

# Гибридно-фононные резонансы в квантовом канале

© В.В. Карпунин<sup>¶</sup>, В.А. Маргулис

Мордовский государственный университет им. Н.П. Огарева,  
430000 Саранск, Россия

(Получена 12 июля 2007 г. Принята к печати 17 сентября 2007 г.)

Исследовано внутризонное поглощение электромагнитного излучения электронами квантового канала, находящегося в поперечном квантующем магнитном поле. Расчет проведен с учетом взаимодействия электронов проводимости с оптическими фононами. Найдено аналитическое выражение для коэффициента поглощения высокочастотного электромагнитного излучения. Показано, что на кривой поглощения имеются асимметричные резонансные пики, найдены положения максимумов. Исследована зависимость коэффициента поглощения от магнитного поля.

PACS: 63.20.Kr, 73.21.Fg, 78.67.De

## 1. Введение

Начиная с теоретических исследований [1] фотоотклик полупроводниковых структур, помещенных в квантующее магнитное поле  $\mathbf{B}$  привлекает постоянное внимание. Ранние теоретические и экспериментальные работы в этой области нашли свое отражение в обзоре [2], посвященном циклотронно-фононному резонансу в трехмерных полупроводниках. Отметим и работу [3], где найдено поглощение электромагнитного излучения в размерно-квантованной полупроводниковой пленке.

В последние годы исследования внутризонных оптических электронных переходов с участием оптических фононов или примесей проводились и в системах с пониженной размерностью. Исследовалось поглощение электромагнитного излучения в двумерном электронном газе [4] и квазидвумерной наноструктуре [5].

Отметим, что наличие потенциалов конфайнмента, удерживающего электроны в наноструктуре, существенно сказывается на положении резонансных пиков кривой поглощения [5,6]. Это обстоятельство приводит к гибридизации магнитного и размерного квантования, которая изменяет резонансные условия поглощения [5].

В отличие от трехмерного электронного газа энергетический спектр электронов в наноструктурах сильно зависит от направления магнитного поля по отношению к осям симметрии потенциала конфайнмента [5]. Это обстоятельство может приводить к зависимости резонансных частот от направления магнитного поля.

В [1] показано, что резонансы в поглощении электромагнитного излучения с участием оптических фононов обусловлены наличием сингулярности в плотностях начальных и конечных электронных состояний и, следовательно, не зависят от степени вырождения электронного газа в образце.

Как отмечалось в литературе, исследование резонансов в поглощении, обусловленных внутризонными электронными переходами с участием оптических фононов, может дать ценную информацию о параметрах электронного энергетического спектра и потенциале конфайнмента.

Цель настоящей работы заключалась в исследовании поглощения электромагнитного излучения квазидвумерным квантовым каналом, помещенным в квантующее магнитное поле. Рассмотрены две модели удерживающего потенциала  $U(z)$  квазидвумерного слоя электронного газа: модель с „жесткими“ стенками (прямоугольная потенциальная яма) и  $\delta$ -потенциал. Квазидвумерный слой расположен в плоскости  $xу$ . В качестве дополнительного латерального потенциала выбран параболический потенциал  $m^*\omega_0^2 y^2/2$  ( $\omega_0$  — характеристическая частота параболического латерального потенциала,  $m^*$  — эффективная электронная масса), который и формирует канал в квазидвумерном слое. Отметим, что в отличие от [6] далее рассмотрен случай поперечного магнитного поля.

Коэффициент поглощения электронной системой канала определим как отношение числа фотонов, поглощенных единицей объема канала в единицу времени, к плотности потока фотонов.

Интересующие нас переходы, вызывающие резонансы, обусловлены взаимодействием электронов канала с фотонами и оптическими фононами. Эти переходы описываются во 2-м порядке теории возмущений по электрон-фотонному и электрон-фононному взаимодействиям [1].

Общее выражение для коэффициента поглощения, обусловленного такими переходами, в случае невырожденного электронного газа имеет вид [1]

$$\begin{aligned} \Gamma(\omega) = & \frac{2\pi\sqrt{\epsilon(\omega)}}{c\hbar N_f} V \left[ 1 - \exp\left(-\frac{\hbar\omega}{T}\right) \right] \\ & \times \sum_{\alpha} \sum_{\beta} f_0(E_{\alpha}) |\langle \alpha, 0, 0 | F | \beta, \pm \mathbf{q}, -\mathbf{f} \rangle|^2 \\ & \times \delta(E_{\alpha} - E_{\beta} \mp \hbar\omega_q + \hbar\omega). \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь  $\alpha, \beta$  — совокупность квантовых чисел электрона, соответствующих начальному и конечному состояниям,  $V$  — нормировочный объем,  $\epsilon(\omega)$  — вещественная часть диэлектрической проницаемости,  $N_f$  — число фотонов в начальном состоянии,  $\mathbf{f}$  — волновой вектор фотона,  $\mathbf{q}$  — волновой вектор фонона,  $\omega$  — частота фотона,  $\omega_q$  — частота оптического фонона,  $f_0(E_{\alpha})$  — электронная

<sup>¶</sup> E-mail: theorphysics@mrsu.ru

функция распределения,  $F$  — оператор возмущения,  $T$  — температура, а множитель  $1 - \exp(-\hbar\omega/T)$  учитывает вынужденное испускание фотонов.

## 2. Поглощение электромагнитного излучения

Рассмотрим электронный газ, находящийся в квантовом канале в однородном перпендикулярном магнитном поле  $\mathbf{B}$  с векторным потенциалом  $\mathbf{A} = (-By, 0, 0)$ .

Одноэлектронный гамильтониан в этом канале имеет вид

$$H = \frac{1}{2m^*} \left( \mathbf{p} - \frac{e}{c} \mathbf{A} \right)^2 + \frac{m^* \omega_0^2 y^2}{2} + U(z). \quad (2)$$

Энергетический спектр и волновые функции электрона с гамильтонианом (2) легко получить, используя [7] и разделяя переменные.

Введем

$$E_{np_x s} = E_{np_x} + \varepsilon_s. \quad (3)$$

Тогда

$$E_{np_x} = \hbar\Omega \left( n + \frac{1}{2} \right) + p_x^2 \omega_0^2 / 2m^* \Omega^2, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (4)$$

Здесь  $\Omega = \sqrt{\omega_0^2 + \omega_c^2}$  — гибридная частота,  $\omega_c = eB/m^*c$  — циклотронная частота,  $p_x$  — импульс электрона вдоль оси  $x$ ,  $\varepsilon_s$  — составляющая энергии, соответствующая поперечному (относительно канала) движению электрона.

Волновая функция электрона описывается выражением

$$\psi_{np_x s} = \frac{1}{\sqrt{L_x}} \exp(ip_x x / \hbar) \chi_n \left( \frac{y - y_0}{a_H} \right) \tau_s(z), \quad (5)$$

где  $\chi_n(x)$  — осцилляторные функции,  $\tau_s(z)$  — зависящая от  $z$  часть волновой функции электрона, определяемая видом потенциала  $U(z)$ ,  $a_H = \sqrt{\hbar/m^* \Omega}$ ,  $y_0 = -p_x \omega_c / m^* \Omega^2$ .

Спектр (3), (4) при  $\omega_c \rightarrow 0$ , разумеется, переходит в спектр при отсутствии магнитного поля  $\mathbf{B}$ , но при  $\omega_0 \rightarrow \sqrt{\omega_0^2 + \omega_c^2}$  такого перехода нет, поскольку поле  $\mathbf{B}$  перемещивает движения электрона в плоскости  $xu$ . Это приводит к тому, что непрерывная составляющая спектра изменяется на множитель  $\omega_0^2 / \Omega^2$ , зависящий от поля. Заметим, что волновая функция (5) также не допускает обратного перехода.

Интересующие нас далее резонансные переходы  $n \rightarrow n'$ , как видно из (5), возникают только в случае, когда вектор поляризации фотонов направлен по оси  $y$ . В пределе  $\mathbf{B} \rightarrow 0$  такие переходы также возникают только при этом направлении поляризации. Поэтому величина магнитного поля не влияет на поляризационные свойства резонансных переходов.

Приводящие к резонансным переходам матричные элементы возникают во 2-м порядке теории возмущений по электрон-фононному и электрон-фотонному взаимодействиям и имеют вид [1]

$$\begin{aligned} & \langle n, p_x, s, 0, 0 | F | n', p'_x, s', \pm \mathbf{q}, -\mathbf{f} \rangle \\ &= \sum_{n'' p'_x s''} \frac{\langle n, p_x, s, 0 | H_R | n'', p''_x, s'', -\mathbf{f} \rangle \langle n'', p''_x, s'', 0 | H_L | n', p'_x, s', \pm \mathbf{q} \rangle}{E_{np_x s} - E_{n'' p'_x s''} + \hbar\omega} \\ &+ \sum_{n'' p'_x s''} \frac{\langle n, p_x, s, 0 | H_L | n'', p''_x, s'', \pm \mathbf{q} \rangle \langle n'', p''_x, s'', 0 | H_R | n', p'_x, s', -\mathbf{f} \rangle}{E_{n'' p'_x s''} - E_{np_x s} - \hbar\omega}, \end{aligned} \quad (6)$$

где  $H_L$  и  $H_R$  — операторы электрон-фононного и электрон-фотонного взаимодействий соответственно.

Рассмотрим электрон-фононные матричные элементы оператора

$$H_L = \sum_{\mathbf{q}} h_L(\mathbf{q}),$$

где  $h_L(\mathbf{q}) = D_{\mathbf{q}} b_{\mathbf{q}} \exp(i\mathbf{q}\mathbf{r}) + \text{с.с.}$ ,  $D_{\mathbf{q}}$  — электрон-фононная константа связи,  $b_{\mathbf{q}}$  — оператор исчезновения фотона.

Матричные элементы  $h_L(\mathbf{q})$  имеют вид

$$\begin{aligned} & \langle n, p_x, s, 0 | h_L(\mathbf{q}) | n'', p''_x, s'', \pm \mathbf{q} \rangle \\ &= D_{\mathbf{q}} \sqrt{N_{\mathbf{q}} + \frac{1}{2}} \pm \frac{1}{2} \langle n, p_x, s, 0 | \exp(\pm i\mathbf{q}\mathbf{r}) | n'', p''_x, s'', \pm \mathbf{q} \rangle, \end{aligned} \quad (7)$$

где  $N_{\mathbf{q}}$  — число фононов в канале.

Введем функцию

$$I_{s s''}(q_z) = \int_{-\infty}^{\infty} \tau_s^*(z) \tau_{s''}(z) \exp(\pm i q_z z) dz. \quad (8)$$

Далее временно удобно перейти к другим координатам —  $\rho, \varphi$ :

$$q_x = \frac{\sqrt{2}\Omega}{a_H \omega_c} \rho \cos \varphi; \quad q_y = \frac{\sqrt{2}}{a_H} \rho \sin \varphi. \quad (9)$$

После несложных преобразований получим

$$\begin{aligned} & \langle n, p_x, s, 0 | h_L | n'', p''_x, s'', \pm \mathbf{q} \rangle = 2D_{\mathbf{q}} \sqrt{N_{\mathbf{q}} + \frac{1}{2}} \pm \frac{1}{2} \\ & \times \delta \left( \frac{p_x - p''_x}{\hbar}, \pm q_x \right) \exp(\pm i q_y y_0) M_{m m''}(\rho) I_{s s''}(q_z), \end{aligned} \quad (10)$$

где  $M_{m m''}(\rho) = \exp(-i q_x q_y a_H^2 \omega_c / 2\Omega) \exp[i\varphi(n'' - n)] \times \times Q_{m m''}(\rho)$ .

Функция  $Q_{m m''}(\rho)$  имеет вид

$$Q_{m m''}(\rho) = \sqrt{\frac{n!}{n''!}} \rho^{n'' - n} L_n^{n'' - n}[\rho^2] \exp(-\rho^2/2), \quad (11)$$

где  $L_m^{n-m}(x)$  — обобщенный полином Лагерра.

Оператор электрон-фотонного взаимодействия при направлении поляризации по оси  $y$  имеет вид

$$H_R = -\frac{ie\hbar}{m^*} \sqrt{\frac{2\pi\hbar N_f}{\epsilon\omega V}} \frac{\partial}{\partial y}. \quad (12)$$

Матричные элементы этого оператора описываются выражением

$$\begin{aligned} & \langle n, p_x, s, 0 | H_R | n'', p_x'', s'', -\mathbf{f} \rangle \\ &= -\frac{ie\hbar}{m^* a_H} \sqrt{\frac{2\pi\hbar N_f}{\epsilon\omega V}} \delta_{p_x p_x''} \delta_{s s''} p_{nn''}, \end{aligned} \quad (13)$$

где

$$p_{nn''} = \left( \sqrt{\frac{n+1}{2}} \delta_{n, n''-1} - \sqrt{\frac{n}{2}} \delta_{n, n''+1} \right).$$

Подставляя формулы (10) и (13) в (6) и проводя простые, но довольно длинные преобразования, получим выражение

$$\begin{aligned} & |\langle n, p_x, s, 0 | F | n', p_x', s', \pm \mathbf{q}, -\mathbf{f} \rangle|^2 \\ &= \left( \frac{e\hbar}{m^* a_H} \right)^2 \frac{2\pi\hbar N_f}{\epsilon\omega V} \sum_{\mathbf{q}} 4 |D_{\mathbf{q}}|^2 \left( N_{\mathbf{q}} + \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2} \right) \\ & \times \delta \left( \frac{p_x - p_x'}{\hbar}, \pm q_x \right) C_{n'n} |I_{s s'}(q_z)|^2, \end{aligned} \quad (14)$$

где

$$C_{n'n} = \left| \sum_{n''} \frac{p_{nn''} M_{n'n''}}{\hbar\Omega(n-n'') + \hbar\omega} + \frac{p_{n''n'} M_{n''n'}}{\hbar\Omega(n'-n'') - \hbar\omega} \right|^2.$$

Вычисляя сумму по  $n''$ , получим

$$C_{n'n} = \frac{1}{2} \rho^2 |Q_{n'n}(\rho)|^2 \left[ \frac{2(\Omega^2 + \omega^2)}{\hbar^2(\Omega^2 - \omega^2)^2} + \frac{2 \cos 2\varphi}{\hbar^2(\Omega^2 - \omega^2)} \right]. \quad (15)$$

Введем  $\Gamma^\pm(n, n')$  — парциальные коэффициенты поглощения, тогда  $\Gamma^\pm = \sum_{n, n'} \Gamma^\pm(n, n')$ , а также расстройку резонанса

$$\Delta\omega_q^\pm = \omega - \omega^\pm, \quad (16)$$

где резонансные частоты  $\omega^\pm = \Omega(n' - n) \pm \omega_q$ .

Парциальные коэффициенты поглощения, как следует из (1) и (14), имеют вид

$$\begin{aligned} \Gamma^\pm(n, n') &= \frac{8\pi^2}{c} \left[ 1 - \exp\left(-\frac{\hbar\omega}{T}\right) \right] \\ & \times \left( \frac{e\hbar}{m^* a_H} \right)^2 \frac{1}{\omega\sqrt{\epsilon}} \sum_{p_x p_x'} \sum_{\mathbf{q}} |D_{\mathbf{q}}|^2 \left( N_0 + \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2} \right) \\ & \times f_0(E_{np_x s}) \rho^2 |Q_{n'n}(\rho)|^2 |I_{s s'}(q_z)|^2 \\ & \times \left[ \frac{2(\Omega^2 + \omega^2)}{\hbar^2(\Omega^2 - \omega^2)^2} + \frac{2 \cos 2\varphi}{\hbar^2(\Omega^2 - \omega^2)} \right] \delta \left( \frac{p_x - p_x'}{\hbar}, \pm q_x \right) \\ & \times \delta \left[ \frac{1}{2m^*} \frac{\omega_0^2}{\Omega^2} (p_x^2 - p_x'^2) + \epsilon_s - \epsilon_{s'} + \hbar\Delta\omega_q^\pm \right]. \end{aligned} \quad (17)$$

Здесь проведено тепловое усреднение по фононам и заменена  $N_{\mathbf{q}}$  на функцию Планка  $N_0$ .

Нормировочная константа функции распределения электронов  $f_0(E_{np_x s})$  находится из условия

$$\sum_{np_x s} f_0(E_{np_x s}) = n_e, \quad (18)$$

где  $n_e$  — концентрация электронов в канале.

### 3. Парциальные коэффициенты поглощения

Вначале выберем удерживающий потенциал вдоль оси  $z$  в виде прямоугольной потенциальной ямы с бесконечно высокими стенками. Если расстояние между соседними уровнями дискретного спектра электрона в потенциальной яме достаточно велико,  $\Delta\epsilon_s \gg T$ ,  $\Delta\epsilon_s \gg \hbar\omega$ , электрон находится в основном состоянии прямоугольной потенциальной ямы, а функция распределения невырожденного электронного газа имеет вид

$$f_0(E_{np_x 1}) = \frac{4\pi\hbar n_e \text{sh}(\hbar\Omega/2T)}{\sqrt{2\pi m^* T L_x}} \frac{\omega_0}{\Omega} \exp(-E_{np_x}/T). \quad (19)$$

Интегрирование по  $z$  приводит к выражению

$$\begin{aligned} I_{11}(q_z) &= \frac{2}{a} \int_0^a \exp(\pm i q_z z) \sin^2\left(\frac{\pi z}{a}\right) dz \\ &= \exp(\pm i\gamma) \sin(\gamma) \left[ \frac{1}{\gamma} - \frac{\gamma}{(\gamma^2 - \pi^2)} \right], \end{aligned} \quad (20)$$

где  $\gamma = q_z a/2$ ,  $a$  — ширина потенциальной ямы.

Интегрирование по  $q_y$  приводит к функции

$$\Phi(q_x) = \int_{-\infty}^{\infty} \rho^2 |Q_{n'n}(\rho)|^2 |D_{\mathbf{q}}|^2 dq_y. \quad (21)$$

Рассмотрим оптические фононы без дисперсии и при низких температурах. Будем изучать характер сингулярности, считая  $|\Delta\omega_q^\pm| \ll \Omega$ . Тогда в (17) благодаря множителям  $f_0(E_{np_x s})$  и  $\delta$ -функции существенна только область интегрирования, размеры которой определяются наибольшей из величин  $p_T = (2mT)^{1/2}$  и  $(2m\hbar\Delta\omega_q^\pm)^{1/2}$ . Так как тепловой импульс  $p_T$  и  $(2m\hbar\Delta\omega_q^\pm)^{1/2}$  много меньше гибридного импульса  $p_\Omega = (2m\hbar\Omega)^{1/2}$ , можно считать функцию  $\Phi(q_x)$  постоянной, положив в ней  $q_x = 0$ . Как следствие,  $\cos 2\varphi = -1$ . Имеем

$$\Phi(0) = \frac{\sqrt{2}}{a_H} \int_{-\infty}^{\infty} \rho^2 |Q_{n'n}(\rho)|^2 |D_{\mathbf{q}}|^2 d\rho, \quad (22)$$

где  $\rho = q_y a_H / \sqrt{2}$ .

Рассмотрим случай деформационного рассеяния на оптических фононах (случай DO-фононов), тогда

$$|D_{\mathbf{q}}|^2 = \frac{2\pi\hbar^2 \alpha_L \omega_q}{m^* V \sqrt{2m^* \hbar \omega_q}},$$

где  $\alpha_L$  — безразмерная константа электрон-фононной связи [1].

От интегрирования по  $q_y$  и  $q_z$  перейдем к безразмерным переменным  $\rho, \gamma$ . Используя [8], получим

$$\int_{-\infty}^{\infty} \rho^2 |Q_{n'n}(\rho)|^2 |D_{\mathbf{q}}|^2 dq_y \int_{-\infty}^{\infty} |I_{11}(q_z)|^2 dq_z = \frac{1}{a} \frac{\sqrt{2}}{a_H m^* V} \frac{2\pi \hbar^4 \alpha_L \omega_q}{\sqrt{2m^* \hbar \omega_q}} \sigma_{\text{DO}}(n, n'), \quad (23)$$

где

$$\sigma_{\text{DO}}(n, n') = \frac{3}{2} \pi \frac{(1+n'-n)_n (-1/2)_n \Gamma(n'-n+3/2)}{n'! n!} \times {}_3F_2\left(-n, n'-n+\frac{3}{2}, \frac{3}{2}, n'-n+1, \frac{3}{2}-n, 1\right), \quad n'-n+3/2 > 0. \quad (24)$$

Здесь  ${}_3F_2(-m, \alpha, \alpha - \lambda; \gamma + 1, \alpha - \lambda - n, 1)$  — обобщенная гипергеометрическая функция,  $\Gamma(x)$  — гамма-функция Эйлера,  $(a)_k$  — символ Похгаммера.

Рассмотрим теперь случай поляризационного рассеяния на оптических фононах (случай РО-фононов). Из [1] следует, что

$$|D_{\mathbf{q}}|^2 = \frac{2\pi \hbar^2 \alpha_L \omega_q}{m^* V} \frac{\sqrt{2m^* \hbar \omega_q}}{q^2}.$$

Введем обозначения  $2\rho^2 = \theta^2$  и  $4a_H^2/a^2 = b^2$ . Для интеграла (23) в этом случае получим

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \rho^2 |Q_{n'n}(\rho)|^2 |D_{\mathbf{q}}|^2 |I_{11}(q_z)|^2 dq_y dq_z = \frac{2\sqrt{2}}{a} \frac{a_H \pi \hbar^2 \alpha_L \omega_q \sqrt{2m^* \hbar \omega_q}}{m^* V} \sigma_{\text{PO}}(n, n'),$$

где

$$\sigma_{\text{PO}}(n, n') = 2 \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \rho^2 |Q_{n'n}(\rho)|^2 \frac{\sin^2 \gamma}{2\rho^2 + a_H^2 \gamma^2} \times \left( \frac{1}{\gamma^2} - \frac{1}{\gamma^2 - \pi^2} + \frac{\pi^2}{(\gamma^2 - \pi^2)^2} \right) d\rho d\gamma. \quad (25)$$

При использовании [9] интегрирование по  $\gamma$  в (25) приводит к выражению

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\theta^2 + b^2 \gamma^2} (\sin^2 \gamma) \left( \frac{1}{\gamma^2} - \frac{1}{\gamma^2 - \pi^2} + \frac{\pi^2}{(\gamma^2 - \pi^2)^2} \right) d\gamma = \frac{\pi}{\theta^2} + \frac{\pi \exp(-\theta/b) \text{sh}(\theta/b)}{\theta b} \left[ \frac{b^2}{\theta^2 + \pi^2 b^2} + \frac{\pi^2 b^4}{(\pi^2 b^2 + \theta^2)^2} - \frac{b^2}{\theta^2} \right] + \frac{\pi}{2(\theta^2 + \pi^2 b^2)}. \quad (26)$$

Рассмотрим наиболее важный частный случай электронных переходов, когда переходы происходят из основного состояния  $n = 0$ . Тогда  $|L_0'[\rho^2]|^2 = 1$ . В случае ДО-фононов интеграл по  $\rho$  с использованием [9] легко вычисляется:

$$\sigma_{\text{DO}}(0, n') = \frac{3\pi}{2} \frac{\Gamma(n'+3/2)}{n'!}. \quad (27)$$

В случае РО-фононов  $\sigma_{\text{PO}}$  также упрощается:

$$\sigma_{\text{PO}}(0, n') = \frac{\pi}{2} \frac{\Gamma(n'+1/2)}{n'!} + 2 \frac{1}{n'!} \int_{-\infty}^{\infty} \rho^2 \rho^{2n'} \exp(-\rho^2) \frac{\pi \exp(-\sqrt{2}\rho/b) \text{sh}(\sqrt{2}\rho/b)}{\sqrt{2}\rho b} \times \left[ \frac{b^2}{2\rho^2 + \pi^2 b^2} + \frac{\pi^2 b^4}{(\pi^2 b^2 + 2\rho^2)^2} - \frac{b^2}{2\rho^2} \right] d\rho + 2 \frac{1}{n'!} \int_{-\infty}^{\infty} \rho^2 \rho^{2n'} \exp(-\rho^2) \frac{\pi}{2(2\rho^2 + \pi^2 b^2)} d\rho. \quad (28)$$

Рассмотрим суммы в (17). При взятии суммы по  $p'_x$  воспользуемся формулой [9]

$$\int_a^{\infty} x^{\mu-1} (x-a)^{\mu-1} \exp(-\beta x) dx = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left( \frac{\alpha}{\beta} \right)^{\mu-1/2} \Gamma(\mu) \exp(-\beta a/2) K_{\mu-1/2} \left( \frac{\beta a}{2} \right), \quad (29)$$

где  $K_\nu(x)$  — функция Макдональда.

В нашем случае

$$\int_{\hbar \Delta \omega_q^\pm / \alpha^2}^{\infty} \frac{\exp(-\alpha^2 p_x'^2 / T)}{p_x' \sqrt{\alpha^2 p_x'^2 - \hbar \Delta \omega_q^\pm}} dp_x'^2 = \exp(-\hbar \Delta \omega_q^\pm / 2T) K_0 \left( \frac{\hbar |\Delta \omega_q^\pm|}{2T} \right), \quad (30)$$

где  $\alpha^2 = \omega_0^2 / 2m^* \Omega^2$ .

Введем

$$\Gamma_0 = \frac{16\sqrt{2}\hbar \alpha_L n_e e^2}{a c m^* \omega_0 \sqrt{\pi T \epsilon} \sqrt{m^*}}. \quad (31)$$

Далее, считая вынужденное испускание фотонов малым, опустим множитель  $1 - \exp(-\hbar \omega / T)$ .

Коэффициент поглощения  $\Gamma^\pm(n, n')$  электромагнитного излучения для случая ДО-фононов имеет вид

$$\frac{\Gamma^\pm(n, n')}{\Gamma_0} = \sigma_{\text{DO}}(n, n') \left( N_0 + \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2} \right) \times \frac{\text{sh}(\hbar \Omega / 2T) \Omega^{5/2} \sqrt{\omega_q \omega}}{(\Omega^2 - \omega^2)^2} \exp \left[ -\frac{\hbar \Omega (n+1/2)}{T} \right] \times \exp \left( \frac{\hbar \Delta \omega_q^\pm}{2T} \right) K_0 \left( \frac{\hbar |\Delta \omega_q^\pm|}{2T} \right). \quad (32)$$

Для случая РО-фононов получим

$$\begin{aligned} \frac{\Gamma^\pm(n, n')}{\Gamma_0} &= \sigma_{\text{PO}}(n, n') \left( N_0 + \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2} \right) \\ &\times \frac{\text{sh}(\hbar\Omega/2T) \Omega^{3/2} \omega \omega_q^{3/2}}{(\Omega^2 - \omega^2)^2} \exp\left[-\frac{\hbar\Omega(n+1/2)}{T}\right] \\ &\times \exp\left(\frac{\hbar\Delta\omega_q^\pm}{2T}\right) K_0\left(\frac{\hbar|\Delta\omega_q^\pm|}{2T}\right). \end{aligned} \quad (33)$$

Далее мы рассмотрим задачу о поглощении электромагнитного излучения в квантовом канале с другим модельным потенциалом по оси  $z$ , который выберем в виде  $\delta$ -потенциала.

Электронный гамильтониан будет иметь вид

$$H = \frac{1}{2m^*} \left( \mathbf{p} - \frac{e}{c} \mathbf{A} \right)^2 + \frac{m^* \omega_0^2 y^2}{2} - \lambda \delta(z), \quad (34)$$

где  $\lambda$  — константа связи потенциала. Электронный спектр при этом имеет вид

$$E_{np_x} = \hbar\Omega \left( n + \frac{1}{2} \right) + \frac{p_x^2}{2m^*} \frac{\omega_0^2}{\Omega^2} + \varepsilon_0, \quad (35)$$

где  $\varepsilon_0 = -m^* \lambda^2 / 2\hbar^2$  — единственный дискретный уровень электрона в  $\delta$ -потенциале.

Волновые функции гамильтониана (34) имеют вид

$$\psi_{np_x} = \frac{1}{\sqrt{L_x}} \exp(ip_x x / \hbar) \chi_n \left( \frac{y - y_0}{a_H} \right) \tau(z), \quad (36)$$

где  $\tau(z) = \sqrt{\varrho} \exp[-\varrho|z|]$ ,  $\varrho = \lambda m^* / \hbar^2$ .

Матричные элементы оператора возмущения имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} &\langle n, p_x, 0, 0 | F | n', p'_x, \pm \mathbf{q}, -\mathbf{f} \rangle \\ &= \sum_{n'' p''_x} \frac{\langle n, p_x, 0 | H_R | n'', p''_x, -\mathbf{f} \rangle \langle n'', p''_x, 0 | H_L | n', p'_x, \pm \mathbf{q} \rangle}{E_{np_x} - E_{n'' p''_x} + \hbar\omega} \\ &+ \sum_{n'' p''_x} \frac{\langle n, p_x, 0 | H_L | n'', p''_x, \pm \mathbf{q} \rangle \langle n'', p''_x, 0 | H_R | n', p'_x, -\mathbf{f} \rangle}{E_{n' p'_x} - E_{n'' p''_x} - \hbar\omega}. \end{aligned} \quad (37)$$

Коэффициент поглощения в этом случае имеет также вид (17), где  $I(q_z)$  есть

$$\begin{aligned} I(q_z) &= \varrho \int_{-\infty}^{\infty} \exp(\pm i q_z z) \exp(-2\varrho|z|) dz \\ &= \frac{4\varrho^2}{q_z^2 + 4\varrho^2}. \end{aligned} \quad (38)$$

Рассмотрим взаимодействие электронов с ДО-фононами. Для интеграла, входящего в  $\Gamma^\pm(n, n')$ , используя

то же приближение, что и в (22), получим

$$\begin{aligned} &\int_{-\infty}^{\infty} \rho^2 |Q_{n'n}(\rho)|^2 |D_{\mathbf{q}}|^2 d q_y \int_{-\infty}^{\infty} |I(q_z)|^2 d q_z \\ &= \varrho \frac{\sqrt{2}}{a_H m^* V \sqrt{2m^* \hbar \omega_q}} \sigma_{\text{DO}}(n, n'), \end{aligned} \quad (39)$$

где

$$\begin{aligned} \sigma_{\text{DO}}(n, n') &= \frac{\pi}{2} \frac{(1+n'-n)_n (-1/2)_n \Gamma(n'-n+3/2)}{n! n!} \\ &\times {}_3F_2 \left( -n, n'-n+\frac{3}{2}, \frac{3}{2}, n'-n+1, \frac{3}{2}-n, 1 \right). \end{aligned} \quad (40)$$

В случае РО-фононов  $\sigma_{\text{PO}}(n, n')$  имеет вид

$$\begin{aligned} \varrho \sigma_{\text{PO}}(n, n') &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \rho^2 |Q_{n'n}(\rho)|^2 \frac{1}{2\rho^2 + a_H^2 q_z^2} \\ &\times \left( \frac{4\varrho^2}{q_z^2 + 4\varrho^2} \right)^2 d\rho d q_z, \end{aligned} \quad (41)$$

где интеграл по  $q_z$  в (41) имеет вид

$$\begin{aligned} &\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\rho^2 + a_H^2 q_z^2} \left( \frac{1}{q_z^2 + 4\varrho^2} \right)^2 d q_z \\ &= \left[ \frac{a_H^4}{(2\rho^2 - 4a_H^2 \varrho^2)^2} \frac{\pi}{\sqrt{2} a_H \rho} - \frac{a_H^2}{(2\rho^2 - 4a_H^2 \varrho^2)^2} \frac{\pi}{2\varrho} \right. \\ &\left. + \frac{1}{2\rho^2 - 4a_H^2 \varrho^2} \frac{\pi}{16\varrho^3} \right]. \end{aligned} \quad (42)$$

Тогда для  $\sigma_{\text{PO}}(n, n')$  получим

$$\begin{aligned} \sigma_{\text{PO}}(n, n') &= \int_{-\infty}^{\infty} \rho^2 |Q_{n'n}(\rho)|^2 16\varrho^3 \\ &\times \left[ \frac{a_H^4}{(2\rho^2 - 4a_H^2 \varrho^2)^2} \frac{\pi}{\sqrt{2} a_H \rho} - \frac{a_H^2}{(2\rho^2 - 4a_H^2 \varrho^2)^2} \frac{\pi}{2\varrho} \right. \\ &\left. + \frac{1}{2\rho^2 - 4a_H^2 \varrho^2} \frac{\pi}{16\varrho^3} \right] d\rho. \end{aligned} \quad (43)$$

Введем величину  $\Gamma_0$ :

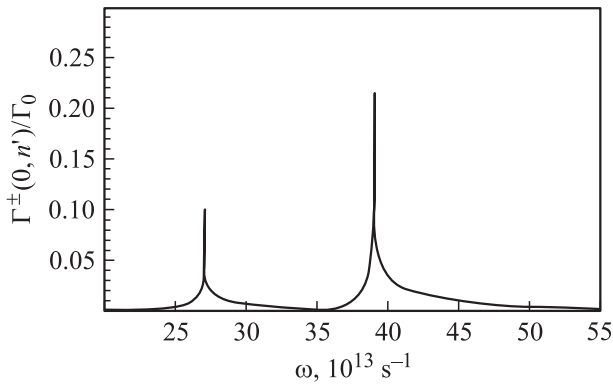
$$\Gamma_0 = \frac{16\sqrt{2}\hbar\alpha_L n_e e^2 \varrho}{c m^* \omega_0 \sqrt{\pi T} \epsilon \sqrt{m^*}}. \quad (44)$$

В результате коэффициенты поглощения для этого случая будут иметь вид (32) и (33), но  $\sigma_{\text{DO}}(n, n')$  и  $\sigma_{\text{PO}}(n, n')$  определяются по формулам (40) и (43) соответственно.

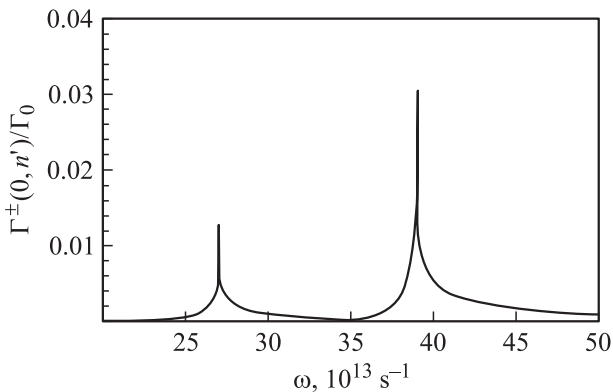
#### 4. Заключение

В работе исследовано внутризонное поглощение электромагнитного излучения с участием оптических фононов для случая квантового канала и найдена общая формула для коэффициента поглощения. Формулы (32) и (33) справедливы вблизи пика гибридно-фононного резонанса и не учитывают влияния гибридного резонанса. Пики гибридно-фононного резонанса находятся в далекой области крыльев гибридного резонанса, и его влияние в области пика не существенно. Из (32) и (33) видно, что гибридно-фононные резонансы возникают на мультигибридных частотах  $\omega^\pm = \Omega(n' - n) \pm \omega_q$ .

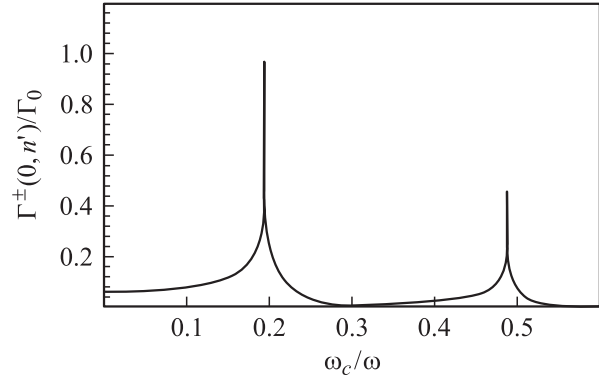
Показано, что, если не учитывать дисперсию оптических фононов, коэффициент поглощения имеет логарифмическую сингулярность в точке резонанса, обусловленную соответствующим поведением функции Макдональда в точках, где расстройка частоты  $\Delta\omega_q^\pm = \omega - \omega^\pm$  обращается в нуль, а именно при  $\Delta\omega_q^\pm > 0$  на больших



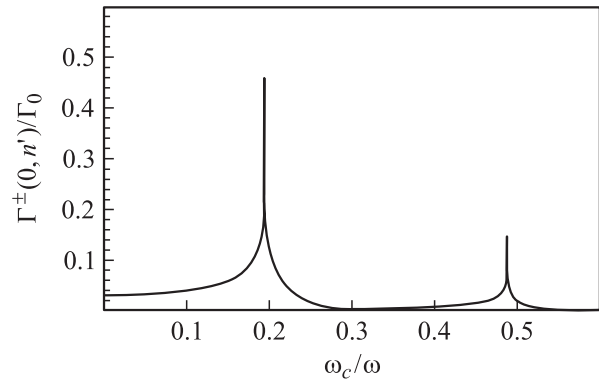
**Рис. 1.** Зависимость коэффициента поглощения электромагнитного излучения от частоты излучения. Построены эмиссионный и абсорбционный пики для перехода  $|0, 0\rangle \rightarrow |0, 3\rangle$ ,  $\omega_0 = 7 \cdot 10^{13} \text{ с}^{-1}$ ,  $\Omega = 11 \cdot 10^{13} \text{ с}^{-1}$ ,  $\omega_q = 6 \cdot 10^{13} \text{ с}^{-1}$ ,  $T = 100 \text{ К}$  (случай ДО-фононов).



**Рис. 2.** Зависимость коэффициента поглощения электромагнитного излучения от частоты излучения. Построены эмиссионный и абсорбционный пики для перехода  $|0, 0\rangle \rightarrow |0, 3\rangle$ ,  $\omega_0 = 7 \cdot 10^{13} \text{ с}^{-1}$ ,  $\Omega = 11 \cdot 10^{13} \text{ с}^{-1}$ ,  $\omega_q = 6 \cdot 10^{13} \text{ с}^{-1}$ ,  $T = 100 \text{ К}$  (случай РО-фононов).



**Рис. 3.** Зависимость коэффициента поглощения электромагнитного излучения от магнитного поля. Построены эмиссионный и абсорбционный пики для перехода  $|0, 0\rangle \rightarrow |0, 3\rangle$ ,  $\omega_0 = 7 \cdot 10^{13} \text{ с}^{-1}$ ,  $\omega = 30 \cdot 10^{13} \text{ с}^{-1}$ ,  $\omega_q = 6 \cdot 10^{13} \text{ с}^{-1}$ ,  $T = 100 \text{ К}$  (случай ДО-фононов).



**Рис. 4.** Зависимость коэффициента поглощения электромагнитного излучения от магнитного поля. Построены эмиссионный и абсорбционный пики для перехода  $|0, 0\rangle \rightarrow |0, 3\rangle$ ,  $\omega_0 = 7 \cdot 10^{13} \text{ с}^{-1}$ ,  $\omega = 30 \cdot 10^{13} \text{ с}^{-1}$ ,  $\omega_q = 6 \cdot 10^{13} \text{ с}^{-1}$ ,  $T = 100 \text{ К}$  (случай РО-фононов).

расстояниях  $\hbar\Delta\omega_q^\pm \gg T$  асимптотика  $\Gamma^\pm(n, n')$  имеет корневой характер  $(\hbar\Delta\omega_q^\pm/2T)^{-1/2}$ , переходя на близких расстояниях при  $\hbar\Delta\omega_q^\pm \ll T$  в логарифмическую  $\ln(\hbar\Delta\omega_q^\pm/2T)$ . Слева от резонансной точки,  $\Delta\omega_q^\pm < 0$ , и вблизи нее, где  $\hbar|\Delta\omega_q^\pm| \ll T$ , сингулярность тоже логарифмическая, но вдали при  $\hbar|\Delta\omega_q^\pm| \gg T$  на корневую зависимость накладывается экспоненциальное спадание  $\exp(-\hbar|\Delta\omega_q^\pm|/2T)(\hbar|\Delta\omega_q^\pm|/2T)^{-1/2}$ .

В связи с этим резонансные пики имеют асимметричный вид (рис. 1, 2).

Отметим, что отношение интенсивностей абсорбционных пиков и соответствующих эмиссионных  $\sim \exp(-\hbar\omega_q/T)$ .

Как уже отмечалось во Введении, причина логарифмической сингулярности резонансных пиков в циклотронно-фононном резонансе обусловлена корневыми сингулярностями в плотности начальных и конечных состояний (1). Этот же результат получается и в рассматриваемом гибридно-фононном резонансе.

Резонансные кривые зависимости коэффициента поглощения от магнитного поля (рис. 3, 4) также имеют асимметричный вид, но при этом левое крыло более пологое, чем правое. Это существенное изменение обусловлено множителем  $\text{sh}(\hbar\Omega/2T)$ , который зависит от магнитного поля.

Из условий резонансов  $\Delta\omega_q^\pm = 0$  следует, что резонансные значения магнитного поля имеют вид

$$B_{\text{res}} = \frac{m^*c}{e} \sqrt{\left(\frac{\omega^\pm \mp \omega_q}{n' - n}\right)^2 - \omega_0^2}.$$

Все построенные кривые относятся к случаю, когда удерживающим потенциалом является прямоугольная потенциальная яма. В случае  $\delta$ -потенциала спектры имеют аналогичный вид.

Заметим, что, если учесть дисперсию оптических фононов, сингулярности размываются. Участие в поглощении оптических фононов делает разрешенными мультигибридные переходы между уровнями с разными  $n, n'$ . Отметим, что резонансные переходы без участия фононов происходят только между соседними гибридными уровнями.

Рассмотрены две модели удерживающего потенциала. Показано, что вид потенциала не приводит к изменению формы резонансной кривой и не смещает резонансные пики. В конечных формулах для коэффициента поглощения удерживающий потенциал  $U(z)$  входит в функцию  $\sigma_{\text{PO}}$ . В случае ДО-фононов переменные разделяются и мы получаем аналитические выражения. Можно сравнить  $\sigma_{\text{DO}}$  для рассмотренных двух моделей потенциала. Это сравнение показывает, что  $\sigma_{\text{DO}}$  для случая потенциальной ямы в 3 раза больше, чем  $\sigma_{\text{DO}}$  для случая  $\delta$ -потенциала.

Параметры потенциалов входят в величины  $\Gamma_0$ , форм-фактор  $\sigma_{\text{DO}}$  зависит лишь от квантовых чисел  $n, n'$ , поэтому при сопоставлении мы выбираем эти числа одинаковыми. При сравнении  $\sigma_{\text{PO}}$  выбраны одинаковыми энергия основного состояния электрона в потенциальной яме и единственный уровень электрона в  $\delta$ -потенциале.

Результаты численного анализа формул (28) и (43) показывают, что  $\sigma_{\text{PO}}(0, n')$  для разных потенциалов — величины одного порядка и слабо зависят от  $n'$ .

Работа поддержана Российским фондом фундаментальных исследований и грантом Президента РФ для научных школ (№ НШ-5015.2008.2).

## Список литературы

- [1] Ф.Г. Басс, И.Б. Левинсон. ЖЭТФ, **49** (3), 914 (1965).
- [2] Р.К. Баканас, Ф.Г. Басс, И.Б. Левинсон. ФТП, **12** (8), 1457 (1978).
- [3] Ф.Г. Басс, А.Ю. Матулис. ФГТ, **12** (7), 2039 (1970).
- [4] В. Шикин. Письма ЖЭТФ, **77** (5), 281 (2003).
- [5] В.А. Маргулис. ЖЭТФ, **111** (3), 1092 (1997).

- [6] V.A. Margulis, A.V. Shorokhov. Phys. Status Solidi C, **1** (11), 2642 (2004).
- [7] L. Wendler, V.G. Grigoryan. Physica B, **245**, 127 (1998).
- [8] А.П. Прудников, Ю.А. Брычков, О.И. Маричев. *Интегралы и ряды. Специальные функции* (М., Наука, 1983).
- [9] А.П. Прудников, Ю.А. Брычков, О.И. Маричев. *Интегралы и ряды. Элементарные функции* (М., Наука, 1981).

Редактор Л.В. Шаронова

## Hybrid-phonon resonances in a quantum channel

V.V. Karpunin, V.A. Margulis

Mordovian State University,  
430000 Saransk, Russia

**Abstract** The intraband absorption of electromagnetic radiation by electrons of a quantum channel in a transverse quantized magnetic field is investigated taking into account interaction of conductivity electrons with optical phonons. Expressions for absorption coefficients of an electromagnetic radiation are found. It is shown that the absorption curves have asymmetric resonance peaks, the positions of resonance peaks are found. The dependence of absorption coefficients on the magnetic field is investigated.