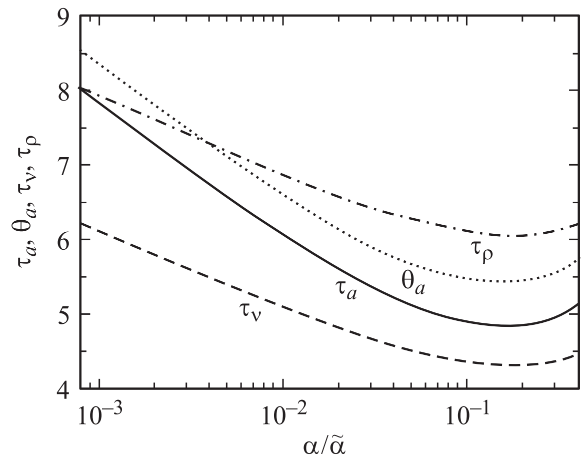

Рис. 3. Зависимости безразмерного времени начала проявления нелинейных эффектов от нормированного коэффициента ударной ионизации в исходном внешнем поле при $\tilde{\mathscr{D}} = D\tilde{\alpha}/v_+ = 2$. τ_a — время уменьшения частоты ударной ионизации в центре лавины на 20%; θ_a — время увеличения частоты ударной ионизации в точках $z = \pm z_E$ на 20%; τ_v — время, при котором наибольший поперечный дрейфовый поток составляет 20% диффузионного потока; τ_ρ — время, при котором наибольшее смещение за счет поперечного дрейфа равно $0.4\sqrt{Dt}$.

времени θ_a, при котором относительное *увеличение* частоты ударной ионизации в точках $z = \pm z_E$ достигает величины τ. Для вычисления θ_a использовалось уравнение, отличающееся от (36) наличием в правой части дополнительного множителя $\left[5/2 + \ln(1+\sqrt{\mathscr{D}}/2)\right]^{-1}$ (см. (32)). Видно, что раньше всего становится заметным поперечный дрейф, но обычно его вклад в расширение лавины становится соизмеримым с диффузионным расширением при $t = t_\rho > t_a$. Это последнее неравенство может нарушаться в слабых полях и при малых D. Однако тогда выполняется сильное неравенство $z_Q \gg 2\sqrt{Dt_a}$, вследствие которого даже значительное уширение тонкой лавины на большом удалении от центра не должно оказывать заметного влияния на величину $E_a(0,t)$. Несколько большее, но также незначительное влияние поперечный дрейф может оказывать на усиление поля перед фронтом лавины, поскольку $(z_E - z_Q) \ge 0.87z_Q$. Таким образом, и при точечном начальном возмущении время t_a определяет длительность линейной стадии эволюции лавины и время начала ЛСП. Однако в слабых полях и при малых D уравнение (36) должно давать несколько заниженное значение t_a.

Для проверки изложенных выше результатов мы провели численное моделирование развития электронно-дырочной лавины в однородном и постоянном внешнем поле. Система уравнений (1) решалась методом конечных элементов вместе с уравнением Пуассона при $D_{e,h} = D$, $v_{e,h} = v_sE/(E+E_s)$, $E_s = 0.01\tilde{E}$ и значениях остальных параметров, указанных выше. Размеры всей

[3] Эти приближенные равенства верны в линейном по E_a приближении при $\eta \ll 1$ и $\exp(2\tau) \gg 1$.

[4] Влиянием поперечного поля на частоту ударной ионизации можно пренебречь, поскольку его учет при вычислении g дает лишь малые квадратичные поправки $(E_a^\perp)^2/2E_{\text{ext}}$ и, кроме того, обычно $E_M^\perp(t) \ll E_a^\parallel(0,t)$.

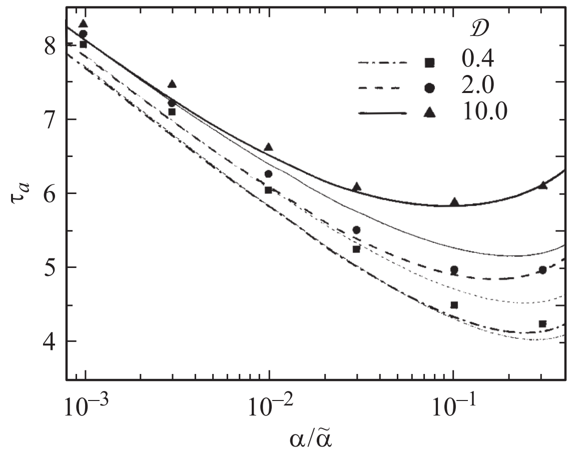

Рис. 4. Зависимости безразмерного времени начала ЛСП τ_a от нормированного коэффициента ударной ионизации в исходном внешнем поле при различных значениях параметра $\tilde{\mathscr{D}} = D\tilde{\alpha}/v_+$. Толстые линии — аналитический расчет по формуле (36), тонкие линии — расчет без учета продольной диффузии [5], точки — результаты численного моделирования.

области интегрирования были не меньше $100/\alpha$, размеры элементов вблизи начала координат были равны $0.1/\tilde{\alpha}$, а в области развития лавины изменялись в пределах $(0.05-0.2)/\alpha$. Максимальный шаг по времени изменялся в пределах $(0.002-0.01)/g$. Зависимость $n_0(\mathbf{r})$ аппроксимировалась гауссовой функцией с характерным диаметром $2/\tilde{\alpha}$ и амплитудой, обеспечивающей равенство $\int n(\mathbf{r}, 0)d\mathbf{r} = 1$. Результаты вычисления моментов времени, при которых коэффициент ударной ионизации в центре лавины уменьшался на 20%, приведены на рис. 4. Как видно, основные выводы аналитической теории качественно и количественно согласуются с результатами численного моделирования. Учет продольной диффузии позволил практически полностью ликвидировать расхождение между теорией и численным экспериментом в сильных полях и при больших D, наблюдавшееся в работе [5]. В слабых полях и при малых D расхождение, обусловленное поперечным дрейфом, остается заметным, но и в худшем случае оно не превосходит 5%.

5. Заключение

В работе получено полное аналитическое решение задачи о линейной стадии эволюции электронно-дырочных лавин в однородном и постоянном внешнем поле. Теория учитывает дрейф, диффузию и ударную ионизацию электронов и дырок и позволяет вычислить все основные параметры лавин, вплоть до начала проявления нелинейных эффектов в момент времени t_a. Конкретные вычисления проведены для частного случая равных коэффициентов диффузии и частот ударной ионизации электронов и дырок. Основные результаты теории состоят в следующем.

Лавина представляет собой электронно-дырочное облако, вытянутое вдоль внешнего поля. Заряды большинства электронов и дырок в лавине компенсируют друг друга и лишь малая часть (около 15%) влияет на искажение внешнего поля. Радиус лавины определяется главным образом поперечной диффузией и равен $2\sqrt{Dt}$. Эволюция лавины в направлении внешнего поля характеризуется несколькими длинами и скоростями. Во-первых, лавина движется как целое относительно кристаллической решетки со своей групповой скоростью u_g, определяемой формулой (20). В сопутствующей системе координат инкремент нарастания возмущения максимален и равен суммарной частоте ударной ионизации $(g_e + g_h)$. Со скоростью u_g движется также точка $z = 0$ (центр лавины), где объемный заряд равен нулю, а поле лавины и концентрации носителей заряда максимальны. Во-вторых, точки $\pm z_Q$ и $\pm z_E$, в которых максимальны плотность объемного заряда и усиление электрического поля, удаляются от ее центра по законам $z_Q(\tau) = \sqrt{(1 + 2\mathscr{D})t v_+/\hat{\alpha}}$ и $z_E(\tau) \approx \sqrt{(1 + 3\mathscr{D})7t v_+/2\hat{\alpha}}$. Это означает, что удлинение центральных областей лавины носит диффузионный характер, даже если $\mathscr{D} = \hat{\alpha}D/v_+ \ll 1$ и истинная диффузия не дает заметного вклада в перенос носителей заряда вдоль внешнего поля. В-третьих, с течением времени точки $\pm z_E$ все сильнее отстают от лидирующих фронтов лавины, которые при больших t распространяются с постоянными скоростями V_c. Величины V_c определяются масштабом затухания $1/\lambda_0$ начального возмущения в направлениях, параллельных внешнему полю: V_c уменьшается с ростом λ_0 в соответствии с формулой (16) при слабой локализации начального возмущения ($\lambda_0 < \lambda^*$), но не зависит от λ_0 и определяется уравнением (14) или (в частных случаях) формулами (17), (18) при сильной локализации начального возмущения (при $\lambda_0 \geq \lambda^*$, в частности при точечном начальном возмущении). Пример такой зависимости приведен на рис. 1 для $\mathscr{D} = 1$. Такое значение выбрано потому, что оно вполне может быть достигнуто в предельно сильных полях (~ 1 МВ/см) при типичных значениях параметров полупроводников. В этом случае скорость распространения фронта $V_c = u^*$ может более чем в три раза превосходить $v_{e,h}$ даже при отсутствии перед фронтом лавины затравочных носителей заряда (т. е. при $\lambda_0 \to \infty$). Этот результат тем более важен, что величина u^* является также нижней границей скорости распространения стационарных нелинейных волн (в нашем случае — стационарных плоских волн ударной ионизации), порождаемых сильно локализованными начальными возмущениями [9].

Внешнее поле сильнее всего искажается в центре лавины, где оно ослабляется на величину $E_a^{\parallel}(0, t)$, определяемую формулой (31). Наибольшее увеличение напряженности внешнего поля на величину $|E_a^{\parallel}(z_E, t)|$ в 2.5–4 раза меньше, чем $|E_a^{\parallel}(0, t)|$, как это видно из рис. 2 и формулы (32). Максимальное значение напряженности поперечного поля $E_a^{\perp}(\mathbf{r}, t)$ достигается на окружностях

$\{z = \pm z_Q, \rho = 2.14\sqrt{Dt}\}$ и определяется формулой (34). При типичных значениях параметров $|E_a^{\perp}(\mathbf{r}, t)|$ также значительно меньше $E_a^{\parallel}(0, t)$. Искажение внешнего поля приводит к нелинейным эффектам, главное из которых состоит в уменьшении частоты ударной ионизации в центре лавины. Так как именно в этой области концентрации электронов и дырок максимальны, в первую очередь нелинейность должна вызвать уменьшение скорости роста полного количества пар в лавине $N_i(t)$ по сравнению с „невозмущенным" законом $N_i(t) = \exp(2gt)$. Аналогичным образом должен измениться и закон роста тока во внешней цепи $J(t) = qN_i(t)(\nu_e + \nu_h)/d$, что в принципе можно наблюдать экспериментально. Момент времени t_a, в который относительное уменьшение g и $N_i(t)$ по сравнению с „невозмущенными" значениями достигнет некоторой заданной величины $\eta \ll 1$, следует считать завершением стадии линейной эволюции лавины и началом лавинно-стриммерного перехода.[5] Это время определяется уравнением (36), которое приводит к заметному отклонению от простейшей гиперболической зависимости $t_a = \mathrm{const}/g(E_{\mathrm{ext}})$ (иногда называемой критерием Ретера–Мика [12]). В результате оказывается (рис. 4), что полное число пар $\exp(2gt)$ в лавине к моменту времени $t = t_a$ может изменяться на 2–3 порядка в зависимости от напряженности внешнего поля.

Автор благодарен А.В. Горбатюку за обсуждение вопросов, затронутых в настоящей статье.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (гранты № 05-02-16541 и 05-08-18235).

Список литературы

[1] Г. Ретер. *Электронные лавины и пробой газов* (М., Мир, 1968).
[2] Э.Д. Лозаннский. УФН, **117**, 491 (1975).
[3] С.Н. Вайнштейн, Ю.В. Жиляев, М.Е. Левинштейн. Письма ЖТФ, **14**, 152 (1988).
[4] А.С. Кюрегян. Письма ЖТФ, **31**, 11 (2005).
[5] А.С. Кюрегян. Письма ЖТФ, **33**, 14, (2007).
[6] P. Rodin, P. Ivanov, I. Grekhov. J. Appl. Phys., **99**, 044 503 (2006).
[7] P. Rodin, U. Ebert, W. Hundsdorfer, I. Grekhov. J. Appl. Phys., **92**, 1971 (2002).
[8] Е.М. Лифшиц, Л.П. Питаевский. *Физическая кинетика* (М., Наука, 1979) с. 330.
[9] W. van Saarloos. Phys. Peports, **386**, 29 (2003).
[10] U. Ebert, W. van Saarloos, C. Caroli. Phys. Rev. Lett., **77**, 4178 (1996).

[5] Недавно в работе [12] было предложено считать началом ЛСП в газах время t_E, при котором наибольшее *увеличение* напряженности внешнего поля достигает 3%. По нашему мнению, этот критерий является менее общим, так как в силу резкой зависимости $g_e(E)$ внешние проявления нелинейности в момент $t = t_E$ должны сильно зависеть от величины E_{ext}. Кроме того, в газах ослабление внешнего поля также значительно превосходит его усиление в течение линейной стадии эволюции лавины [12], что в первую очередь приводит к замедлению скорости роста полного числа электронов [13].

[11] U. Ebert, W. van Saarloos, C. Caroli. Phys. Rev. E, **55**, 1530 (1997).
[12] C. Montijn, U. Ebert. J. Phys. D: Appl. Pjys., **39**, 2979 (2006).
[13] И.М. Бортник, И.И. Кочетов, К.Н. Ульянов. ТВТ, **20**, 193 (1982).

Редактор Л.В. Беляков

Linear stage of the evolution of electron-hole avalanches in semiconductors

A.S. Kyuregyan

All-Russian Electrical Engineering Institute,
111250 Moscow, Russia

Abstract A complete analytical solution of the problem related to the linear stage of evolution of the electron-hole avalanches in uniform and stationary extremal electric field E_{ext} is obtained. The suggested theory takes into account drift, diffusion and the impact ionization of electrons and holes and makes it possible to calculate the spatial-temporal distributions of fields and charges and the basic parameters of avalanches up to the appearance of nonlinear effects at the moment of time t_a. Formulae for the avalanche group velocity and its leading front velocity are presented. It is shown that time t_a should be determined using the condition that the impact ionization coefficient α in the center of avalanche reduces by the adjusted low value η. A transcendental equation which enables one to calculate t_a as a function of η, $\alpha(E_{\mathrm{ext}})$ and other parameters of semiconductor is obtained. It is shown, that as $\alpha(E_{\mathrm{ext}})$ increases by two orders of magnitude the total number of electron-hole pairs at the moment t_a decreases almost by three orders.