

01;03

## О нестационарном тепло- и массопереносе в многоатомных газах

© С.А. Савков, А.А. Юшканов, Ю.И. Яламов

Орловский государственный университет,  
302015 Орел, Россия

(Поступило в Редакцию 19 марта 2002 г. В окончательной редакции 5 июля 2002 г.)

Приведено аналитическое решение задачи о нестационарном источнике тепла или частиц в многоатомном газе. Рассмотрена зависимость распределения температуры и концентрации от расстояния до источника. Показана возможность возбуждения звуковых колебаний нестационарным источником тепла. Полученное решение может найти приложение при изучении распространения звуковых волн, исследовании полей температуры и концентрации, создаваемых источниками тепла или частиц различного профиля, в частности лучом лазера в поглощающей среде и т. п.

В последние годы наблюдается рост интереса к изучению явлений переноса в молекулярных газах [1]. Причем аналитические решения получены только для стационарных задач [2–6], тогда как при решении нестационарного кинетического уравнения учитывалось лишь поступательное движение молекул газа [7–9].

В данной работе впервые рассматривается нестационарное кинетическое уравнение для многоатомного газа.

Как известно (см., например, [10]), вклад внутренних степеней свободы определяется характером их энергетического спектра. Расстояние между уровнями энергии вращательных степеней свободы задается соотношением  $\hbar^2/2J$  ( $J$  — момент инерции молекулы) и сравнимо с энергией теплового движения  $kT$  лишь для наиболее легких газов. Так, для молекул водорода  $\hbar^2/2Jk = 85.4$  К. Для многоатомных газов эта величина существенно меньше, что позволяет пренебречь дискретным характером энергии вращательного движения и рассматривать вращательные степени свободы в классическом приближении, тогда как колебательные степени свободы возбуждаются при температурах порядка  $10^3$  К. Поэтому их можно считать полностью замороженными.

Следуя [11], начнем с решения одномерного уравнения

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{V}_x \frac{\partial f}{\partial x} = J_{st}[f].$$

Здесь  $f$  — функция распределения,  $\mathbf{V}$  — собственная скорость поступательного движения молекул газа,  $J_{st}$  — интегральный оператор столкновений.

Ограничиваясь учетом линейных эффектов, представим решение этого уравнения в виде

$$f = f_0(1 + \varphi),$$

где  $\varphi$  — поправка к равновесной (максвелловской) функции распределения, которая в рассматриваемом случае

многоатомного газа определяется соотношением

$$f_0 = n_0 \left( \frac{m}{2\pi k T_0} \right)^{3/2} \prod_{i=1}^3 \left( \frac{J_i}{2\pi k T_0} \right)^{1/2} \exp(-C^2 - \gamma^2),$$

$$C = \mathbf{V} \left( \frac{m}{2k T_0} \right)^{1/2}, \quad \gamma = \left( \sum_{i=1}^3 \frac{J_i \omega_i^2}{2k T_0} \right)^{1/2},$$

$m$ ,  $J_i$  и  $\omega_i$  — масса, главные моменты инерции и соответствующие им составляющие угловой скорости молекул;  $k$  — постоянная Больцмана;  $T_0$  и  $n_0$  — невозмущенные значения температуры и концентрации.

Ввиду отсутствия надежных сведений о характере межмолекулярного взаимодействия молекулярных газов ограничимся аналогом БГК (Бхатнагара–Гросса–Крука) модели интеграла столкновений [3]. Учитывая, что для большинства газов при нормальных условиях времена релаксации поступательного и вращательного движения близки по величине, условимся считать их одинаковыми.

Принимая в качестве единиц измерения  $x$  и  $t$  значения

$$l = \chi \sqrt{\frac{2m}{kT}} \quad \text{и} \quad \tau = \frac{\chi m}{kT},$$

соответствующие средней длине и времени свободного пробега молекул газа, имеем

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + C_x \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \sum_{i=1}^3 P_i M_i - \varphi. \quad (1)$$

Здесь

$$M_i = \pi^{-3} \int P_i \varphi \exp(-C^2 - \gamma^2) d^3 \gamma d^3 C,$$

$$P_1 = 1, \quad P_2 = \frac{1}{\sqrt{3}} (C^2 + \gamma^2 - 3), \quad P_3 = \sqrt{2} C_x,$$

$\chi$  — коэффициент температуропроводности газа.

Обозначим  $C_x = \mu$  и представим  $\varphi$  в виде

$$\varphi = e_1 Y_1(t, x, \mu) + e_2 Y_2(t, x, \mu),$$

$$e_1 = 1, \quad e_2 = \frac{1}{\nu} (C^2 - \mu^2 + \gamma^2 - \nu^2), \quad \nu = \sqrt{5/2}. \quad (2)$$

В результате (1) сводится к интегродифференциальному уравнению относительно вектора  $\mathbf{Y} = \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{bmatrix}$

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + \mu \frac{\partial}{\partial x} + 1 \right) \mathbf{Y}(t, x, \mu) = \pi^{-1/2} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{K}(\mu, \mu_1) \mathbf{Y}(t, x, \mu_1) \exp(-\mu_1^2) d\mu_1,$$

$$\mathbf{K}(\mu, \mu_1) = \begin{bmatrix} 1 + 2\mu\mu_1 + \frac{1}{3}(\mu^2 - \frac{1}{2})(\mu_1^2 - \frac{1}{2}) & \frac{\nu}{3}(\mu^2 - \frac{1}{2}) \\ \frac{\nu}{3}(\mu_1^2 - \frac{1}{2}) & \frac{\nu^2}{3} \end{bmatrix}.$$

Разделяя переменные, представим решение этого уравнения в виде

$$\mathbf{Y}(t, x, \mu) = \exp(\sigma t - (\sigma + 1)x/\eta) \mathbf{F}(\sigma, \eta, \mu).$$

Компоненты вектора  $\mathbf{F}$  определяются из системы характеристических уравнений

$$\pi^{1/2} \left( 1 - \frac{\mu}{\eta} \right) (\sigma + 1) F_1 = N_1^0 + 2\mu N_1^1 + \frac{2\mu^2 - 1}{12} (2N_1^2 - N_1^0 + 2\nu N_2^0), \quad (3)$$

$$\pi^{1/2} \left( 1 - \frac{\mu}{\eta} \right) (\sigma + 1) F_2 = \frac{\nu}{6} (2N_1^2 - N_1^0 + 2\nu N_2^0),$$

$$N_i^\alpha = \int_{-\infty}^{+\infty} F_i \mu^\alpha \exp(-\mu^2) d\mu. \quad (4)$$

Следуя [12], выразим входящие в (3), (4) высшие моменты функции  $F_1$  через  $N_1^0$ . Для этого умножим (3) на  $\exp(-\mu^2)$  и  $\mu \exp(-\mu^2)$  и проинтегрируем по всей области изменения  $\mu$ . Решая полученную систему уравнений, найдем

$$N_1^\alpha = N_1^0 \left( \frac{\eta\sigma}{\sigma + 1} \right)^\alpha.$$

Таким образом, уравнения (3), (4) также могут быть представлены в векторной форме

$$\pi^{1/2} \eta \mathbf{F} = (\sigma + 1)(\eta - \mu) \Delta \cdot \mathbf{N}, \quad (5)$$

$$\Delta = \begin{bmatrix} 1 + 2\frac{\mu\sigma\eta}{\sigma+1} + \frac{2\mu^2-1}{6} \left( \left( \frac{\sigma\eta}{\sigma+1} \right)^2 - \frac{1}{2} \right) & \frac{\nu}{6} (2\mu^2 - 1) \\ \frac{\nu}{3} \left( \left( \frac{\sigma\eta}{\sigma+1} \right)^2 - \frac{1}{2} \right) & \frac{\nu^2}{3} \end{bmatrix}, \quad (6)$$

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} N_1^0 \\ N_2^0 \end{bmatrix} = \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-\mu^2) \mathbf{F} d\mu. \quad (7)$$

Равенство (7) можно рассматривать как условие нормировки для функции  $\mathbf{F}$ .

В случае, когда  $\eta$  не является действительным числом, из (5) находим

$$\mathbf{F} = \frac{\pi^{1/2} \eta}{(\eta - \mu)(\sigma + 1)} \Delta \cdot \mathbf{N}. \quad (8)$$

Соответствующие этому решению значения  $\eta$  определяются условием (7), что дает

$$\mathbf{N} = \frac{\pi^{-1/2} \eta}{\sigma + 1} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\Delta}{\eta - \mu} \exp(-\mu^2) d\mu \cdot \mathbf{N}$$

и эквивалентно

$$\det \Lambda(\sigma, \eta) = 0. \quad (9)$$

Здесь

$$\Lambda(\sigma, \eta) = (\sigma + 1) \mathbf{E} - \pi^{-1/2} \eta \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\Delta}{\eta - \mu} \exp(-\mu^2) d\mu = \begin{bmatrix} \sigma + 1 + \lambda_c(\eta) + \frac{2\eta^2\sigma}{\sigma+1} (\lambda_c(\eta) + 1) + \lambda_1 l & \nu \lambda_1 \\ \frac{\nu}{3} \lambda_c(\eta) l & \sigma + 1 + \frac{5}{6} \lambda_c(\eta) \end{bmatrix},$$

$$\lambda_1 = \frac{\lambda_c(\eta)(2\eta^2 - 1) + 2\eta^2}{6}, \quad l = \left( \frac{\sigma\eta}{\sigma + 1} \right)^2 - \frac{1}{2},$$

$$\lambda_c(z) = \pi^{-1/2} z \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-\mu^2) \frac{d\mu}{\mu - z}, \quad (10)$$

$\mathbf{E}$  — единичная матрица.

При этом сам нормировочный вектор  $\mathbf{N}$  может быть определен с точностью до произвольной константы

$$\mathbf{N} = \text{const} \begin{bmatrix} \Lambda_{22} \\ -\Lambda_{21} \end{bmatrix}. \quad (11)$$

Для решения дисперсионного уравнения (9) обратимся к теории краевых задач функции комплексного переменного (см., например, [13]). Отметим, что функция  $D(z) = \det \Lambda(\sigma, z)$  представляет собой четную кусочно-аналитическую функцию в комплексной плоскости с разрезом вдоль действительной оси. Обозначим сужения этой функции на верхнюю и нижнюю полуплоскости через  $D^+$  и  $D^-$  соответственно. Рассмотрим однородную краевую задачу Римана

$$X^+(x) = G(x) X^-(x), \quad x \in \mathbb{R} \quad (12)$$

с коэффициентом  $G(x) = D^+(x)/D^-(x)$ , где  $D^\pm(x) = \lim_{y \rightarrow \pm 0} D(x + iy)$ .

В силу обобщенной теоремы Лиувилля общее решение задачи (12) определяются выражением

$$D^\pm(z) = A(z + i)^{-2x} X^\pm(z) \prod_{\alpha=1}^x (\eta_\alpha^2 - z^2),$$

где

$$X^\pm(z) = \left( \frac{z+i}{z \pm i} \right)^{2x} \exp(\Gamma(z)),$$

$$\Gamma(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \ln \left( \left( \frac{\mu+i}{\mu-i} \right)^{2x} G(\mu) \right) \frac{d\mu}{\mu-z},$$

$$x = \frac{1}{2} \operatorname{ind} G(x) = \frac{1}{2\pi} [\arg G(x)]_{\mathbb{R}_+}, \quad \mathbb{R}_+ \in (0, \infty).$$

Таким образом, для определения  $\eta_\alpha$  достаточно вычислить  $D^\pm$  и  $X^\pm$  при произвольных  $x+1$  значениях  $z$  и решить полученную систему относительно указанных величин и постоянной  $A$ . Найденные таким образом значения  $\pm\eta_\alpha$  являются искомыми корнями уравнения (9).

С учетом (11) решения дискретного спектра могут быть представлены в виде

$$\mathbf{F}(\sigma, \eta_\alpha, \mu) = \frac{\pi^{-1/2} \eta_\alpha}{(\eta_\alpha - \mu)(\sigma + 1)} \begin{bmatrix} \Lambda_{22}\Delta_{11} - \Lambda_{21}\Delta_{12} \\ \Lambda_{22}\Delta_{21} - \Lambda_{21}\Delta_{22} \end{bmatrix}, \quad (13)$$

где  $\Lambda_{ij}$  и  $\Delta_{i,j}$  — компоненты матриц (10) и (6), вычисленные при  $\eta = \eta_\alpha$ .

В случае действительных значений  $\eta$  решениями уравнений (5), (7) являются функции

$$\Phi(\sigma, \eta, \mu) = \left( \pi^{-1/2} \frac{\eta}{\eta - \mu} \Delta + \exp(\eta^2) \Lambda \delta(\eta - \mu) \right) \frac{\mathbf{N}}{\sigma + 1}, \quad (14)$$

составляющие непрерывный спектр решений. Все интегралы от функции (14) должны вычисляться в смысле главного значения интеграла Коши.

Ввиду произвольности нормировочного вектора  $\mathbf{N}$  решения (14) можно представить как суперпозицию двух независимых функций

$$\Phi_1 = \pi^{-1/2} \frac{\eta}{\eta - \mu} \begin{bmatrix} \mu^2 - \frac{1}{2} \\ \nu \end{bmatrix} + \exp(\eta^2) \delta(\eta - \mu) \begin{bmatrix} \lambda_p(\eta) \left( \eta^2 - \frac{1}{2} \right) + \eta^2 \\ \frac{3}{\nu} (\sigma + 1) + \nu \lambda(\eta) \end{bmatrix},$$

$$\Phi_2 = \pi^{-1/2} \frac{\eta}{\eta - \mu} \begin{bmatrix} 1 + \frac{2\mu\eta\sigma}{\sigma+1} \\ 0 \end{bmatrix} + \exp(\eta^2) \delta(\eta - \mu) \begin{bmatrix} \sigma + 1 + \lambda_p(\eta) + 2(\lambda_p(\eta) + 1) \frac{\eta^2\sigma}{\sigma+1} \\ \frac{\sigma+1}{2\nu} - \frac{\sigma^2\eta^2}{(\sigma+1)\nu} \end{bmatrix}.$$

Здесь

$$\lambda_p(\eta) = -2\eta \exp(-\eta^2) \int_0^\eta \exp(\mu^2) d\mu.$$

Можно доказать (см., например, [11]), что полученная система решений представляет собой полную систему ортогональных функций, удовлетворяющих следующим условиям:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{F}(\sigma, \eta_\alpha, \mu) \mathbf{F}(\sigma, \eta_\beta, \mu) \exp(-\mu^2) \mu d\mu &= \delta_{\alpha\beta} N_\alpha, \\ \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{F}(\sigma, \eta_\alpha, \mu) \Phi_\beta(\sigma, \eta, \mu) \exp(-\mu^2) \mu d\mu &= 0, \\ \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{X}_\alpha(\sigma, \eta', \mu) \Phi_\beta(\sigma, \eta, \mu) \exp(-\mu^2) \mu d\mu &= \delta_{\alpha\beta} \delta(\eta - \eta') N_0, \end{aligned} \quad (15)$$

где

$$\mathbf{X}_1 = N_{11}\Phi_1 - N_{12}\Phi_2, \quad \mathbf{X}_2 = N_{22}\Phi_2 - N_{12}\Phi_1,$$

$$N_{11} = \left( \sigma + 1 + \lambda_p(\eta) + 2(\lambda_p(\eta) + 1) \frac{\sigma\eta^2}{\sigma+1} \right)^2 + \frac{2}{5} \left( \frac{\sigma+1}{2} - \frac{\eta^2\sigma^2}{\sigma+1} \right)^2 + \pi\eta^2 \exp(-2\eta^2) \left( 1 + \frac{2\sigma\eta^2}{\sigma+1} \right),$$

$$N_{12} = \left( \frac{\sigma+1}{2} - \frac{\eta^2\sigma^2}{\sigma+1} \right) \left( \frac{6}{5}(\sigma+1) + \lambda_p(\eta) \right) + \left( \sigma + 1 + \lambda_p(\eta) + 2(\lambda_p(\eta) + 1) \frac{\sigma\eta^2}{\sigma+1} \right) \times \left( \lambda_p(\eta) \left( \eta^2 - \frac{1}{2} \right) + \eta^2 \right) + \pi\eta^2 \exp(-2\eta^2) \left( \eta^2 - \frac{1}{2} \right) \left( 1 + \frac{2\sigma\eta^2}{\sigma+1} \right),$$

$$N_{22} = \left( \lambda_p(\eta) \left( \eta^2 - \frac{1}{2} \right) + \eta^2 \right)^2 + \frac{5}{2} \left( \frac{6}{5}(\sigma+1) + \lambda_p(\eta) \right)^2 + \pi\eta^2 \exp(-2\eta^2) \left( \left( \eta^2 - \frac{1}{2} \right)^2 + \frac{5}{2} \right),$$

$$N_0 = \eta \exp(\eta^2) (N_{11}N_{22} - N_{12}^2),$$

значения  $N_\alpha$  ввиду его чрезвычайной громоздкости удобнее вычислять непосредственным численным интегрированием.

В качестве применения полученного решения рассмотрим бесконечный плоский источник тепла мощностью  $W(t) = \exp(\sigma t)$ , расположенный в плоскости  $x = 0$ .

Функцию распределения в этом случае можно представить в виде

$$\mathbf{Y}(t, x, \mu) = \mathbf{Y}^{\pm}(\sigma, x, \mu) \exp(\sigma t), \quad \text{для } \pm x > 0,$$

где

$$\begin{aligned} \mathbf{Y}^{\pm}(\sigma, x, \mu) = & \pm \sum_{\alpha} A_{\alpha}^{\pm} \mathbf{F}_{\alpha}(\sigma, \pm \eta_{\alpha}, \mu) \exp(\mp(\sigma + 1)x/\eta_{\alpha}) \\ & + \sum_{\beta=0}^2 \int_0^{\pm\infty} B_{\beta} \Phi_{\beta}(\sigma, \eta, \mu) \exp(-(\sigma + 1)x/\eta) d\eta, \end{aligned} \quad (16)$$

причем суммирование в первом слагаемом следует вести только по тем значениям  $\alpha$ , для которых  $\text{Re}((\sigma + 1)/\eta_{\alpha}) > 0$ .

Коэффициенты  $A$  и  $B$  определяются из условия скачка

$$\mu(\mathbf{Y}^{+} - \mathbf{Y}^{-}) = \mathbf{S} \quad \text{при } x = 0.$$

Отсюда в силу условий (15) находим

$$\begin{aligned} A_{\alpha}^{\pm} &= \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{F}(\sigma, \pm \eta_{\alpha}, \mu) \mathbf{S} \exp(-\mu^2) d\mu, \\ B_{\beta} &= \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{X}_{\beta} \mathbf{S} \exp(-\mu^2) d\mu. \end{aligned} \quad (17)$$

В рассматриваемом случае

$$\mathbf{S} = \mathbf{S}_h = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} \mu^2 - \frac{1}{2} \\ \nu \end{bmatrix}.$$

Соответственно

$$\begin{aligned} A_{\alpha}^{\pm} &= a_{\alpha}^h / N_{\alpha}, \quad B_1 = \frac{\sigma + 1}{N_0} (N_{11} b_1^h - N_{12} b_2^h), \\ B_2 &= \frac{\sigma + 1}{N_0} (N_{22} b_2^h - N_{12} b_1^h), \\ a_{\alpha}^h &= \frac{1}{3} \frac{\eta_{\alpha}^2 \sigma^2}{\sigma + 1} - \frac{\sigma + 1}{6}, \quad b_1^h = 1, \quad b_2^h = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{Y}_h^{\pm}(\sigma, x, \mu) = & \pm \sum_{\alpha} \frac{a_{\alpha}^h}{N_{\alpha}} \mathbf{F}_{\alpha}(\sigma, \pm \eta_{\alpha}, \mu) \\ & \times \exp(\mp(\sigma + 1)x/\eta_{\alpha}) \\ & + \int_0^{\pm\infty} \frac{\sigma + 1}{N_0} \mathbf{X}_1 \exp(-(\sigma + 1)x/\eta) d\eta. \end{aligned} \quad (18)$$

Для относительных перепадов температуры

$$\begin{aligned} \Delta T &= \frac{T - T_0}{T_0} \\ &= \frac{1}{3\pi^3} \int (C^2 + \gamma^2 - 3) \varphi \exp(-C^2 - \gamma^2) d^3 \gamma d^3 C \end{aligned}$$

и концентрации молекул газа

$$\Delta N = \frac{n - n_0}{n_0} = \pi^{-3} \int \varphi \exp(-C^2 - \gamma^2) d^3 \gamma d^3 C$$

имеем

$$\begin{aligned} \Delta T_h = & \pi^{-1/2} \exp(\sigma t) \left( \pm \sum_{\alpha} \frac{(a_{\alpha}^h)^2}{N_{\alpha}} \exp(\mp(\sigma + 1)x/\eta_{\alpha}) \right. \\ & \left. + (\sigma + 1)^2 \int_0^{\pm\infty} \frac{N_{11}}{N_0} \exp(-(\sigma + 1)x/\eta) d\eta \right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta N_h = & \pi^{-1/2} \exp(\sigma t) \left( \pm \sum_{\alpha} \frac{a_{\alpha}^h a_{\alpha}^p}{N_{\alpha}} \exp(\mp(\sigma + 1)x/\eta_{\alpha}) \right. \\ & \left. - (\sigma + 1)^2 \int_0^{\pm\infty} \frac{N_{12}}{N_0} \exp(-(\sigma + 1)x/\eta) d\eta \right). \end{aligned}$$

В случае раздельного возбуждения поступательных и вращательных степеней свободы

$$S_{\nu} = \frac{2}{3} C^2 - 1, \quad \text{и} \quad S_{\omega} = \frac{2}{3} \gamma^2 - 1$$

векторы  $\mathbf{F}$  и  $\mathbf{X}_{\beta}$  следует представить в развернутой форме

$$\mathbf{F} = e_1 F_1 + e_2 F_2, \quad \mathbf{X}_{\beta} = e_1 X_{1\beta} + e_2 X_{2\beta},$$

а соотношения (17) дополнить интегрированием по остальным проекциям скорости

$$\begin{aligned} A_{\alpha}^{\pm} &= \pi^{-5/2} \int (e_1 F_1(\sigma, \pm \eta_{\alpha}, \mu) + e_2 F_2(\sigma, \pm \eta_{\alpha}, \mu)) \\ & \times S \exp(-C^2 - \gamma^2) d^3 \gamma d^3 C, \end{aligned}$$

$$B_{\beta} = \pi^{-5/2} \int (e_1 X_{1\beta} + e_2 X_{2\beta}) S \exp(-C^2 - \gamma^2) d^3 \gamma d^3 C.$$

Определенный интерес представляют распределения температуры по поступательным и вращательным степеням свободы

$$\Delta T^{\nu} = \frac{2}{3} \pi^{-3} \int \left( C^2 - \frac{3}{2} \right) \varphi \exp(-C^2 - \gamma^2) d^3 \gamma d^3 C,$$

$$\Delta T^{\omega} = \frac{2}{3} \pi^{-3} \int \left( \gamma^2 - \frac{3}{2} \right) \varphi \exp(-C^2 - \gamma^2) d^3 \gamma d^3 C.$$

Для полноты картины следует также рассмотреть случай источника частиц

$$\mathbf{S}_p = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Значение указанных величин определяется соотношением

$$M_s^m(t, \sigma, x) = \pm \pi^{-1/2} \sum_{\alpha} \frac{a_{\alpha}^s a_{\alpha}^m}{N_{\alpha}} \times \exp(\sigma t \mp (\sigma + 1)x/\eta_{\alpha}) + \pi^{-1/2}(\sigma + 1)^2 \times \int_0^{\pm\infty} \frac{N_{11}b_1^s b_1^m + N_{22}b_2^s b_2^m - N_{12}(b_1^s b_2^m + b_2^s b_1^m)}{N_0} \times \exp(\sigma t - (\sigma + 1)x/\eta) d\eta. \quad (19)$$

Здесь и далее везде индекс  $m$  определяет вид момента функции распределения и соответствует:  $m = 1 - \Delta T$ ,  $2 - \Delta T^v$ ,  $3 - \Delta T^{\omega}$ ,  $4 - \Delta N$ ;  $s$  — задает характер источника:  $s = 1 - S_h$ ,  $2 - S_v$ ,  $3 - S_{\omega}$ ,  $4 - S_p$ ;

$$b_1^2 = \frac{4}{5}, \quad b_1^3 = \frac{6}{5}, \quad b_2^4 = 1, \quad b_1^4 = 0,$$

$$b_2^2 = -b_2^3 = \frac{2}{5} \left( \frac{\sigma \eta}{\sigma + 1} \right)^2 - \frac{1}{5},$$

$$a_{\alpha}^2 = \frac{8(\sigma + 1) + \lambda_c(\eta_{\alpha})}{24} \left( 2 \left( \frac{\eta_{\alpha} \sigma}{\sigma + 1} \right)^2 - 1 \right),$$

$$a_{\alpha}^3 = \frac{\lambda_c(\eta_{\alpha})}{24} \left( 1 - 2 \left( \frac{\eta_{\alpha} \sigma}{\sigma + 1} \right)^2 \right), \quad a_{\alpha}^4 = \sigma + 1 + \frac{4}{5} \lambda_c(\eta_{\alpha}).$$

Коэффициенты  $a_{\alpha}^1$ ,  $b_1^1$  и  $b_2^1$  определяются соотношениями (18).

Попутно необходимо обратить внимание на симметрию перечисленных моментов относительно перестановки индексов. Другими словами, относительный перепад, например, концентрации вокруг источника тепла  $\Delta N_h = M_1^4$  совпадает с распределением температуры от источника частиц  $\Delta T_p = M_4^1$ .

Очевидно, что плоский источник можно рассматривать как систему изотропных точечных источников. Следовательно, распределение от него любой скалярной величины  $\rho_{pl}$  можно выразить через распределение этой величины от точечного источника  $\rho_{pt}$

$$\rho_{pl}(x) = \int \rho_{pt}(r) d\sigma = 2\pi \int_x^{\infty} r \rho_{pt}(r) dr,$$

где  $r$  — расстояние от элемента поверхности  $d\sigma$  до рассматриваемой точки пространства.

Отсюда следует, что

$$\rho_{pt}(r) = -\frac{1}{2\pi r} \frac{d\rho_{pl}(r)}{dr}.$$

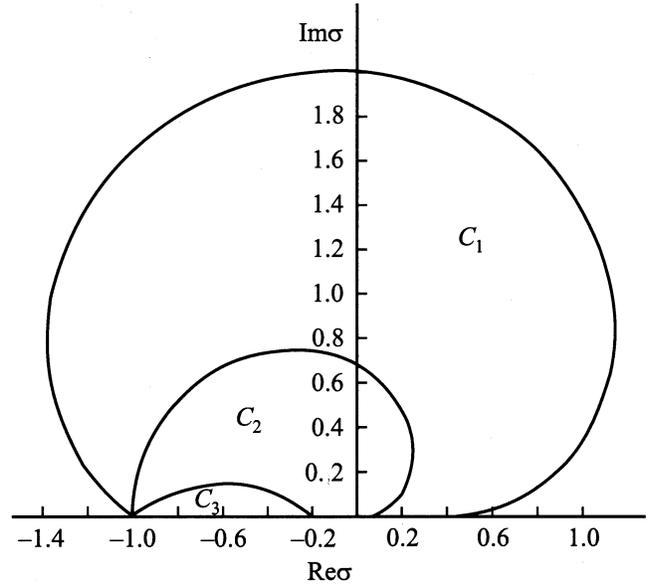


Рис. 1. Области значений  $\sigma$ , в которых дисперсионное уравнение имеет два ( $C_1$ ), четыре ( $C_2$ ) и шесть ( $C_3$ ) корней дискретного спектра.

Таким образом, для точечного изотропного источника

$$M_s^m(t, \sigma, r) = \frac{\sigma + 1}{2\pi^{3/2}r} \sum_{\alpha} \frac{a_{\alpha}^s a_{\alpha}^m}{\eta_{\alpha} N_{\alpha}} \times \exp(\sigma t - (\sigma + 1)r/\eta_{\alpha}) + \frac{(\sigma + 1)^3}{2\pi^{3/2}r} \times \int_0^{\pm\infty} \frac{N_{11}b_1^s b_1^m + N_{22}b_2^s b_2^m - N_{12}(b_1^s b_2^m + b_2^s b_1^m)}{\eta N_0} \times \exp(\sigma t - (\sigma + 1)r/\eta) d\eta. \quad (20)$$

Перейдем к анализу полученного решения.

На рис. 1 показаны области  $C_1, C_2$  и  $C_3$  изменения параметра  $\sigma$ , в которых дисперсионное уравнение имеет соответственно два, четыре и шесть корней. Для отрицательного полупространства  $\text{Im } \sigma$  картина имеет симметричный относительно действительной оси вид. Численный анализ показывает, что при стремлении  $\sigma$  изнутри к границе указанных областей мнимая часть одной из пар корней стремится к нулю и соответствующие им решения переходят в решения непрерывного спектра, при этом общее решение, т.е. сумма решений непрерывного и дискретного спектров, остается непрерывной функцией  $\sigma$ .

В случае малых значений  $\sigma$  решения непрерывного спектра переходят в соответствующие решения стационарного уравнения, а собственные значения дискретного спектра  $\eta_{\alpha}$  могут быть найдены в явном виде. Действительно, подставляя в дисперсионное уравнение (9)

очевидное асимптотическое представление

$$\lambda_c(z) = - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{2^n z^{2n}},$$

с точностью до первых исчезающих по  $z$  слагаемых получим

$$\frac{1}{3\eta^4} - \frac{2\sigma}{3\eta^4} + \sigma^3 = 0.$$

Отсюда находим

$$\eta_{\pm 1} = \pm \sqrt{2/3}\sigma^{-1}, \quad \eta_{\pm 2} = \pm (2\sigma)^{-1/2}.$$

Соответственно

$$N_{\pm 1} \sqrt{\pi} \eta_{\pm 1} = \frac{4}{81\sigma}, \quad N_{\pm 2} \sqrt{\pi} \eta_{\pm 2} = \frac{1}{9},$$

$$a_{\pm 1}^1 = 1/18, \quad a_{\pm 1}^4 = a_{\pm 2}^4 = -a_{\pm 2}^1 = 1/6,$$

$$a_{\pm 1}^2 = 2/72, \quad a_{\pm 2}^2 = -7/24,$$

$$a_{\pm 1}^3 = 1/72, \quad a_{\pm 2}^3 = -1/24.$$

Таким образом, в пределе  $\sigma \rightarrow 0$

$$\Delta T_h = \Delta T_h^{as} + I_{11}, \quad \Delta T_h^v = \Delta T_v = \Delta T_h^{as} + \frac{4I_{11} + I_{12}}{5},$$

$$\Delta T_h^\omega = \Delta T_\omega = \Delta T_h^{as} + \frac{6I_{11} - I_{12}}{5}, \quad \Delta T_p = \Delta T_p^{as} - I_{12},$$

$$\Delta T_v^v = \Delta T_h^{as} + \frac{16I_{11} + 8I_{12} + I_{22}}{25},$$

$$\Delta T_v^\omega = \Delta T_\omega^v = \Delta T_h^{as} + \frac{24I_{11} + 2I_{12} - I_{22}}{25},$$

$$\Delta T_\omega^\omega = \Delta T_h^{as} + \frac{25I_{11} - 10I_{12} + I_{22}}{16},$$

$$\Delta T_p^v = \Delta T_p^{as} - \frac{4I_{12} + I_{22}}{5}, \quad \Delta T_p^\omega = \Delta T_p^{as} - \frac{4I_{12} - I_{22}}{5},$$

$$\Delta N_h = \Delta N_h^{as} - I_{12}, \quad \Delta N_v = \Delta N_h^{as} - \frac{4I_{12} + I_{22}}{5},$$

$$\Delta N_\omega = \Delta N_h^{as} - \frac{6I_{12} - I_{22}}{5}, \quad \Delta N_p = \Delta N_p^{as} + I_{22}. \quad (21)$$

Здесь

$$I_{ij} = \frac{1}{2\pi^{3/2}r} \int_0^\infty \frac{N_{ij}}{\eta N_0} \exp(-r/\eta) d\eta.$$

Причем первые слагаемые в выражениях (21) определяются тем из решений дискретного спектра, которому соответствует собственное значение  $\eta_2$ . При этом функции

$$\Delta T_h^{as} = -\Delta N_h^{as} = \frac{1}{8\pi r}$$

описывают распределение температуры и концентрации молекул газа, создаваемое стационарным точечным источником тепла на достаточно большом расстоянии от него, и не зависят от способа возбуждения энергии;

$$\Delta N_p^{as} = -\Delta T_p^{as} = \frac{1}{8\pi r}$$

— асимптотическое распределение температуры и концентрации молекул газа от стационарного источника тепла.

В случае произвольной зависимости мощности источника от времени ее можно представить в виде интеграла Фурье

$$W(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} W_\omega \exp(i\omega t) d\omega,$$

$$W_\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} W(t) \exp(-i\omega t) dt$$

и в силу линейности задачи рассматривать распределение  $M_s^m$  как распределение соответствующих величин, создаваемых отдельными гармониками

$$M_s^m(t, r) = \int_{-\infty}^{+\infty} W_\omega M_s^m(t, i\omega, r) \exp(i\omega t) dt.$$

Данное обстоятельство определяет особую актуальность рассмотрения распределения  $M_s^m$  в случае чисто мнимых значений  $\sigma = i\omega$ , представленных на рис. 2.

Как видно из представленных графиков, в непосредственной близости от источника ( $r \ll |\sigma + 1|$ ) основной вклад в выражения (20) дают решения непрерывного спектра. При этом величина интегралов определяется малыми значениями  $\eta$ , для которых

$$\lambda_p = 0, \quad N_{11} = \frac{11}{10} (\sigma + 1)^2,$$

$$N_{12} = \frac{3}{5} (\sigma + 1)^2, \quad N_{22} = \frac{18}{5} (\sigma + 1)^2,$$

$$N_0 = \frac{18}{5} (\sigma + 1)^4 \eta, \quad \int_0^\infty \exp(-(\sigma + 1)r/\eta) \frac{d\eta}{\eta^2} = \frac{1}{r(\sigma + 1)}.$$

Соответственно

$$\Delta T_h = \frac{11}{72\pi^{3/2}r^2}, \quad \Delta T_h^\omega = \Delta T_\omega = \frac{1}{6\pi^{3/2}r^2},$$

$$\Delta N_h = \Delta T_p = -\frac{1}{12\pi^{3/2}r^2},$$

$$\Delta T_v = \Delta T_v^v = \Delta T_h^v = \Delta T_v^\omega$$

$$= \Delta T_\omega^v = -\Delta N_v = -\Delta T_p^v = \frac{5}{36\pi^{3/2}r^2}.$$

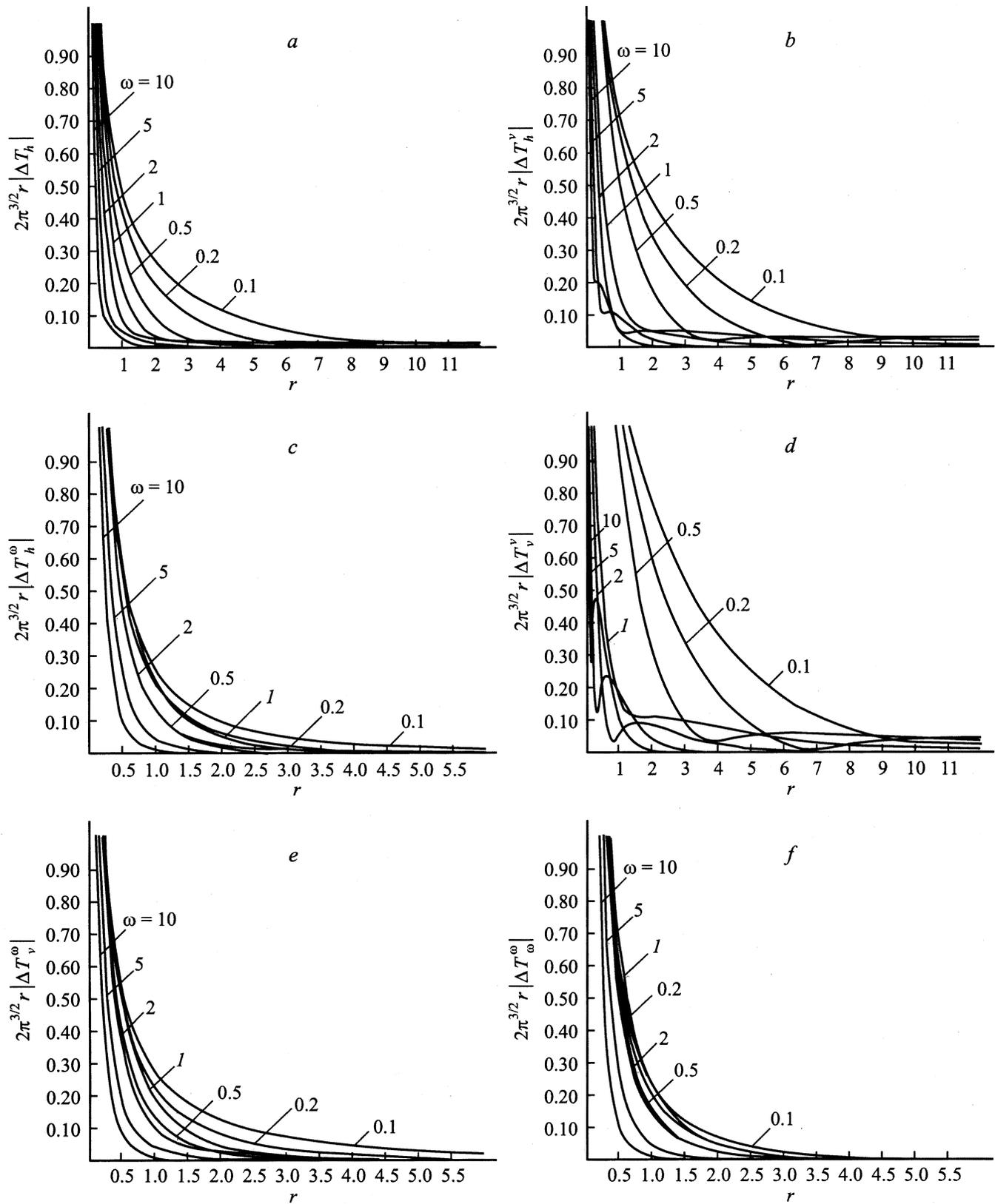


Рис. 2. Распределение относительного перепада температуры и плотности газа при фиксированных значениях  $\sigma = i\omega$ .

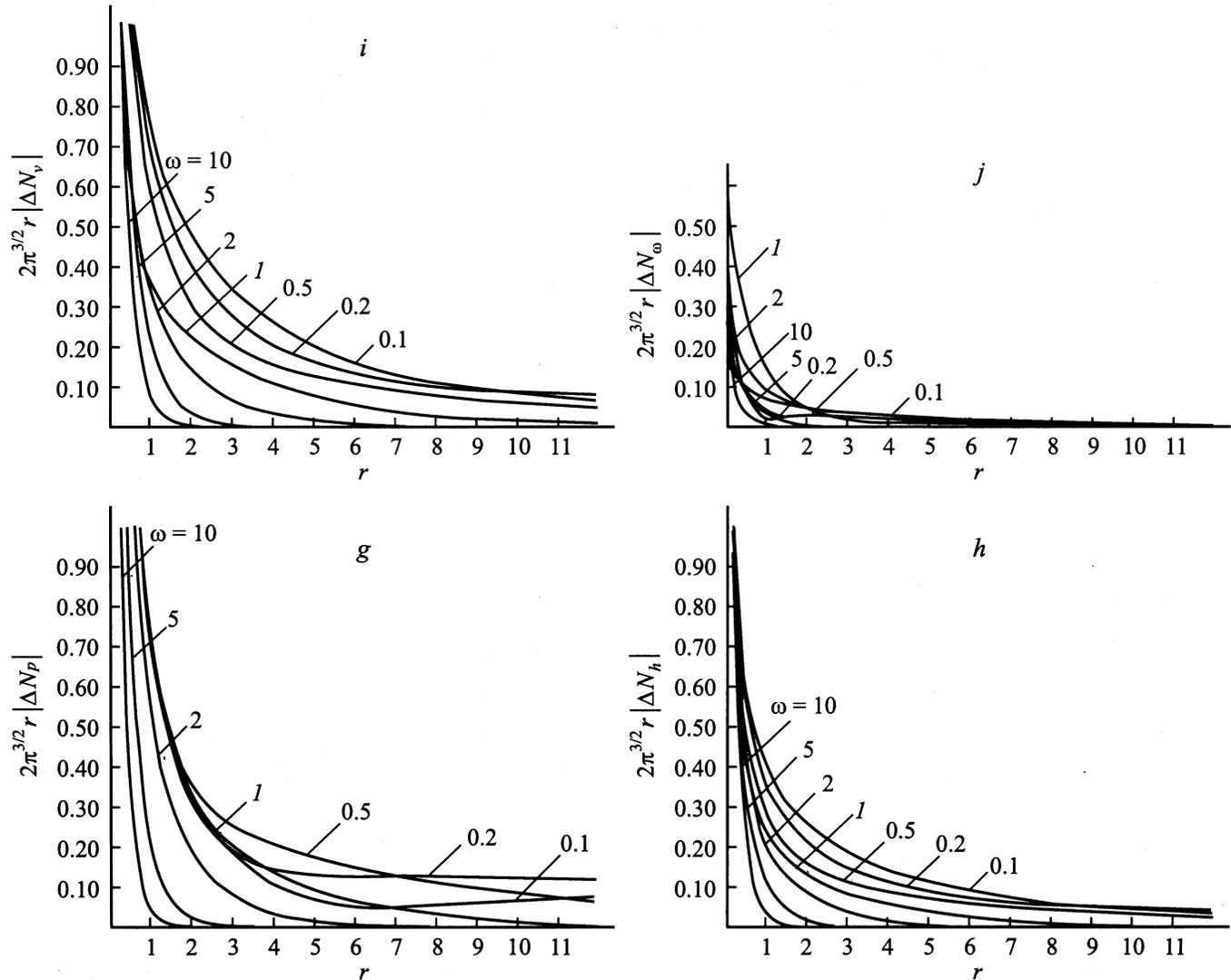


Рис. 2 (продолжение).

Таким образом, распределение большинства моментов в непосредственной близости от источника не зависит от  $\sigma$  и определяется только его мгновенной мощностью. Исключение составляют  $\Delta T_p^\omega = \Delta N_\omega$ , значения которых в рассматриваемом пределе задаются следующими членами в разложении по  $\eta$ , дающими вклад в распределение указанных моментов, пропорциональный  $1/r$ .

С удалением от источника второе слагаемое в выражении (20) затухает быстрее первого. Поэтому в пределе  $r \rightarrow \infty$  распределение  $M_s^m$  определяется решениями дискретного спектра (если таковые существуют). Скорость затухания последних определяется значением  $\eta_\alpha$ . В результате то из решений, которое в непосредственной близости от источника дает больший вклад в распределение макроскопических параметров, затухает быстрее. В зависимости от конкретного значения  $\omega$  указанные решения дают противоположный или одинаковый по фазе вклад в распределение  $M_s^m$ ,

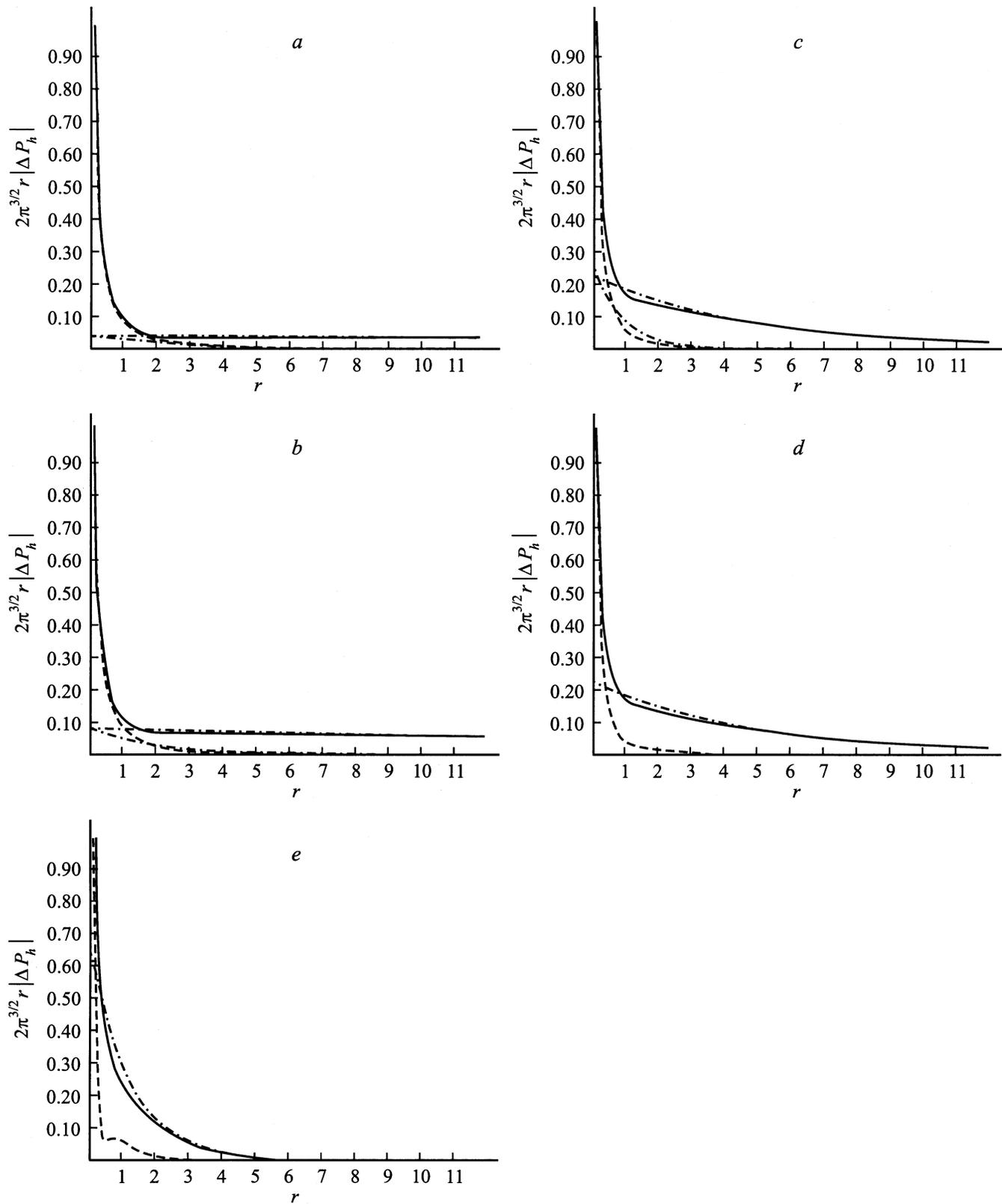
что определяет наличие или отсутствие перегиба на графиках.

Самостоятельный интерес представляет рассмотрение относительного перепада давления газа

$$\Delta P = \frac{P - P_0}{P_0} = \Delta T + \Delta N.$$

В силу (21) распределение давления в пределе  $\omega \rightarrow 0$  определяется решениями непрерывного спектра. С ростом частоты вклад решений дискретного спектра увеличивается. Причем решение, соответствующее  $\eta_1$ , затухает значительно медленнее. Поэтому на расстояниях, больших нескольких длин свободного пробега молекул газа, давление определяется выражением

$$\Delta P_s = \frac{i\omega + 1}{2\pi^{3/2}r} \frac{a_1^s(a_1^1 + a_1^4)}{\eta_1 N_1} \exp\left(i\omega t - \frac{i\omega + 1}{\eta_1} r\right),$$



**Рис. 3.** Распределение относительного перепада давления (сплошная кривая) при различных значениях  $\omega$ :  $a$  — 0.1,  $b$  — 0.2,  $c$  — 0.671,  $d$  — 0.672,  $e$  — 1.991.

Таблица 1. Параметры волны, соответствующей  $\eta_1$ 

$\omega$	$\eta_1$	$A$	$k$	$d$	$\delta_0$
0.001	1.42886 – 816.497 <i>i</i>	0.00079	0.00122	0.00000	0.49936 $\pi$
0.01	1.42875 – 81.6499 <i>i</i>	0.00785	0.01225	0.00009	0.49364 $\pi$
0.1	1.41851 – 8.16438 <i>i</i>	0.07627	0.12096	0.00877	0.43976 $\pi$
0.2	1.39647 – 4.06906 <i>i</i>	0.14367	0.23495	0.03148	0.39308 $\pi$
0.3	1.37388 – 2.68515 <i>i</i>	0.20329	0.34046	0.06247	0.35883 $\pi$
0.4	1.35441 – 1.97676 <i>i</i>	0.25846	0.43861	0.09817	0.33254 $\pi$
0.5	1.33832 – 1.53905 <i>i</i>	0.31135	0.53085	0.13674	0.31128 $\pi$
0.6	1.32505 – 1.23764 <i>i</i>	0.36320	0.61830	0.17718	0.29340 $\pi$
0.671	1.31699 – 1.07345 <i>i</i>	0.39978	0.67797	0.20670	0.28221 $\pi$
0.672	1.31689 – 1.07136 <i>i</i>	0.40029	0.67880	0.20712	0.28205 $\pi$
0.7	1.31398 – 1.01497 <i>i</i>	0.41471	0.70184	0.21892	0.27793 $\pi$
0.8	1.30461 – 0.84221 <i>i</i>	0.46628	0.78210	0.26162	0.26427 $\pi$
0.9	1.29658 – 0.70324 <i>i</i>	0.51818	0.85958	0.30504	0.25204 $\pi$
1.0	1.28961 – 0.58834 <i>i</i>	0.57056	0.93466	0.34902	0.24097 $\pi$
1.1	1.28348 – 0.49125 <i>i</i>	0.62352	1.00764	0.39346	0.23084 $\pi$
1.2	1.27803 – 0.40777 <i>i</i>	0.67714	1.07877	0.43826	0.22151 $\pi$
1.3	1.27316 – 0.33495 <i>i</i>	0.73147	1.14825	0.48336	0.21287 $\pi$
1.4	1.26875 – 0.27067 <i>i</i>	0.78653	1.21624	0.52871	0.20483 $\pi$
1.5	1.26475 – 0.21334 <i>i</i>	0.84234	1.28288	0.57427	0.19730 $\pi$
1.6	1.26108 – 0.16177 <i>i</i>	0.89893	1.34829	0.62001	0.19023 $\pi$
1.7	1.25771 – 0.11503 <i>i</i>	0.95630	1.41257	0.66591	0.18357 $\pi$
1.8	1.25459 – 0.07238 <i>i</i>	1.01446	1.47581	0.71194	0.17728 $\pi$
1.9	1.25168 – 0.03324 <i>i</i>	1.07340	1.53809	0.75808	0.17131 $\pi$
1.991	1.24921 – 0.00028 <i>i</i>	1.12772	1.59398	0.80015	0.16615 $\pi$

Таблица 2. Параметры волны, соответствующей  $\eta_2$ 

$\omega$	$\eta_2$	$A$	$k$	$d$	$\delta_0$
0.001	15.8399 – 15.7837 <i>i</i>	0.00079	0.03160	0.03165	–0.49992 $\pi$
0.01	5.08528 – 4.91060 <i>i</i>	0.00786	0.09928	0.10078	–0.49918 $\pi$
0.1	1.78961 – 1.28682 <i>i</i>	0.07783	0.30169	0.34185	–0.48830 $\pi$
0.2	1.35997 – 0.71992 <i>i</i>	0.15012	0.41892	0.51355	–0.48294 $\pi$
0.3	1.17165 – 0.44780 <i>i</i>	0.21788	0.50804	0.65933	–0.48483 $\pi$
0.4	1.06031 – 0.27551 <i>i</i>	0.28358	0.58295	0.79165	–0.48990 $\pi$
0.5	0.98479 – 0.15189 <i>i</i>	0.34862	0.64890	0.91536	–0.49622 $\pi$
0.6	0.92928 – 0.05661 <i>i</i>	0.41375	0.70858	1.03294	–0.50291 $\pi$
0.671	0.89773 – 0.00048 <i>i</i>	0.46029	0.74803	1.11352	–0.50767 $\pi$

которое можно рассматривать как уравнение сферической звуковой волны

$$\Delta P = \frac{A}{2\pi r} \exp(i(\omega t - kr) - dr + \delta_0)$$

с амплитудой  $A = \pi^{-1/2}|(i\omega + 1)a_1^s(a_1^1 + a_1^4)/(\eta_1 N_1)|$ , волновым числом  $k = \text{Im}((i\omega + 1)/\eta_1)$ , декрементом затухания  $d = \text{Re}((i\omega + 1)/\eta_1)$  и начальной фазой  $\delta_0 = \arg((i\omega + 1)a_1^s(a_1^1 + a_1^4)/(\eta_1 N_1))$ .

Значения перечисленных величин в случае источника  $S = S_h$  ( $s = 1$ ) приведены в табл. 1. Для сравнения в табл. 2 приведены параметры волны, соответствующей значению  $\eta = \eta_2$ . На рис. 3 представлены графики распределения давления. Сплошная кривая соответству-

ет значениям  $2\pi^{3/2}r|\Delta P_h|$ . Штриховой кривой показан вклад решений непрерывного, штрихпунктиром — дискретного спектра.

Аналогичная картина наблюдается у других типов источника.

Как видно из представленных графиков и таблиц, с ростом частоты амплитуда каждой из волн увеличивается, при этом увеличивается и скорость ее затухания. Причем по мере приближения значения  $\omega$  к границе области  $S_1$  скорость затухания звуковой волны приближается к скорости затухания решений непрерывного спектра. Таким образом, диапазон частот, при котором возможно выделение звуковых колебаний в чистом виде, ограничен значением  $\omega \sim 2$ .

## Список литературы

- [1] *Жданов В.М., Алиевский М.Я.* Процессы переноса и релаксации в молекулярных газах. М.: Наука, 1989. 336 с.
- [2] *Латышев А.В., Юшканов А.А.* // ТМФ. 1993. Т. 95. № 3. С. 530–540.
- [3] *Латышев А.В., Юшканов А.А.* // ЖЭТФ. 1998. Т. 114. Вып. 3(9). С. 956–971.
- [4] *Поддоскин А.Б., Юшканов А.А.* // Изв. РАН МЖГ. 1998. № 5. С. 182–189.
- [5] *Поддоскин А.Б., Юшканов А.А., Яламов Ю.И.* // Изв. РАН МЖГ. 1999. № 4. С. 163–170.
- [6] *Латышев А.В., Юшканов А.А.* // ПМТФ. 2001. Т. 42. № 3. С. 91–100.
- [7] *Черчиньяни К.* Теория и приложения уравнения Больцмана. М.: Мир, 1978. 496 с.
- [8] *Латышев А.В., Юшканов А.А.* // ТМФ. 1992. Т. 92. № 1. С. 127–138.
- [9] *Савков С.А., Юшканов А.А.* // ТМФ. 1997. Т. 113. № 1. С. 139–148.
- [10] *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Статистическая физика. Часть I. Т. 5. М.: Наука, 1976. 584 с.
- [11] *Кейз К., Цвайфель П.* Линейная теория переноса. М.: Мир, 1976, 381 с.
- [12] *Латышев А.В.* // Изв. РАН, МЖГ. 1992. № 2. С. 151–164.
- [13] *Гахов Ф.Д.* Краевые задачи. М.: Наука, 1977. 640 с.