Физика твердого тела, 2012, том 54, вып. 10

13

Неразрушающий контроль параметров шероховатости и нарушенного слоя свободной поверхности анизотропного твердого тела на основе поверхностных акустических волн

© В.В. Косачёв, Ю.Н. Гандурин, С.Е. Муравьёв

Национальный исследовательский ядерный университет „МИФИ“,
Москва, Россия

E-mail: kosachev@theor.mephi.ru

(Поступила в Редакцию 12 марта 2012 г.)

Предложен метод неразрушающего контроля параметров шероховатости и нарушенного слоя поверхности гексагонального кристалла и изотропного твердого тела на основе поверхностных акустических волн (ПАВ) Рэлея и сдвиговой (SH) поляризации. Изучаемая поверхность граничит с вакуумом и может быть либо шероховатой поверхностью, либо изотропным нарушенным поверхностным слоем. Задача рассматривается в пределе длинных волн (по сравнению с амплитудой шероховатости или толщиной нарушенного слоя, а также по сравнению с характерным радиусом неоднородности поверхности). Показано, что в длинноволновом пределе по известным значениям дисперсии фазовой скорости и длины затухания ПАВ Рэлея можно найти дисперсию фазовой скорости и длину затухания волн SH-поляризации (или наоборот). Задача с изотропным нарушенным поверхностным слоем рассматривается в частном случае, когда флуктуирует только плотность.

1. Введение

Исследование влияния неоднородностей поверхности на распространение поверхностных акустических волн (ПАВ) не только представляет теоретический интерес, но и может найти практическое применение в области неразрушающего контроля. В работах [1–6] получены выражения для дисперсии и длины затухания ПАВ различных поляризаций на шероховатой [1–3] и нарушенной [4–6] поверхности гексагонального кристалла. На основе данных выражений в пределе длинных (по сравнению с корреляционным радиусом неоднородности поверхности) волн рассчитаны коэффициенты, входящие в эти соотношения. Это позволяет на основании экспериментальных данных о дисперсии и длине затухания ПАВ получить значения величин, характеризующих параметры поверхности.

2. Постановка задачи

В [1–5] рассматривались задачи распространения ПАВ Рэлея и ПАВ сдвиговой (SH) поляризации по свободной поверхности гексагонального кристалла с осью симметрии шестого порядка, перпендикулярной поверхности. В работах [1–3] поверхность считалась шероховатой, а в [4,5] на поверхности располагался изотропный нарушенный слой. В [6] рассматривался изотропный нарушенный слой, расположенный на изотропной подложке. Во всех работах считалось, что амплитуда шероховатости или толщина нарушенного слоя мала по сравнению с длиной падающей волны. Рассмотрим предел длинных волн, полученный в этих работах, для случая когда длина падающей волны велика по сравнению с корреляционным радиусом неоднородности поверхности, и выразим параметры поверхности через дисперсию фазовой скорости и длину затухания ПАВ.

3. Шероховатая поверхность: волны Рэлея

В работе [1] получены выражения для дисперсии фазовой скорости и обратной длины затухания ПАВ Рэлея на статистически-шероховатой свободной поверхности гексагонального кристалла

$$\frac{\Delta\omega_R}{\omega_R} = -\frac{\delta^2}{a}\,k\Phi_R, \tag{1}$$

$$\frac{1}{l_R} = \delta^2 k^5 a^2 \Lambda_R. \tag{2}$$

Здесь $\omega_R = kc_R$; $c_r = \sqrt{c_{44}\varepsilon/\rho}$ — скорость волны Рэлея на плоской (ненарушенной) поверхности; уравнение для безразмерного коэффициента ε приведено в Приложении; c_{ij} — коэффициенты тензора модулей упругости кристалла; ρ — плотность массы кристалла; δ — амплитуда шероховатости поверхности; a — корреляционный радиус шероховатости; k — модуль волнового вектора, лежащего в плоскости поверхности; Φ_R и Λ_R — безразмерные коэффициенты, зависящие от свойств кристалла. Численные значения Φ_r и Λ_R для ряда кристаллов приведены в [1]. Используя (1) и (2), получим выражения для a и δ по измеренным величинам дисперсии $\Delta\omega_R$ и длины затухания l_R, которые являются характеристиками статистически-шероховатой поверхности гексагонального кристалла,

$$a = \left(-\frac{\Lambda_R}{\Phi_R}\,k^4\,\frac{\Delta\omega_R}{\omega_R}\,l_R\right)^{-1/3}, \tag{3}$$

$$\delta = \frac{1}{\sqrt{l_R k^5 a^2 \Lambda_R}}. \tag{4}$$

В частном случае, когда шероховатость поверхности гексагонального кристалла представляет собой набор случайных параллельных бороздок [2], безразмерные коэффициента Φ_R и Λ_R зависят от угла падения волны на бороздки и имеют вид

$$\frac{\Delta\omega_R}{\omega_R} = \frac{\delta^2}{a} k\Phi_R(\psi), \tag{5}$$

$$\frac{1}{l_R} = \delta^2 k^4 a \Lambda_R(\psi). \tag{6}$$

Из (5) и (6) следуют выражения для корреляционного радиуса a и амплитуды шероховатости поверхности δ, являющихся характеристиками шероховатой поверхности гексагонального кристалла,

$$\delta = \frac{1}{\sqrt{l_R k^4 a \Lambda_R(\psi)}}, \tag{7}$$

$$a = \left(-\frac{\Lambda_R(\psi)}{\Phi_R(\psi)} k^3 \frac{\Delta\omega_R}{\omega_R} l_R\right)^{-1/2}. \tag{8}$$

4. Шероховатая поверхность: волны SH-поляризации

В [3] для ПАВ SH-поляризации были получены дисперсия фазовой скорости $\Delta\omega_{\mathrm{SH}}$ и длина затухания l_{SH} на свободной статистически-шероховатой поверхности гексагонального кристалла

$$\frac{\Delta\omega_{\mathrm{SH}}}{\omega_{\mathrm{SH}}} = -\frac{\delta^4}{a^2} k^2 \Phi_{\mathrm{SH}}, \tag{9}$$

$$\frac{1}{l_{\mathrm{SH}}} = \delta^4 a k^6 \Lambda_{\mathrm{SH}}, \tag{10}$$

где $\omega_{\mathrm{SH}} = kc_{\mathrm{SH}}$, $c_{\mathrm{SH}} = \sqrt{c_{44}h/\rho}$ — скорость волны сдвиговой поляризации на плоской поверхности, h — константа, приведенная в Приложении, Φ_{SH} и Λ_{SH} — безразмерные коэффициенты, зависящие от свойств кристалла. Для ряда кристаллов значения Φ_{SH} и Λ_{SH} приведены в [3]. Из (9) и (10) получаем

$$a = \left(-\frac{\Lambda_{\mathrm{SH}}}{\Phi_{\mathrm{SH}}} k^4 \frac{\Delta\omega_{\mathrm{SH}}}{\omega_{\mathrm{SH}}} l_{\mathrm{SH}}\right)^{-1/3}, \tag{11}$$

$$\delta = (l_{\mathrm{SH}} a k^6 \Lambda_{\mathrm{SH}})^{-1/4}. \tag{12}$$

В [3] также получены выражения для частного случая, когда шероховатостью являются случайные параллельные бороздки. Безразмерные коэффициенты Φ_{SH} и Λ_{SH} в этом случае, так же как и в случае ПАВ Рэлея, будут зависеть от угла падения волны на канавки

$$\frac{\Lambda_{\mathrm{SH}}}{\omega_{\mathrm{SH}}} = -\frac{\delta^4}{a^2} k^2 \Phi_{\mathrm{SH}}(\psi), \tag{13}$$

$$\frac{1}{l_{\mathrm{SH}}} = \delta^4 k^5 \Lambda_{\mathrm{SH}}(\psi). \tag{14}$$

Из (13) и (14) следует, что

$$a = \left(-\frac{\Lambda_{\mathrm{SH}}(\psi)}{\Phi_{\mathrm{SH}}(\psi)} k^3 \frac{\Lambda\omega_{\mathrm{SH}}}{\omega_{\mathrm{SH}}} l_{\mathrm{SH}}\right)^{-1/2}, \tag{15}$$

$$\delta = \big(l_{\mathrm{SH}} k^5 \Lambda_{\mathrm{SH}}(\psi)\big)^{-1/4}. \tag{16}$$

Заметим, что волны SH-поляризации существуют не всегда, в частности, они отсутствуют на свободной плоской поверхности изотропного твердого тела.

5. Нарушенный слой: волны Рэлея

В [4] были получены выражения для дисперсии фазовой скорости и обратной длины затухания волн Рэлея, распространяющихся по свободной поверхности гексагонального кристалла с расположенными на поверхности изотропным нарушенным слоем. В этом случае поверхность характеризуется 15 независимыми параметрами. Поэтому найти параметры поверхности с помощью ПАВ в длинноволновом пределе можно только в частном случае, когда флуктуирует только плотность. В этом случае дисперсию фазовой скорости $\Delta\omega'_R$ и длину затухания l'_R можно записать в виде

$$\frac{\Delta\omega'_R}{\omega_R} = -kd\Phi'_R, \tag{17}$$

$$\frac{1}{l'_R} = k^5 d^2 \varepsilon_{11} a_{11}^2 \Lambda'_R. \tag{18}$$

Здесь d — толщина нарушенного слоя, a_{11} — корреляционный радиус плотности массы в нарушенном слое, $\varepsilon_{11} = (\langle\rho(\mathbf{r}), \rho(\mathbf{r})\rangle - \rho_0^2)/\rho_0^2$ — безразмерный коэффициент, характеризующий флуктуацию плотности массы в поверхностном слое; Φ'_R и Λ'_R — безразмерные коэффициенты, приведенные в Приложении и для некоторых сред просчитанные численно (см. таблицу). Из уравнений (17) и (18) можно определить только произведение $\varepsilon_{11}a_{11}^2$ и толщину поверхностного слоя d

$$\varepsilon_{11}a_{11}^2 = \left(\frac{\Lambda'_R}{\Phi'^2_R} k^3 \left(\frac{\Delta\omega'_R}{\omega_R}\right)^2 l'_R\right)^{-1}, \tag{19}$$

$$d = -\frac{1}{k\Phi'_R} \frac{\Delta\omega'_R}{\omega_R}. \tag{20}$$

В [6] также была решена задача, аналогичная [4], однако подложка считалась изотропной. Поскольку изотропную среду можно рассматривать как частный случай гексагональной, что явно следует из сравнения тензоров модулей упругости, на основе [6] получаются аналогичные выражения.

6. Нарушенный слой: волны SH-поляризации

В [5] получены выражения для дисперсии фазовой скорости и длины затухания ПАВ сдвиговой поляризации (SH-поляризации) на поверхности гексагонального

Значения безразмерных коэффициентов для ПАВ Рэлея и ПАВ SH-поляризации, распространяющихся по свободной поверхности гексагонального кристалла с изотропным поверхностным слоем

Гексагональный кристалл	T, K	Φ'_R	Λ'_R	Φ'_{SH}	Λ'_{SH}
Be	293	−0.00659	0.083	–	–
CdS	293	0.014	0.39	–	–
Co	298	0.017	0.044	–	–
Лед	257	0.012	0.60	–	–
»	248	0.018	0.053	–	–
»	263	0.019	0.053	–	–
»	268	0.019	0.053	–	–
Mg	0	0.0097	0.077	–	–
SiO_2 (index HX453701)	873	0.0051	0.12	0.014	0.019
SiO_2 (index HX453702)	873	0.0059	0.11	0.021	0.020
ZnO	293	0.015	0.059	–	–
Y	4	0.018	0.11	–	–
Y	75	0.020	0.11	–	–
Y	200	0.019	0.099	–	–
Y	300	0.014	0.096	–	–
Y	400	0.014	0.090	–	–

Примечание. Поверхностный слой состоит из того же материала, что и подложка, только в виде поликристалла. Исходные данных о средах взяты из работы [7]. Для SiO_2 index — это номер источника данных в [7]. Прочерк для коэффициентов Φ'_{SH} и Λ'_{SH} означает, что волна SH-поляризации в такой среде не возникает.

кристалла с тонким изотропным поверхностным слоем. Так же как и в случае волн Рэлея на нарушенном слое, параметры поверхности можно получить лишь в частном случае, когда флуктуирует только плотность. Тогда получаются следующие зависимости для дисперсии $\Delta\omega'_{SH}$ и длины затухания l'_{SH}:

$$\frac{\Delta\omega'_{SH}}{\omega_{SH}} = -d^2k^2\Phi'_{SH}, \tag{21}$$

$$\frac{1}{l'_{SH}} = k^6d^3\varepsilon_{11}a_{11}^2\Lambda'_{SH}. \tag{22}$$

Здесь Φ'_{SH} и Λ'_{SH} — безразмерные коэффициенты, приведенные в Приложении, зависящие от свойств подложки и поверхностного слоя. Для ряда сред они рассчитаны численно и приведены в таблице. При этом, как отмечалось выше, ПАВ сдвиговой поляризации могут существовать не всегда.

Из (21) и (22) можно выделить только произведение $\varepsilon_{11}a_{11}^2$ и толщину поверхностного слоя d

$$\varepsilon_{11}a_{11}^2 = \left(\frac{\Lambda'_{SH}}{\Phi'^{3/2}_{SH}}k^3\left(-\frac{\Delta\omega'_{SH}}{\omega_{SH}}\right)^{3/2}l'_{SH}\right)^{-1}, \tag{23}$$

$$d = \frac{1}{k}\sqrt{-\frac{\Delta\omega'_{SH}}{\omega_{SH}}\frac{1}{\Phi'_{SH}}}. \tag{24}$$

Это позволяет, в частности, по измерению фазовой скорости ПАВ SH-поляризации найти толщину нарушенного слоя d (24). Что касается (23), то произведение $\varepsilon_1 a_{11}^2$ может оказаться полезным для оценки теоретических результатов.

7. Связь волн Рэлея и волн SH-поляризации

Поскольку одни и те же параметры поверхностного слоя можно получать двумя разными способами: с помощью ПАВ Рэлея и с помощью ПАВ SH-поляризации, это означает, что поляризации ПАВ связаны между собой. Несмотря на то что в разных задачах получается различная степенная зависимость от частоты и параметров поверхности, во всех случаях получаются одни и те же выражения, связывающие волны различной поляризации. Так, на статистически-шероховатой поверхности получаем

$$\frac{1}{l_{SH}} = -\frac{1}{l_R}\frac{\Delta\omega_R}{\omega_R}\frac{\Lambda_{SH}(\psi)}{\Lambda_R(\psi)\Phi_R(\psi)}, \tag{25}$$

$$\frac{\Delta\omega_{SH}}{\omega_{SH}} = -\left(\frac{\Delta\omega_R}{\omega_R}\right)^2\frac{\Phi_{SH}(\psi)}{\Phi_R^2(\psi)}, \tag{26}$$

где зависимость от угла ψ будет присутствовать только для случайных параллельных бороздок. Для случая ПАВ на нарушенном слое получаются точно такие же выражения:

$$\frac{1}{l'_{SH}} = -\frac{1}{l'_R}\frac{\Delta\omega'_R}{\omega_R}\frac{\Lambda'_{SH}}{\Lambda'_R\Phi'_R}, \tag{27}$$

$$\frac{\Delta\omega'_{SH}}{\omega_{SH}} = -\left(\frac{\Delta\omega'_R}{\omega_R}\right)^2\frac{\Phi'_{SH}}{\Phi'^2_R}. \tag{28}$$

Из выражений (25)–(28) следует, что дисперсия фазовой скорости и длина затухания рэлеевских волн и волн горизонтальной поляризации взаимосвязаны. При этом указанная взаимосвязь обусловлена неоднородностью поверхности. Кроме того, обсуждаемые выражения не содержат случайных параметров реальной поверхности. Это позволяет считать, что полученные выражения могут оказаться полезными для экспериментаторов. Конечно, выражения (25)–(28) имеют смысл только в том случае, если ПАВ SH-поляризации существуют.

8. Заключение

Предложен способ нахождения параметров, характеризующих реальную поверхность (шероховатость или нарушенный слой) полубесконечного гексагонального кристалла (с осью симметрии шестого порядка, перпендикулярной поверхности) или изотропного твердого тела. Считается, что поверхность граничит с вакуумом. Шероховатость и нарушенный слой считаются тонкими по сравнению с длиной поверхностной волны. Также считается, что длина поверхностной волны велика по сравнению с характерным размером неоднородности поверхности.

Как показано в работе, по измеренным значениям дисперсии фазовой скорости и длины затухания ПАВ Рэлея или ПАВ SH-поляризации можно найти для шероховатой поверхности амплитуду шероховатости и характерный размер неоднородности поверхности.

В случае нарушенного слоя, поскольку он характеризуется 15 параметрами, рассмативается частный случай, когда флуктуирует только плотность. Тогда по измеренному значению дисперсии фазовой скорости ПАВ Рэлея или ПАВ SH-поляризации можно найти толщину нарушенного слоя.

Поскольку одни и те же параметры, характеризующие поверхность, можно найти как с помощью ПАВ Рэлея, так и с помощью ПАВ SH-поляризации, эти поляризации оказываются связанными, т. е. по известным значениям дисперсии фазвой скорости и длины затухания ПАВ Рэлея можно найти дисперсию и длину затухания ПАВ SH-поляризации, и наоборот. При этом, несмотря на различную зависимость дисперсии и длины затухания от частоты и параметров поверхности в различных задачах, во всех случаях получены одинаковые уравнения, связывающие ПАВ Рэлея и ПАВ SH-поляризации. Эти уравнения не зависят ни от толщины поверхностного слоя, ни от его случайных характеристик, таких как корреляционный радиус и среднеквадратичная флуктуация плотности.

В работе также получены коэффициенты пропорциональности, входящие в уравнения для ПАВ Рэлея и ПАВ SH-поляризации для задач с нарушенным поверхностным слоем. Эти коэффициенты рассчитаны численно для ряда кристаллов.

Приложение

Коэффициенты Ламэ λ_0, μ_0 и плотность массы ρ_0 характеризуют изотропный поверхностный слой, а коэффициенты модулей упругости c_{ij} и плотность массы ρ — гексагональную подложку.

$$\gamma = \frac{\alpha_{11}\alpha_{22}(1-\varepsilon)}{c_{11}c_{44}\varepsilon\Big((1-\varepsilon)(2\,\frac{c_{33}}{c_{11}}\,\alpha_{11}\alpha_{22}+2-3\frac{c_{44}}{c_{11}}\,\varepsilon)+\varepsilon(1-\frac{c_{44}}{c_{11}}\,\varepsilon)\Big)}, \tag{П1}$$

$$\Phi'_R = \gamma c_{33}(\alpha_{11}+\alpha_{22})\Bigg(\frac{\rho_0}{\rho}\,c_{44}\varepsilon - 2\,\frac{\lambda_0\mu_0}{\lambda_0+2\mu_0} - 2\mu_0 - \frac{c_{44}\varepsilon - c_{11}}{\alpha_{11}\alpha_{22}c_{33}}\,\frac{\rho_0}{\rho}\,c_{44}\varepsilon\Bigg), \tag{П2}$$

$$\Lambda'_R = -\gamma\left(\frac{\rho_0}{\rho}\right)^2(c_{44}\varepsilon)^2\Bigg(-\frac{c_{33}(\alpha_{11}+\alpha_{22})}{2c_{44}}\,\frac{\sqrt{\varepsilon}}{h} + \mathrm{Im}\Bigg(\int\limits_0^{\sqrt{\varepsilon}} d\eta\eta\,\frac{Q_0^{11}(\eta)}{\tilde{A}(\eta)} + E^{11}(0)\Bigg)\Bigg), \tag{П3}$$

$$Q_0^{11}(\eta) = \frac{1}{2}\,c_{33}(\alpha_{11}+\alpha_{22})c_{33}(\tilde{\alpha}_{11}+\tilde{\alpha}_{22}) + \frac{(c_{44}\varepsilon - c_{11})(\alpha_{11}+\alpha_{22})}{\alpha_{11}\alpha_{22}}\,\frac{(c_{44}\varepsilon - c_{11}\eta^2)(\tilde{\alpha}_{11}+\tilde{\alpha}_{22})}{\tilde{\alpha}_{11}\tilde{\alpha}_{22}}, \tag{П4}$$

$$\begin{cases} \left(1-\dfrac{c_{44}}{c_{33}}\right)\varepsilon^3 + \left(\frac{c_{11}}{c_{33}} - 1 - 2a_1\right)\varepsilon^2 + a_1(2+a_1)\varepsilon - a_1^2 = 0, \\ 0 < \varepsilon < \min(1, a_1), \end{cases} \tag{П5}$$

$$a_1 = \frac{c_{11}c_{33} - c_{13}^2}{c_{33}c_{44}},\ \ h = \frac{c_{11}-c_{12}}{2c_{44}}, \tag{П6}$$

$$E^{11}(0) = -i\pi\mathrm{sign}\left[\frac{(1-\varepsilon)\Big(2\,\frac{c_{33}}{c_{11}}\,\alpha_{11}\alpha_{22} + 2 - 3\,\frac{c_{44}}{c_{11}}\,\varepsilon\Big) + \varepsilon\Big(1-\frac{c_{44}}{c_{11}}\,\varepsilon\Big)}{(1-\varepsilon)\Big(2a_1\,\frac{c_{33}}{c_{11}}\,\alpha_{11}\alpha_{22} - \varepsilon\Big) + \varepsilon\Big(1-\frac{c_{44}}{c_{11}}\,\varepsilon\Big)}\right] \times \frac{\alpha_{11}\alpha_{22}(1-\varepsilon)Q_0^{11}(1)}{c_{11}c_{44}\Big((1-\varepsilon)\Big(2a_1\,\frac{c_{33}}{c_{11}}\,\alpha_{11}\alpha_{22}-\varepsilon\Big) + \varepsilon\Big(1-\frac{c_{44}}{c_{11}}\,\varepsilon\Big)\Big)}, \tag{П7}$$

$$\tilde{A}(\eta) = c_{13}^2\eta^2 + (c_{11}\eta^2 - c_{44}\varepsilon)\left(\frac{c_{44}\varepsilon}{\tilde{\alpha}_1\tilde{\alpha}_{22}} - c_{33}\right), \tag{П8}$$

$$\tilde{\alpha}_{11}^2 = \frac{1}{2}\big(x + \sqrt{x^2+4y}\big),\ \ \tilde{\alpha}_{22}^2 = \frac{1}{2}\big(x - \sqrt{x^2+4y}\big), \tag{П9}$$

$$x = \left(a_1 - 2\,\frac{c_{13}}{c_{33}}\right)\eta^2 - \frac{c_{33}+c_{44}}{c_{33}}\,\varepsilon,$$

$$y = \frac{1}{c_{33}}(\eta^2-\varepsilon)(c_{11}\eta^2 - c_{44}\varepsilon), \tag{П10}$$

$$\mathrm{Re}\tilde{\alpha}_{11} > 0,\ \mathrm{Re}\tilde{\alpha}_{22} > 0,\ \mathrm{Im}\tilde{\alpha}_{11} < 0,\ \mathrm{Im}\tilde{\alpha}_{22} < 0, \tag{П11}$$

$$\alpha_{11} = \tilde{\alpha}_{11}|_{\eta=1},\ \ \alpha_{22} = \tilde{\alpha}_{22}|_{\eta=1}, \tag{П12}$$

$$\Phi'_{\mathrm{SH}} = \frac{1}{2h}\left(\frac{\rho_0}{\rho}\,h - \frac{\mu_0}{c_{44}}\right)^2, \tag{П13}$$

$$\Lambda'_{\mathrm{SH}} = \sqrt{\frac{\Phi'_{\mathrm{SH}}}{2h}}\Bigg(h^{3/2}\left(\frac{\rho_0}{\rho}\right)^2 + h^2\left(\frac{\rho_0}{\rho}\right)^2\frac{h}{2} \times \mathrm{Im}\Bigg(\int\limits_0^1 dx\,\frac{\sqrt{x-1}\big(\tilde{\alpha}_{t1}(x)+\tilde{\alpha}_{t2}(x)\big)}{\tilde{\alpha}_m(x) + \sqrt{x-1}(1-a_1x)}\Bigg) + h^{3/2}\left(\frac{\rho_0}{\rho}\right)^2 E_{\mathrm{sh}}^{11}(0)\Bigg), \tag{П14}$$

$$E_{\mathrm{SH}}^{11}(0) = -\pi\mathrm{sign}\left[\frac{(1-\varepsilon)\Big(2\,\frac{c_{33}}{c_{11}}\,\varepsilon\alpha_{t1}\alpha_{t2} - 3\,\frac{c_{44}}{c_{11}}\,\varepsilon + 2\Big) + \varepsilon\Big(1-\frac{c_{44}}{c_{11}}\,\varepsilon\Big)}{(1-\varepsilon)\Big(2a_1\,\frac{c_{33}}{c_{11}}\,\varepsilon\alpha_{t1}\alpha_{t2} - \varepsilon\Big) + \varepsilon\Big(1-\frac{c_{44}}{c_{11}}\,\varepsilon\Big)}\right] \times \frac{\alpha_{t1}\alpha_{t2}(\alpha_{t1}+\alpha_{t2})}{(1-\varepsilon)\Big(2a_1\,\frac{c_{33}}{c_{11}}\,\varepsilon\alpha_{t1}\alpha_{t2}-\varepsilon\Big) + \varepsilon\Big(1-\frac{c_{44}}{c_{11}}\,\varepsilon\Big)}, \tag{П15}$$

$$\tilde{\alpha}_m(x) = \frac{\tilde{\alpha}_{t1}(x)\tilde{\alpha}_{t2}(x)}{\sqrt{x-1}}, \tag{П16}$$

$$\tilde{\alpha}_{t1}^2(x) = \frac{1}{2}\left(z + \sqrt{z^2 - 4y_2}\right),$$

$$\tilde{\alpha}_{t2}^2(x) = \frac{1}{2}\left(z - \sqrt{z^2 - 4y_2}\right), \tag{П17}$$

$$z = \left(a_1 - 2\frac{c_{13}}{c_{33}}\right)x - \left(1 + \frac{c_{44}}{c_{33}}\right),$$

$$y_2 = \frac{c_{11}}{c_{33}}(x-1)\left(x - \frac{c_{44}}{c_{33}}\right), \tag{П18}$$

$$\alpha_{t1} = \tilde{\alpha}_{t1}\left(\frac{1}{\varepsilon}\right), \ \alpha_{t2} = \tilde{\alpha}_{t2}\left(\frac{1}{\varepsilon}\right), \tag{П19}$$

$$\mathrm{Re}\tilde{\alpha}_{t1} > 0, \ \mathrm{Re}\tilde{\alpha}_{t2} > 0, \ \mathrm{Im}\tilde{\alpha}_{t1} < 0, \ \mathrm{Im}\tilde{\alpha}_{t2} < 0. \tag{П20}$$

Список литературы

[1] В.В. Косачёв, Ю.Н. Гандурин. ФТТ **45**, *2*, 369 (2003).
[2] В.В. Косачёв, Ю.Н. Гандурин. ФТТ **45**, *9*, 1722 (2003).
[3] В.В. Косачёв, Ю.Н. Гандурин. ФТТ **46**, *10*, 1886 (2004).
[4] В.В. Косачёв, Ю.Н. Гандурин. ФТТ **50**, *4*, 751 (2008).
[5] В.В. Косачёв, Ю.Н. Гандурин, С.Е. Муравьёв. ФТТ **51**, *9*, 1829 (2009).
[6] В.В. Косачёв, Ю.Н. Гандурин, С.Е. Муравьёв. ФТТ **53**, *10*, 2064 (2011).
[7] O.L. Anderson. Phys. Acoust. B **3**, 80 (1965).