01

Нелинейные магнитные явления в атомном бозе-газе

© Е. Орленко,[1] И. Мазец,[2] Б. Матисов[1]

[1]Санкт-Петербургский государственный технический университет,
195251 Санкт-Петербург, Россия
[2]Физико-технический институт им. А.Ф. Иоффе РАН,
194021 Санкт-Петербург, Россия
e-mail: quark@citadel.stu.neva.ru

(Поступило в Редакцию 22 мая 2002 г.)

Исследуется поведение ($j = 1$, $j = 2$) бозе-газа, находящегося в оптической ловушке. Получены спиновый гамильтониан и основное состояние для системы частиц со спином $j = 1$ и $j = 2$. Рассматриваются нелинейные магнитные эффекты в системе частиц $j = 1$.

Введение

Основным направлением в исследовании конденсата Бозе–Эйнштейна в последнее время являются наблюдение и описание квантовой системы атомов с внутренними степенями свободы. Оптические ловушки, используемые для удержания такой системы, не разрушают степени свободы, обусловленной спином атомов. Это дает возможность наблюдать макроскопические квантовые явления, связанные с соориентацией спинов в охлажденном квантовом газе при наличии в нем взаимодействия. В основном только атомы в наименьшем мультиплетном состоянии удерживаются ловушкой. Те же атомы, которые находятся в более высоком мультиплетном состоянии, выталкиваются ловушкой вследствие процессов рассеяния с перебросом спина (так называемое спин-флип-рассеяние). В случае ^{23}Na и ^{87}Rb сверхтонкие мультиплеты ($j = 2$ и $j = 1$) нормальны в том смысле, что больший спин имеет бóльшую энергию. Поэтому в ^{23}Na бывает трудно получить спин-2-бозе-газ. С другой стороны, в ^{87}Rb процессы переброса спина значительно слабее и эта система является вполне реальным кандидатом быть оптически удерживаемым спин-2-бозе-конденсатом. В случае ^{85}Rb наименьший мультиплет имеет спин $j = 2$, эта система атомов также может стать основной для получения $j = 2$-конденсата [1].

Системы с отличным от нуля спином атомов интересны тем, что имеют в состоянии бозе-конденсации не одно, а несколько возможных основных состояний. Возникает так называемая фрагментация основного состояния. Для систем со спинами $j = 1$ основным состоянием является синглетное, хотя очень сильны магнитные флуктуации с возникновением так называемой магнитной, или циклической, фазы [2]. Экспериментальные подтверждения подобных явлений имеются в [3]. Что же касается систем со спинами $j = 2$, то для них основным состоянием является ферромагнитное [4].

Теоретическое описание и анализ основных состояний указанных систем ведутся на основе приближения точечности взаимодействия, когда основная форма оператора взаимодействия выбирается в виде

$$V(|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_2|) = \delta(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) \sum_{j=0}^{2\gamma} g_j P_j,$$

где $g_j = 4\pi\hbar^2 a_j/M$, M — масса атомов, a_j — амплитуда рассеяния в s-волне в канале с полным спином j, P_j — проектор на состояние с определенным спином j пары атомов.

Модельный гамильтониан, описывающий всю систему попарно взаимодействующих бозонов, содержит слагаемое, зависящее от полного спина всей системы и имеющее структуру

$$\sum_n C_n(\hat{\mathbf{j}}_1 \cdot \hat{\mathbf{j}}_2)^n,$$

где j_1 и j_2 — спины атомов.

Именно благодаря этому слагаемому удается объяснить наличие в системе атомов нелинейных эффектов, обусловленных магнитной флуктуацией основного состояния.

Отметим, что в настоящей работе нас в основном интересуют магнитные явления, которые могут возникать в чистом виде в необычных спиновых системах с целочисленными спинами без учета специфики бозе-конденсатного состояния. Волновые свойства, которые проявляют атомы при низких температурах, мы учитываем при построении симметричной волновой функции системы и вычислении с ее помощью константы межатомного обменного взаимодействия. На основе этого из первых принципов выводится спиновый гамильтониан взаимодействующей системы атомов со спинами $j = 1$ и $j = 2$, аналогичный гамильтониану Гейзенберга для частиц с $s = 1/2$, причем константа взаимодействия вычисляется непосредственно по теории возмущений с учетом нелокальности взаимодействия атомов без использования приближения о точечности взаимодействия. Этот гамильтониан содержит в себе нелинейные слагаемые с высокими степенями $n(\hat{\mathbf{j}}_1 \cdot \hat{\mathbf{j}}_2)^n$. Это приводит к тому, что уже в системе атомов со спинами $j = 1$ могут распространяться нелинейные спиновые волны, а именно может появляться солитон. Устойчивость солитона определяется медленным изменением указанного неточечного потенциала на длине солитона. В атомных системах со спином $j = 2$ нелинейность уже четвертого порядка, основное же состояние является действительно ферромагнитным.

Обменное взаимодействие двух атомов с $j = 1$

Для начала рассмотрим пару взаимодействующих атомов, которые являются бозонами со спином $j = 1$. Поправка к энергии, обусловленная взаимодействием атомов, вычисленная в I порядке обменной теории возмущений (ОТВ), учитывающей неразличимость частиц, имеет вид [5]

$$E^{(1)} = K \pm A, \tag{1}$$

где K — вклад в энергию от прямого взаимодействия, A — обменный вклад в энергию взаимодействия.

$(\pm)1$, возникающая в (1) соответствует симметричной $(+1)$ или антисимметричной (-1) координатной части волновой функции. Полная волновая функция двух бозонов, состоящая из произведения координатной и спиновой частей, должна быть полностью симметричной относительно перестановок, т. е. координатная и спиновая части должны быть одновременно либо симметричными, либо антисимметричными функциями

$$\Psi(1, 2) = \Psi_a^s(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) \cdot \Upsilon_a^s(\xi_1, \xi_2). \tag{2}$$

Индексы s и a означают симметричную или антисимметричную линейную комбинацию; $\Psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$ — координатная часть; $\Upsilon(\xi_1, \xi_2)$ — спиновая.

Координатная часть двухчастичной функции в системе центра масс будет выглядеть следующим образом:

$$\Psi_a^s(\mathbf{R}) = \left[\left(e^{ik_z z} + \frac{f(\Theta)e^{ikR}}{R}\right)\right.$$
$$\left.\pm \left(e^{-ikz} + \frac{f(\pi - \Theta)e^{ikR}}{R}\right)\right]N, \tag{3}$$

где $\mathbf{R} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$ — радиус-вектор, соединяющий центры атомов; $\mathbf{k}$ — волновой вектор; $f(\Theta)$ — амплитуда рассеяния, в случае низких температур $f(\Theta) = \mathrm{const}(\Theta)$ (s-рассеяние); N — нормировка.

В более компактном виде

$$|\Psi_a^s(\mathbf{R})\rangle = |\Phi(\mathbf{R})\rangle \pm |\Phi(\mathbf{R})\rangle. \tag{4}$$

Тогда, если потенциал взаимодействия атомов положить в модели Сезерленда $\hat{V} = c/R^6$, $R > r_0$; $\hat{V} = \infty$, $R < r_0$; c — константа Ван-дер-Ваальса; r_0 — радиус жесткой сферы, характеризующий максимально возможное сближение атомов, то

$$K = (\Phi|\hat{V}|\Phi); \quad A = (\Phi^{|}|\hat{V}|\Phi).$$

Подробные вычисления констант взаимодействия проделаны в [6].

Спиновый гамильтониан

Спиновая часть двухчастичной функции бозонов со спином $j = 1$ имеет следующую структуру: симметричные относительно перестановки частиц линейные комбинации соответствуют состояниям с четным полным спином пары атомов $\sigma = 2$ и $\sigma = 0$ (см. Приложение), антисимметричные функции соответствуют состоянию с полным спином пары $\sigma = 1$. Собственные значения оператора скалярного произведения $\hat{\mathbf{j}}_1 \cdot \hat{\mathbf{j}}_2$ для трех различных значений спина известны:

$$\hat{\mathbf{j}}_1 \cdot \hat{\mathbf{j}}_2 = \frac{1}{2}(\hat{\sigma}^2 - \hat{j}_1^2 - \hat{j}_2^2),$$

$$\overline{\hat{\mathbf{j}}_1 \cdot \hat{\mathbf{j}}_2} = \frac{1}{2}\big(\sigma(\sigma + 1) - 2j(j + 1)\big),$$

$$\sigma = 2, \quad \overline{\hat{\mathbf{j}}_1 \cdot \hat{\mathbf{j}}_2} = 1; \quad \sigma = 1, \quad \overline{\hat{\mathbf{j}}_1 \cdot \hat{\mathbf{j}}_2} = -1;$$

$$\sigma = 0, \quad \overline{\hat{\mathbf{j}}_1 \cdot \hat{\mathbf{j}}_2} = -2.$$

С учетом свойств симметрии перечисленных состояний составим проекционный оператор $\hat{P}$ таким образом, чтобы, действуя на симметричную спиновую функцию пары бозонов, он имел собственное значение $+1$, а на антисимметричную — -1. Такой оператор будет иметь следующий вид:

$$\hat{P}_{11} = \hat{\mathbf{j}}_1 \cdot \hat{\mathbf{j}}_2 + (\hat{\mathbf{j}}_1 \cdot \hat{\mathbf{j}}_2)^2 - 1. \tag{5}$$

Заметим в выражении (1) ± 1 на указанный оператор, тогда поправка к энергии на взаимодействие в виде оператора, действующего на спиновую переменную, будет

$$\hat{H}_{\mathrm{int}} = K + A\big(\hat{\mathbf{j}}_1 \cdot \hat{\mathbf{j}}_2 + (\hat{\mathbf{j}}_1 \cdot \hat{\mathbf{j}}_2)^2 - 1\big). \tag{6}$$

Если учесть влияние внешнего магнитного поля h, то к (6) добавится еще слагаемое

$$\hat{H}_0 = 2\mu_0 h(\hat{j}_{z_1} + \hat{j}_{z_2}),$$

где μ_0 — магнетон Бора.

Легко записать теперь спиновый гамильтониан системы N попарно взаимодействующих $j = 1$ бозе-частиц

$$\hat{H}_{\mathrm{int}} = (K - A)\,\frac{N(N - 1)}{2} + A\sum_{i<j}\big[(\hat{\mathbf{j}}_i \cdot \hat{\mathbf{j}}_j)^2 + (\hat{\mathbf{j}}_i \cdot \hat{\mathbf{j}}_j)\big]. \tag{7}$$

Взаимодействие системы атомов с внешним магнитным полем дает вклад в оператор энергии

$$\hat{H}_0 = -2\mu_0 h\sum_i \hat{j}_{z_i}.$$

Полученный спиновый гамильтониан содержит квадратичный член, обусловливающий наличие нелинейных эффектов в системе спинов.

Основное состояние спиновой системы

Вычислим собственные значения энергии многочастичной спиновой системы.

Входящая в (7) вторая сумма может быть выражена через оператор $\hat{J}^2$ квадрата полного спина системы

$$\sum_{i<j}\hat{\mathbf{j}}_i\cdot\hat{\mathbf{j}}_j=\frac{1}{2}\Big(\hat{J}^2-\sum_i\hat{j}_i^2\Big). \tag{8}$$

Квадратичное слагаемое может быть переписано через оператор $\hat{\sigma}^2$ квадрата парного спина системы

$$\sum_{i<j}(\hat{\mathbf{j}}_i\cdot\hat{\mathbf{j}}_j)^2=\frac{N(N-1)}{2}\sum_\sigma(\hat{\sigma}^2-2\hat{j}^2)^2$$
$$\times\sum_{\sigma_z,j_{z_1},j_{z_2}}\langle\sigma,\sigma_z|j_{z_1}j_{z_2}j_1j_2\rangle^2, \tag{9}$$

где $\langle\sigma,\sigma_z|j_1j_{z_1}j_2j_{z_2}\rangle$ — коэффициенты Клебша–Гордана.

Тогда собственное значение оператора (8) при действии на состояние $|J,J_z\rangle$ с полным спином J и его проекцией J_z

$$\overline{\sum_{i<j}\hat{\mathbf{j}}_i\cdot\hat{\mathbf{j}}_j}=\frac{1}{2}\big(J(J+1)-Nj(j+1)\big). \tag{10}$$

Собственное значение оператора (9) будет

$$\overline{\sum_{i<j}(\hat{\mathbf{j}}_i\cdot\hat{\mathbf{j}}_j)^2}=\frac{4}{3}\,\frac{J(J-1)}{2}. \tag{11}$$

Тогда собственное значение оператора энергии (7) равно

$$E_{\mathrm{int}}=(K-A)\,\frac{N(N-1)}{2}$$
$$+A\left[\frac{2J(J-1)}{3}+\frac{1}{2}\big(J(J+1)-Nj(j+1)\big)\right]. \tag{12}$$

С учетом $j=1$, имеем для энергии взаимодействия

$$E_{\mathrm{int}}=K\,\frac{N(N-1)}{2}-A\,\frac{N(N+1)}{2}+\frac{A}{6}\,J(7J-1). \tag{13}$$

Легко видно, что при $A>0$ основным состоянием, соответствующим минимальной энергии, является состояние с $J=0$, т.е.

$$|0\rangle=\prod_{k<l}\frac{1}{\sqrt{3}}\big(|j_k=1,\,j_{zk}=1\rangle_k|j_l=1,\,j_{zl}=-1\rangle_l$$
$$+|j_k=1,\,j_{zk}=-1\rangle_k|j_l=1,\,j_{zl}=1\rangle_l$$
$$-|j_k=1,\,j_{zk}=0\rangle|j_l=1,\,j_{zl}=0\rangle\big), \tag{14}$$

полностью симметричное.

Гамильтониан $j=2$ бозонов

В случае пары бозонов со спинами $j=2$ симметрия термов такова: четные состояния со спинами пары атомов $\sigma=4,2,0$ являются симметричными, нечетные состояния со спинами пары атомов $\sigma=3,1$ — антисимметричные. Собственные значения оператора скалярного произведения спинов атомов $\hat{\mathbf{j}}_1\cdot\hat{\mathbf{j}}_2$ мы приведем полностью

$$\sigma=4,\quad \overline{\hat{\mathbf{j}}_1\cdot\hat{\mathbf{j}}_2}=4 \text{ — симметричное},$$
$$\sigma=3,\quad \overline{\hat{\mathbf{j}}_1\cdot\hat{\mathbf{j}}_2}=0 \text{ — антисимметричное},$$
$$\sigma=3,\quad \overline{\hat{\mathbf{j}}_1\cdot\hat{\mathbf{j}}_2}=-3 \text{ — симметричное},$$
$$\sigma=2,\quad \overline{\hat{\mathbf{j}}_1\cdot\hat{\mathbf{j}}_2}=-5 \text{ — антисимметричное},$$
$$\sigma=0,\quad \overline{\hat{\mathbf{j}}_1\cdot\hat{\mathbf{j}}_2}=-6 \text{ — симметричное}. \tag{15}$$

Составим также оператор $\hat{P}$, учитывающий свойства симметрии спиновой функции пары атомов таким образом, чтобы при действии его на симметричное состояние выходило собственное значение $+1$, на антисимметричное состояние — -1. Этот оператор будет иметь вид

$$\hat{P}_{22}=\frac{1}{36}\,(\hat{\mathbf{j}}_1\cdot\hat{\mathbf{j}}_2)^4+\frac{1}{6}\,(\hat{\mathbf{j}}_1\cdot\hat{\mathbf{j}}_2)^3$$
$$-\frac{13}{36}\,(\hat{\mathbf{j}}_1\cdot\hat{\mathbf{j}}_2)^2-\frac{5}{2}\,(\hat{\mathbf{j}}_1\cdot\hat{\mathbf{j}}_2)-1. \tag{16}$$

Тогда, если заменить в выражении (1) ±1 на указанный оператор, будем иметь гамильтониан для системы $Nj=2$ бозонов

$$\hat{H}_{\mathrm{int}}=(K-A)\,\frac{N(N-1)}{2}+\frac{A}{6}\sum_{i<j}\bigg\{\frac{1}{6}\,(\hat{\mathbf{j}}_i\cdot\hat{\mathbf{j}}_j)^4$$
$$+(\hat{\mathbf{j}}_i\cdot\hat{\mathbf{j}}_j)^3-\frac{13}{6}\,(\hat{\mathbf{j}}_i\cdot\hat{\mathbf{j}}_j)^2-15(\hat{\mathbf{j}}_i\cdot\hat{\mathbf{j}}_j)-6\bigg\}. \tag{17}$$

Хорошо видно, что в случае $j=2$ Бозе-газа можно ожидать еще более сильных нелинейных эффектов, связанных с флуктуацией макроскопического магнитного поля.

Основное состояние $j=2$ бозонов

Вычисление собственных значений операторов, входящих в (17), будем производить также с учетом коэффициентов Клебша–Гордана

$$\overline{\sum_{i<j}(\hat{\mathbf{j}}_i\cdot\hat{\mathbf{j}}_j)^2}=6J(J-1),\quad \overline{\sum_{i<j}\hat{\mathbf{j}}_i\cdot\hat{\mathbf{j}}_j}=\frac{1}{2}\big(J(J+1)-6N\big),$$
$$\overline{\sum_{i<j}(\hat{\mathbf{j}}_i\cdot\hat{\mathbf{j}}_j)^3}=-3J(J-1),\quad \overline{\sum_{i<j}(\hat{\mathbf{j}}_i\cdot\hat{\mathbf{j}}_j)^4}=\frac{588}{5}\,J(J-1). \tag{18}$$

Тогда энергия взаимодействия будет иметь вид

$$E_{\text{int}} = (K-A)\,\frac{N(N-1)}{2} - \frac{A}{2}\left\{\frac{7J}{10}\,(13J+37)-15N\right\}. \quad (19)$$

Из (19) видно, что основным состоянием в случае $A > 0$ будет ферромагнитное состояние с максимальным полным спином системы $J = 2N$.

Функция основного состояния будет, очевидно, выглядеть

$$|0\rangle = \frac{1}{\sqrt{N!}}\prod_i |j=2,\, j_z=2\rangle_i.$$

По-видимому, существует закономерность в реализации основного состояния — частицы, имеющие нечетный спин, преимущественно конденсируются в антиферромагнитное состояние, тогда как бозе-газ с частицами, обладающими четным спином, будет реализовывать ферромагнитное основное состояние.

Спиновый „dark-bright“ солитон в однородном бозе-газе

Рассмотрим систему охлажденных атомов, спин которых равен 1, в оптической ловушке, которая не разрушает основного антиферромагнитного состояния (14) этой системы. Гамильтониан этой системы, учитывающий только обменное взаимодействие атомов, возьмем в форме (7)

$$\hat{H} = A\left\{\sum_n [\hat{\mathbf{j}}_n\hat{\mathbf{j}}_{n+1} + (\hat{\mathbf{j}}_n\hat{\mathbf{j}}_{n+1})^2] - \frac{N(N-1)}{2}\right\}.$$

Основное состояние этой системы антиферромагнитное, тогда в приближении взаимодействия с ближайшими соседями будем считать спин пары атомов $\sigma = 0$ и собственное значение оператора $\hat{\mathbf{j}}_n\hat{\mathbf{j}}_{n+1}$ равно $\overline{\hat{\mathbf{j}}_n\hat{\mathbf{j}}_{n+1}} = -2$.

Пусть один спин под номером k из цепочки атомов переброшен. Тогда оператор энергии возбуждения можно записать в виде

$$\hat{V} = \hat{H} - \hat{E}_0 = A\Big\{\hat{\mathbf{j}}_{k-1}\hat{\mathbf{j}}_k + \hat{\mathbf{j}}_k\hat{\mathbf{j}}_{k+1} + (\hat{\mathbf{j}}_{k-1}\hat{\mathbf{j}}_k)^2 + (\hat{\mathbf{j}}_k\hat{\mathbf{j}}_{k+1})^2 - (-2)\hat{j}_k^2 - 2\hat{j}_k^4\Big\},$$

где $\hat{E}_0$ с учетом только одного перебрасываемого спина $\hat{E}_0 = -A(2\hat{j}_k^4 - 2\hat{j}_k^2)$.

В полуклассическом континуальном приближении собственных значений магнитных моментов атомов будем считать, что магнитный момент атома — плавно меняющаяся с расстоянием функция, тогда для $k \pm 1$-го спина можно провести разложение

$$j_{k\pm1} = j_k \pm \frac{\partial j_k}{\partial x} + \frac{a^2}{2}\,\frac{\partial^2 j_k}{\partial x^2}.$$

Здесь a — среднее расстояние между атомами. Подставим указанное разложение. Тогда энергия возбуждения будем иметь вид

$$V = A\left\{a^2 j_k^2\,\frac{\partial^2 j_k}{\partial x^2}\left(1 + 4j_k^2 + a^2 j_k\,\frac{\partial^2 j_k}{\partial x^2}\right) + 2j_k^2 a^2\left(\frac{\partial j_k}{\partial x}\right)^2\right\}. \quad (22)$$

С другой стороны, в приближении эффективного поля H^*, создаваемого всей системой спинов, энергия возбуждения системы может быть представлена как энергия взаимодействия каждого спина с этим полем

$$V = H^*\mu_0 j_k. \quad (23)$$

Тогда эффективное магнитное поле, в котором каждый спин будет прецессировать (в соответствии с теоремой Блоха),

$$\frac{\partial \mathbf{m}}{\partial t} = \frac{e}{Mc}\,(\mathbf{H}^* \times \mathbf{m}), \quad (24)$$

$$H^* = \frac{A}{\mu_0}\left[a^2\,\frac{\partial^2 j_k}{\partial x^2}\,(1+4j_k^2) + 2j_k a^2\left(\frac{\partial j_k}{\partial x}\right)^2\right]. \quad (25)$$

Расписывая (24) для каждой компоненты вектора магнитного момента $\mathbf{m} = \mathbf{j}\mu_0$ и полагая, что $m_z \gg m_x, m_y$ можно переписать (24) для циклических координат

$$\dot{m}_+ = -\frac{Aa^2}{\hbar}\,i\left[\frac{\partial^2 m_+}{\partial x^2} + \left(\frac{(m_+)^2}{a^2\mu_0^2} - \frac{4(m_-)^2}{a^2\mu_0^2}\right)m_+\right],$$

$$\dot{m}_- = -\frac{Aa^2}{\hbar}\,i\left[\frac{\partial^2 m_-}{\partial x^2} + \left(\frac{(m_-)^2}{a^2\mu_0^2} - \frac{4(m_+)^2}{a^2\mu_0^2} - \Delta\right)m_-\right],$$

$$m_\pm = m_x \pm i m_y, \quad (26)$$

где

$$\Delta = \frac{A}{\mu_0^2}\,a.$$

Это уравнение аналогично уравнению для Dark-Bright soliton [7,8]. Решение можно записать в виде [7]

$$m_- = \sqrt{\frac{m_0^2 ka}{2}}\,e^{i\Omega t}e^{ixk\,\mathrm{tg}\,\alpha}\sec h\{k(x-q(t))\},$$

$$m_+ = \sqrt{Aa^3}(i\sin\alpha + \cos\alpha\tanh\{k[x-q(t)]\}),$$

где $1/k$ — длина солитона, $m_z = m_0$,

$$k = \frac{1}{a}\left\{\sqrt{\frac{4m_0^2}{\mu_0^2}\cos^2\alpha + \left(\frac{m_0^2}{4\mu_0^2}\right)^2} - \frac{m_0^2}{4\mu_0^2}\right\},$$

частота прецессии с учетом сдвига

$$\Omega = \frac{A}{\hbar}\left(1 - \frac{\mathrm{tg}^2\,\alpha}{2}\right)(ka)^2 - \Delta,$$

координата солитона

$$q(t) = q(0) + kt\,\frac{Aa^2}{\hbar}\ \operatorname{tg}\alpha.$$

Подобные интегрируемые системы известны как уравнения Манакова [9]. Эти системы сохраняют свободную энергию. Но поскольку свободная энергия убывает с ростом скорости солитона [9], то солитон формально нестабилен (он ускоряется). Но влияние других возбуждений (уединенных или обычных спиновых волн), не рассматриваемых здесь, как показано в [9], не является причиной диссипации. Если добавить неоднородный потенциал в (26), то система становится неинтегрируемой и солитон может взаимодействовать нетривиальным образом с окружением. Тем не менее если потенциал взаимодействия изменяется медленно в масштабе длины k^{-1} солитона, то это приводит к согласованному движению (изменению) солитона и потенциала, а свободная энергия является в этом случае адиабатическим инвариантом [8].

Таким образом, для указанной спиновой системы мы будем иметь картину магнитных вихрей, носящих нелинейный характер и переходящих в макроскопические вихри магнитного поля в системе бозе-конденсата. Следует иметь в виду то обстоятельство, что мы рассмотрели случай только одного переброшенного спина. Если последовательно рассматривать переброс двух, трех и так далее спинов, то мы будем иметь целый набор солитонов с разными частотами $\Omega_1, \Omega_2, \ldots, \Omega_n$, отличающихся друг от друга константами обменного взаимодействия $\Omega_1 \sim A$, $\Omega_2 \sim 2A, \ldots, \Omega_n = nA$.

Авторы выражают свою глубокую признательность Кристофу Эрихту (Dr Christoph Ehricth), а также Петеру и Монике Лоберс (Peter and Monika Lobers) за создание благоприятных условий, способствовавших скорейшему проведению данных исследований и полезные обсуждения.

Данная работа поддержана грантами Российского фонда фундаментальных исследований (№ 02-02-17686), „Университеты России“(№ УР.01.01.040) и Министерства образования РФ (№ Е00-3.2-12).

Приложение

Для частиц со спином $j = 1$ приведем двухчастичные спиновые функции, где одночастичные состояния k-й частицы будем обозначать как $|j, j_z\rangle_k$.

Симметричные спиновые состояния

$$|J=2, J_z=2\rangle = |1,1\rangle_1|1,1\rangle_2,$$

$$|J=2, J_z=1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\big(|1,1\rangle_1|1,0\rangle_2 + |1,0\rangle_1|1,1\rangle_2\big),$$

$$|J=2, J_z=0\rangle = |1,0\rangle_1|1,0\rangle_2,$$

$$|J=2, J_z=-1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\big(|1,-1\rangle_1|1,0\rangle_2 + |1,0\rangle_1|1,-1\rangle_2\big),$$

$$|J=2, J_z=-2\rangle = |1,-1\rangle|1,-1\rangle,$$

$$|J=0, J_z=0\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}\big(|1,1\rangle_1|1,-1\rangle_2 + |1,-1\rangle_1|1,1\rangle_2 - |1,0\rangle_1|1,0\rangle_2\big).$$

Антисимметричные спиновые состояния

$$|J=1, J_z=1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\big(|1,1\rangle_1|1,0\rangle_2 - |1,0\rangle_1|1,1\rangle_2\big),$$

$$|J=1, J_z=0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\big(|1,1\rangle_1|1,-1\rangle_2 - |1,-1\rangle_1|1,1\rangle_2\big),$$

$$|J=1, J_z=-1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\big(|1,-1\rangle_1|1,0\rangle_2 - |1,0\rangle_1|1,-1\rangle_2\big).$$

Список литературы

[1] *Davis K.B., Mewes M.-O., Andrews M.R., van Druten N.J., Durfeu D.S.* et al. // Phys. Rev. Lett. 1995. Vol. 75. N 12. P. 3969–3972.

[2] *Po Nozieres, D. Saint James* // J. Phys (Paris). 1982. Vol. 43. N 6. P. 1133–1137. Tin Lun Ho, Sung Kit Yip. // Phys. Rev. Lett. 2000. Vol. 84. N 12. P. 4031–4035.

[3] *Stenger J.* // Nature (London). 1998. Vol. 396. N 2. P. 345–350.

[4] *Ho T.-L.* Phys. Rev. Lett. 1998. Vol. 81. P. 742–746.

[5] *Орленко Е.В., Латышевская Т.Ю.* // ЖЭТФ. 1998. Т. 113. № 6. Р. 2139–2147.

[6] *Орленко Е.В., Румянцев А.А.* // Физика низких температур. 1989. Т. 15. № 5. С. 485–490.

[7] *Busch Th., Angein J.R.* // Phys. Rev. Lett. 2001. Vol. 87. N 1. C. 401.

[8] *Trillo S., Wabnitz S., Wright E.M., Stegeman G.I.* // Opt. Lett. 1988. Vol. 13. N 3. P. 871–875. Christodoulides D.N. // Phys. Lett. A. 1988. Vol. 132. N 2. P. 451–453. Shalaky M., Barthelemy A.J. // IEEJ. Quantum Electron. 1992. Vol. 28. N 5. P. 2736–2740.

[9] *Manakov S.V.* // Sov. Phys. JETP. 1974. Vol. 38. N 2. P. 248–253.