10;12

О конструкциях временны́х черенковских детекторов, имеющих оптимальные алгоритмы однозначного восстановления траектории мюона

© В.С. Кинчаков

Вычислительный центр ДВО РАН,
680063 Хабаровск, Россия
e-mail: kinchakov@as.fe.ru

(Поступило в Редакцию 12 апреля 2002 г.)

Аналитически выявлено общее условие однозначного восстановления азимутального угла трека мюона, налагаемое на конструкции как временны́х, так и амплитудных детекторов. Предложены две конструкции временны́х черенковских детекторов, позволяющие в отличие от обычно используемой „цепочки“ детекторов однозначно восстанавливать все параметры траектории мюона и допускающие разбиение полученной системы уравнений на две независимых системы уравнений меньшей размерности. С помощью этого разбиения найдены оптимальные алгоритмы вычисления параметров траектории мюона. Одна из этих конструкций допускает аналитическое решение полученной системы уравнений.

Введение

Как показано в [1], использование разностей времен прихода сигналов черенковского излучения от разных модулей „стринга“ на порядок повышает точность определения параметров траектории мюона сравнительно с методом амплитудного анализа [2,3]. В то же время такая вертикальная цепочка модулей („стринг“) не позволяет однозначно восстановить траекторию мюона [1,2]. Этого недостатка, в частности, лишены предлагаемые ниже две конструкции временны́х черенковских детекторов. Одна из них, более симметричная, так называемая конструкция А, состоящая из 12 модулей, расположенных в вершинах черырех равносторонних одинаковых треугольников, плоскости и стороны которых параллельны, и отстоящих по вертикали на одинаковом расстоянии H друг от друга, допускает аналитическое решение полученной системы уравнений для определения параметров траектории. Менее симметричная конструкция Б требует применения численных методов для решения найденной системы уравнений.

Общим образом удалось выявить условие однозначной реконструкции азимутального угла трека мюона, налагаемое на конструкции как временны́х, так и амплитудных детекторов. Оказалось, что для этого в детекторе не менее трех модулей должны иметь проекции на горизонтальную плоскость, не лежащие на одной прямой.

Так же как и для „стринга“ [1], задача восстановления координат релятивистского мюона по его черенковскому излучению с помощью рассматриваемых конструкций детекторов решается при следующих предположениях: траектория мюона в области регистрации черенковского излучения является прямой линией; временно́е разрешение детекторов не зависит от амплитуды сигналов; модули конструкции детектора рассматриваются как математические точки.

Система уравнений для определения параметров траектории мюона

Поместим начало координат в центр верхнего треугольника модулей детектора и направим ось z вертикально. Траектория мюона может быть описана четырьмя независимыми параметрами: θ, ϕ — зенитный и азимутальный углы направляющего вектора $\mathbf{a}$ произвольной траектории; x_1 и y_1 — две координаты точки пересечения траектории мюона с плоскостью $z=0$. Тогда кратчайшее расстояние от траектории до i-детектора равно

$$l_i = \Big[(z_i^0)^2(a_x^2+a_y^2) + (x_1-x_i^0)^2(a_y^2+a_z^2) + (y_1-y_i^0)(a_x^2+a_z^2) + 2(y_1-y_i^0)a_y \times \big(a_z z_i^0 - a_x(x_1-x_i^0)\big) + 2a_x a_z(x_1-x_i^0)z_i^0\Big]^{1/2}. \quad (1)$$

Здесь x_i^0, y_i^0, z_i^0 — декартовы координаты радиус вектора $\mathbf{r}_i^0$, определяющего положение i-го ФЭУ. Отметим, что искомые параметры θ, ϕ, x_1, y_1 входят в выражение (1) нелинейно. Специально отметим, что замена $\phi \to k\pi + \psi_i^0 \pm (\phi - \psi_i^0)$ оставляет соответствующие l_i неизменными. Здесь $k = 0.1$; ψ_i^0 — полярный угол вектора с декартовыми компонентами $(x_1-x_i^0;\ y_1-y_i^0)$. Это означает принципиальную неразличимость таких траекторий детекторами, как временны́ми, так и амплитудными, поскольку алгоритм восстановления параметров амплитудным детектором также основан на выражении (1). Из этой симметрии следует, что любой детектор для однозначного восстановления параметра ϕ любой траектории мюона должен иметь не менее трех модулей с проекциями этих модулей на плоскость $z_i^0 = 0$ не удовлетворяющими двум уравнениям прямой (или одному уравнению с произвольным угловым коэффициентом)

$$y_i^0 = y_1 - \operatorname{tg}\phi(x_1 - x_i^0),$$

$$y_i^0 = y_1 + \operatorname{ctg}\phi(x_1 - x_i^0). \tag{2}$$

Отмеченная в [3] симметрия следует из найденной здесь общей симметрии как частный случай: $k = 0$, $\psi_i^0 = \pi/4$.

Симметрия $\phi \to \pi - \phi$ решений уравнений для траектории мюона, установленная в [1] для „стринга", также здесь содержится как частный случай при $k = 0$.

Легко показать, что время прихода черенковского излучения от траектории до i-ФЭУ

$$t_i = \big(l_1 \operatorname{ctg}\alpha + l_i \operatorname{tg}\alpha + (\mathbf{r}_{1i}\cdot\mathbf{a})\big)/c, \tag{3}$$

где

$$\mathbf{r}_{ji} = \mathbf{r}_j^0 - \mathbf{r}_i^0, \tag{4}$$

$$\cos\alpha = 1/n, \tag{5}$$

c — скорость света в вакууме, n — показатель преломления среды.

Соответственно для разности времен прихода черенковского излучения на i- и j-детекторы имеем

$$t_{ij} = t_i - t_j = \big((l_i - l_j)\operatorname{tg}\alpha + (\mathbf{r}_{ji}\cdot\mathbf{a})\big)/c. \tag{6}$$

Величины t_{ij} можно измерить и они являются функциями параметров θ, ϕ, x_1, y_1 траектории мюона. Поскольку уравнение траектории имеет четыре независимых параметра, то для определения последних необходимо измерить как минимум четыре разности времен прихода, т.е. в детекторе должно быть не менее пяти ФЭУ. Для проведения дальнейших расчетов удобно преобразовать выражение (6) к виду

$$\gamma^2\big[ct_{i1} - (\mathbf{r}_{1i}\cdot\mathbf{a})\big]^2 + 2\gamma l_1\big[ct_{i1} - (\mathbf{r}_{1i}\cdot\mathbf{a})\big] = S_{1i}, \tag{7}$$

где

$$S_{1i} = S_{1i}^{x_1}x_1 + S_{1i}^{y_1}y_1 + S_{1i}^0, \tag{8}$$

$$S_{1i}^{x_1} = -2\big[(a_y^2+a_z^2)(x_i^0-x_1^0)+a_xa_y(y_1^0-y_i^0)-a_xa_zz_i^0\big], \tag{9}$$

$$S_{1i}^{y_1} = -2\big[(a_x^2+a_z^2)(y_i^0-y_1^0)+a_xa_y(x_1^0-x_i^0)-a_ya_zz_i^0\big], \tag{10}$$

$$\begin{aligned} S_{1i}^0 &= (a_y^2+a_z^2)\big[(x_i^0)^2-(x_1^0)^2\big] \\ &+ (a_x^2+a_z^2)\big[(y_i^0)^2-(y_1^0)^2\big](a_x^2+a_y^2)(z_i^0)^2 \\ &- 2\big[a_xa_y(x_i^0y_i^0 - x_1^0y_1^0) + a_za_yy_i^0z_i^0 + a_za_xx_i^0z_i^0\big], \end{aligned} \tag{11}$$

$$\gamma = \operatorname{ctg}\alpha. \tag{12}$$

Аналитическое определение параметров траектории мюона для конструкции детектора A

Декартовы координаты модулей в этом случае имеют вид

$$x_i^0 = D\cos\phi_i^0/2, \quad \phi_i^0 = 2\pi(i-1)/3 + 2\cdot\pi/6,$$

$$y_i^0 = D\sin\phi_i^0/2, \quad z_i^0 = -H\cdot INT\big((i-1)/3\big), \tag{13}$$

где D — диаметр детектора, а функция $INT(C)$ есть целая часть аргумента C.

Составляя линейные комбинации уравнений (7) можно исключить переменные x_1, y_1 и получить систему двух уравнений, содержащих только параметры θ и ϕ,

$$\begin{aligned} &T_2\Big[P_1 - (\mathbf{a}\,\mathbf{R}_{T1}) + a_xa_zA_{xz}^1 + a_ya_zA_{yz}^1\Big] \\ &\qquad = T_1\Big[P_2 - (\mathbf{a}\,\mathbf{R}_{T2}) + a_xa_zA_{xz}^2 + a_ya_zA_{yz}^2\Big], \\ &T_4\Big[P_3 - (\mathbf{a}\,\mathbf{R}_{T3}) + a_xa_zA_{xz}^3 + a_ya_zA_{yz}^3\Big] \\ &\qquad = T_3\Big[P_4 - (\mathbf{a}\,\mathbf{R}_{T4}) + a_xa_zA_{xz}^4 + a_ya_zA_{yz}^4\Big], \end{aligned} \tag{14}$$

где

$$T_j = \sum_i^j t_{i1}, \tag{15}$$

$$P_j = \gamma^2c^2\sum_i^j t_{i1}^2, \tag{16}$$

$$\mathbf{R}_{Tj} = 2\gamma^2c^2\sum_i^j t_{i1}\,\mathbf{r}_{1i}, \tag{17}$$

$$A_{xz}^j = 2\sum_i^j\big[x_i^0z_i^0 + \gamma^2x_{1i}z_{1i}\big], \tag{18}$$

$$A_{yz}^j = 2\sum_i^j\big[y_i^0z_i^0 + \gamma^2y_{1i}z_{1i}\big], \tag{19}$$

а $\sum^j$ содержит следующие слагаемые:

$$\sum_i^1 t_{i1} = t_{41} + t_{21} - t_{51}, \qquad \sum_i^2 t_{i1} = t_{41} + t_{31} - t_{61},$$

$$\sum_i^3 t_{i1} = t_{71} + t_{21} - t_{81}, \qquad \sum_i^4 t_{i1} = t_{71} + t_{31} - t_{91}. \tag{20}$$

Для аналитического определения угла θ целесообразно использовать любой из трех „стрингов", которые имеются в этой конструкции. Например, для второго „стринга" из (7) имеем для $t_{11,2} \neq 3t_{52}$

$$\cos\theta = \Big[-B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}\Big]\Big/(2A), \tag{21}$$

где

$$A = 2H^2(1+\gamma^2)(3t_{82} - 3t_{52} - t_{11,2})/F, \tag{22}$$

$$B = 2H\gamma^2 c\left[t_{11,2}(4t_{52} - t_{82}) - 3t_{52}t_{82}\right]/F, \tag{23}$$

$$C = \gamma^2 c^2\left[t_{11,2}^2 - t_{82}^2 - t_{52}^2 - G(t_{11,2}^2 - 3t_{52}^2)/F\right] + 2H^2(3G/F - 2), \tag{24}$$

$$F = t_{11,2} - 3t_{52}, \qquad G = t_{11,2} - t_{82} - t_{52}. \tag{25}$$

В случае если $t_{11,2} = 3t_{52}$, то

$$\cos\theta = \cos^2\alpha \times \left(ct_{11,2} \pm \sqrt{9H^2\sec\alpha - c^2 t_{11,2}^2}/\gamma\right)\Big/(3H). \tag{26}$$

Неоднозначность определения $\cos\theta$ по формулам (21) и (26) легко устраняется вычислением еще двух значений $\cos\theta$ с помощью другого „стринга“ и выбором из четырех значений $\cos\theta$ двух совпадающих. После определения угла θ (14) есть система двух линейных уравнений относительно двух неизвестных $\cos\phi$ и $\sin\phi$, что позволяет по правилу Крамера вычислить эти неизвестные. Таким образом, угол ϕ может быть найден однозначно.

Далее для определения параметров x_1, y_1 траектории мюона выбираем четыре любых уравнений (7), например, задаем индекс $i(j) = 2(3)$, $4(10)$ и попарно исключаем из этих уравнений l_1. В результате получаем систему двух линейных уравнений для определения двух неизвестных x_1. y_1

$$x_1(T_i' S_{1j}^{x_1} - T_j' S_{1i}^{x_1}) + y_1(T_i' S_{1j}^{y_1} - T_j' S_{1i}^{y_1}) = B_{ij}, \tag{27}$$

где

$$T_i' = 2\gamma\left[ct_{i1} - (\mathbf{r}_{1i}\mathbf{a})\right], \tag{28}$$

$$B_{ij} = T_i\left[T_j'^2/4 - S_{1j}^0\right] - T_j\left[T_i'^2/4 - S_{1i}^0\right]. \tag{29}$$

Определение параметров траектории мюона для конструкции детектора Б

Конструкция Б обладает меньшей симметрией, но и в этом случае удается исключить из уравнения (7) параметры x_1, y_1 траектории мюона. Координаты модулей детектора есть

$$x_i^0 = D_0\cos\phi_i^0/2, \qquad y_i^0 = D_0\sin\phi_i^0/2,$$

$$\phi_i^0 = 2\pi(i-1)/3 + 2\pi INT\big((i-1)/3\big)/6,$$

$$z_i^0 = -3HINT\big((i-1)/3\big); \quad i = 1, 2, 3, 4, 5, 6,$$

$$x_i^0 = D_k\cos\phi_i^0/2, \quad y_i^0 = D_k\sin\phi_i^0/2,$$

$$\phi_i^0 = 2\pi(i-1)/3 + 2\pi/6, \quad k = INT\big((i-4)/3\big),$$

$$z_i^0 = -HINT\big((i-4)/3\big); \quad i = 7, 8, 9, 10, 11, 12. \tag{30}$$

Искомая система уравнений для нахождения параметров θ, ϕ несколько отличается от системы уравнений (14)

$$T_2\Big[P_1 - (\mathbf{a}\,\mathbf{R}_{T1}) + a_x a_y A_{xy}^1 + a_y a_z A_{yz}^1\Big] = T_1\Big[P_2 - (\mathbf{a}\,\mathbf{R}_{T2}) + a_x a_y A_{xy}^2 + a_y a_z A_{yz}^2\Big],$$

$$T_4\Big[P_3 - (\mathbf{a}\,\mathbf{R}_{T3}) + a_x a_y A_{xy}^3 + a_y a_z A_{yz}^3\Big] = T_3\Big[P_4 - (\mathbf{a}\,\mathbf{R}_{T4}) + a_x a_z A_{xz}^4 + a_y^2 A_{xx}^4 + a_z^2 A_{zz}^4 - a_y^2(B_x^4 + B_z^4)\Big], \tag{31}$$

где для T^j, P^j, $\mathbf{R}_{tj}$, A_{xz}^j, A_{yz}^j имеем прежние определения (14)–(18), а

$$A_{xx}^4 = \gamma^2\sum_i^4 x_{1i}x_{1i} - B_x^4, \tag{32}$$

$$A_{zz}^4 = \gamma^2\sum_i^4 z_{1i}z_{1i} - B_z^4, \tag{33}$$

$$B_x^4 = \sum_i^4 x_i^0 x_i^0, \qquad B_z^4 = \sum_i^4 z_i^0 z_i^0, \tag{34}$$

$$A_{xy}^j = 2\sum_i^j\left[x_i^0 y_i^0 + \gamma^2 x_{1i}y_{1i}\right], \tag{35}$$

но в формулах (15)–(19), (32)–(35) в качестве $\sum^j$ понимается

$$\sum_i^1 t_{i1} = t_{21} + t_{16} - t_{31} - t_{41},$$

$$\sum_i^2 t_{i1} = t_{21} - t_{31} + D_0(t_{91} - t_{71})/D_1,$$

$$\sum_i^3 t_{i1} = t_{21} - t_{31} + D_0(t_{12,1} - t_{10,1})/D_2,$$

$$\sum_i^4 t_{i1} = t_{51} - D_0 t_{81}/D_1. \tag{36}$$

Причем следует отметить, что приведенная выше система уравнений имеет место лишь при выполнении условия

$$D_0/D_1 = z_5^0/z_8^0. \tag{37}$$

Так как конструкция Б не содержит „стринга“, то решать систему уравнений для определения параметров θ, ϕ траектории мюона необходимо численными методами [4], что требует значительно большего вычислительного ресурса, чем для конструкции А. Неоднозначность определения знака $\cos\phi$ легко устраняется контрольным вычислением всех экспериментальных разностей времен прихода черенковского излучения по формуле (6). После нахождения θ и ϕ параметры x_1, y_1 траектории мюона можно определить подобно тому, как это сделано для конструкции А.

Заключение

Аналитически установлено, что для однозначного восстановления азимутального угла трека мюона координаты x_i^0 и y_i^0 не менее трех модулей детектора не должны удовлетворять уравнениям прямых (2). Это утверждение справедливо как для временны́х, так и для амплитудных детекторов.

Как показано выше, обе конструкции проектируются так, чтобы возможно было разделить систему уравнений для определения четырех параметров θ, ϕ, x_1, y_1 на две системы уравнений меньшей размерности: одна — для определения параметров θ, ϕ, другая – для определения параметров x_1, y_1. В этом смысле эти конструкции детекторов оптимальны для вычисления параметров трека мюона. Подчеркнем, что предложенные конструкции детекторов позволяют однозначно восстановить все параметры траектории мюона в отличие от обычно используемого „стринга“. Более симметричная конструкция A с вычислительной точки зрения представляется более предпочтительной, так как она допускает аналитическое решение полученной системы уравнений.

Что касается анализа решения полученной системы уравнений с учетом временны́х флуктуаций регистрируемого черенковского излучения, который, в частности, проведен в [1] по стандартной методике, то из общих соображений следует, что соответствующие решения уравнений для трехмерной структуры детекторов более устойчивы к временны́м флуктуациям сигнала, чем решения для одномерной „цепочки“ детекторов.

Список литературы

[1] *Пустоветов В.П.* Препринт ФИАН. М., 1986. № 146. 14 с.
[2] *Айнутдинов В.И., Данильченко И.А., Яшин П.Я.* // Тр. 1-й Всесоюз. конф. „Исследование мюонов и нейтрино в больших водных объемах“. Алма-Ата, 1983. С. 195–202.
[3] *Кинчаков В.С.* // ЖТФ. 2001. Т. 71. Вып. 11. С. 101–105.
[4] *Форсайт Дж., Малькольм М., Моулер К.* Машинные методы математических вычислений. М.: Мир, 1980. 171 с.