01;05

Об особенностях внутренних деформационных изменений массивных тел под действием собственного гравитационного поля

© С.О. Гладков

Московский педагогический университет,
107005 Москва, Россия

(Поступило в Редакцию 17 апреля 2002 г.)

Проанализировано поведение вектора деформации $\mathbf{u}$ в массивных структурах, связанное с их собственным гравитационным полем. На примере Земли найдены характерные изменения радиальной компоненты u_r в зависимости от физических свойств планеты. Вывод системы дифференциальных уравнений основан на методах вариационного исчисления.

Интересно, что, несмотря на, казалось бы, очевидный факт влияния гравитации на деформационные свойства массивных тел (скажем, планет), задача определения зависимости компонент вектора смещения среды от расстояния из-за связи с гравитационным полем осталась по каким-то причинам без внимания. Во всяком случае в известных нам публикациях (см., например, литературу в [1–16]) решение этой проблемы пока что не было отражено, хотя довольно очевидный и несомненный интерес имеет не только чисто научный (для удовлетворения нашего природного любопытства), но и практический характер.

Важным является ткже и то, что выяснение связи гравитационного потенциала φ с деформационными параметрами планеты позволит наметить еще одну концепцию и пролить дополнительный свет на альтернативное объяснение таких природных катаклизмов, как, например, землетрясения и извержения вулканов.

Хотя наш подход носит феноменологический характер, тем не менее благодаря всего лишь одному подгоночному параметру (см. ниже) удается описать и предсказать весьма любопытные особенности поведения внутрипланетных деформационных смещений, „не заметных“ на поверхности, но, несомненно, чрезвычайно важных при рассмотрении некоторых тонких гравитационных эффектов, таких как экспериментальное обнаружение гравитационных волн [17,18].

При решении задачи о выяснении влияния гравитационного потенциала φ на деформационное смещение среды $\mathbf{u}$ мы воспользуемся хорошо проверенным, а потому надежным вариационным методом [19,20], который в рамках нашей задачи сводится (в силу отсутствия временнóй зависимости параметров $\mathbf{u}$ и φ) просто к нахождению экстремума гамильтониана системы.

Надо заметить, что подобный способ описания динамического развития линейных и нелинейных гамильтоновых систем может быть успешно применен к разнообразным физическим явлениям (например, для описания развития фронта горения [21] или для выяснения динамики кристаллизации композитов [22] в некотором фазовом пространстве моментов импульсов и углов), характерным для синергетических систем [23].

В нашем случае гамильтониан системы может быть представлен в следующем инвариантном виде:

$$H\{\mathbf{u},\varphi\} = \int\Big\{\big[0.5(\nabla\varphi)^2 + 4\pi G\rho\varphi\big](\rho/\omega_0^2) + \big[0.5K(\operatorname{div}\mathbf{u})^2 + \mu(u_{ik} - 1/3\delta_{ik}\operatorname{div}\mathbf{u})^2\big] + (\omega_0^2/G)\mathbf{u}\nabla\varphi\Big\}d^3x, \tag{1}$$

где G — гравитационная постоянная; ρ — плотность планеты; K и μ — модули всестороннего сжатия и сдвига соответственно, связанные с коэффициентом Пуассона σ и модулем Юнга E соотношениями

$$K = E/3(1-2\sigma), \quad \mu = E/2(1+\sigma); \tag{2}$$

константа ω_0, имеющая размерность частоты, характеризует собой феноменологический параметр взаимодействия между ньютоновским (нерелятивистским) потенциалом φ и вектором смещения среды $\mathbf{u}$ (последнее слагаемое в (1)); $u_{ik} = (1/2)(\partial u_i/\partial x_k + \partial u_k/\partial x_i)$ — симметричный тензор деформации; δ_k — символ Кронеккера.

Теперь стоит сказать еще несколько слов о гамильтониане (1). Первые два слагаемых приводят к обычному уравнению Пуассона, описывающему распределение нерелятивистского гравитационного потенциала φ. Вторая пара слагаемых представляет собой чисто упругодеформационную часть гамильтониана, приводящая к статическим уравнениям теории упругости [24]. Наконец, последнее слагаемое характеризует собой искомое взаимодействие между гравитационным потенциалом и вектором смещения. Множитель ρ/ω_0^2 выбран из соображений размерности с таким расчетом, чтобы количество неопределенных констант было сведено к минимуму. Далее будет видно, что в действительности вполне достаточно лишь одной константы ω_0, имеющей размерность частоты.

Варьируя функционал $H\{\varphi,\mathbf{u}\}$ по параметрам $\mathbf{u}$ и φ, приходим к следующей системе линейных дифференциальных уравнений:

$$\Delta\varphi = 4\pi\rho G - \beta' \operatorname{div}\mathbf{u},$$

$$\Delta\mathbf{u} + [\sigma/(1-2\sigma)]\operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{u} = \beta[(1+\sigma)/E]\nabla\varphi, \qquad (3)$$

где введены обозначения $\beta' = (\omega_0^2/\rho)\beta$, $\beta = \omega_0^2/G$.

Из первого уравнения сразу же следует решение

$$\varphi(\mathbf{r}) = -G\int \frac{\rho(\mathbf{r}')d^3\mathbf{r}'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} + \frac{\beta'}{4\pi}\int \frac{\operatorname{div}\mathbf{u}(\mathbf{r}')d^3\mathbf{r}'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}. \qquad (4)$$

В приближении сферического тела легко отсюда получить, что

$$\varphi(\mathbf{r}) = (2\pi\rho G/3)(r^2+R^2)$$

$$+\beta'\int\limits_r^R (1/r')(\partial/r')\big(r'^2 u_r(r')\big)\,dr'. \qquad (5)$$

Подставляя полученное решение во второе уравнение системы (3), записанное в сферической системе координат, получаем

$$(1/r)(ru_i)'' + \big[\sigma/(1-2\sigma)\big]\big[(1/r^2)(r^2u_r)'\big]'$$

$$= 4\pi\rho\beta G(1+\sigma)r/E - \beta'\beta\big[(1+\sigma)/E\rho\big]\big[1/r(r^2u_r)'\big]'.$$

После простых преобразований находим

$$u_r'' + u_r'(r\gamma + 2/r) + 2u_r\big[\gamma - \sigma/(1+\sigma)r^2\big]$$

$$= 4\pi\rho\beta G(1-2\sigma)r/3E(1+\sigma), \qquad (6)$$

где параметр $\gamma = \beta\beta'(1-2\sigma)/(1+\sigma)\rho$.

Обезразмеривая уравнение (6) с помощью подстановки $x = r/r_0$, $u = u_o y$, где $r_0 = (2/\gamma)^{1/2}$, $u_0 = 4\pi\rho\beta G(1-2\sigma)r_0^3/3E(1+\sigma)$, и совершая замену $\xi = x^2$, $y = W(\xi)\xi^k$, где k удовлетворяет уравнению $k^2 - \sigma/2(1+\sigma) = 0$ (причем физический смысл имеет только положительный корень, ибо при $x = 0$ деформация в нуле должна быть конечна), находим следующее уравнение:

$$\xi W'' + (2k+1+0.5\xi)W' + (1+0.5k)W = 0. \qquad (7)$$

Приведенное уравнение представляет собой не что иное, как уравнение вырожденной гипергеометрической функции. А потому его решение есть $W = F(k+2,\ 1+2k,\ -\xi/2)$. Окончательно искомое деформационное смещение можно описать как

$$u_r = u_0 x^{2k} F(k+2,\ 1+2k,\ -x^2/2). \qquad (8)$$

Из приведенного выражения мы видим, что при малых x $(x\to 0)$ решение будет вести себя как $u \to u_0 x^{2k}$. При больших x $(x \gg 1)$, пользуясь асимптотикой гипергеометрической функции, найдем, что

$$u_k \approx u_0\bigg\{\frac{2^{k12}\Gamma(k+2)}{\Gamma(k-1)x^4}$$

$$+\frac{\Gamma(k+2)\exp\{-x^2/2\}x^2}{\Gamma(1+2k)}(-0.5)^{1-k}\bigg\}. \qquad (9)$$

Поскольку $k < 1$, то первое слагаемое в (9) исчезает, и окончательно мы находим правильное решение в виде

$$u_k \approx u_0\frac{\Gamma(k+2)\exp\{-x^2/2\}x^2}{\Gamma(1+2k)}(-0.5)^{1-k}.$$

Итак, на расстоянии порядка и больше r_0 деформационное смещение экспоненциально затухает к поверхности Земли, что, на наш взгляд, является вполне физичным и разумным ответом.

Видно, в частности, что это критическое радиальное расстояние (отсчитываемое от центра планеты) можно оценить по следующей формуле:

$$r_0 = (1/\gamma)^{1/2} = (G/\omega_0^3)\big[E(1+\sigma)\rho/(1-2\sigma)\big]^{1/2}. \qquad (10)$$

Для оценки r_0 положим модуль Юнга $E = 10^{11}\,\mathrm{J/m^3}$, плотность Земли $\rho = 10\,\mathrm{kg/m^3}$, коэффициент Пуассона $\sigma = 1/3$, гравитационную постоянную $G = 6.672\cdot 10^{-11}\,\mathrm{m^3/kg\cdot s^2}$. Постоянную взаимодействия, измеряемую в единицах обратного времени, выберем равной $\omega_0 = 10^{-3}\,(1/\mathrm{s})$. Заметим попутно, что если выбрать ω_0 большей или меньшей 10^{-3}, то будет получаться уже не совсем реальный ответ. В итоге оказывается, что $r_0 = 134\,\mathrm{km}$.

Приведенная оценка свидетельствует о затухании деформаций, связанных с проявлением взаимодействия между гравитационнным полем планеты и деформационными сдвигами, возникающими в любом массивном теле под действием собственной силы тяжести. Характерные расстояния при этом оцениваются в несколько сотен километров от центра. В принципе это и понятно, поскольку связь между смещением $\mathbf{u}$ и потенциалом φ, как мы только что убедились, весьма сильная и „неучет" этого взаимодействия привел бы просто к несуразному ответу. Действительно, легко проверить, что, если решать уравнение $\Delta\mathbf{u} + [\sigma/(1-2\sigma)]\operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{u} = -\rho\mathbf{g}$, с $\mathbf{g} = -g\mathbf{r}/R$, получающемуся в свою очередь из решения уравнения Пуассона $\Delta\varphi = 4\pi\rho G$ при $r < R$, где R — радиус Земли, получится ответ, говорящий нам о смещениях порядка 160 km на расстояниях примерно 2000 km от центра. Это еще бы ничего, однако самое неприятное ждет впереди, когда речь заходит о вычислении смещений на поверхности Земли, и вот тут оказывается, что они составляют около 1600 km.

Подобный ответ указывает лишь на необходимость учета нелинейных слагаемых, связанных с проявлением взаимодействия между гравитационным и деформационным потенциалами. Это последнее и было описано в настоящем сообщении. Результат при этом, как можно убедиться выше, оказывается более чем реалистичным и доказывает отсутствие смещений на поверхности Земли, несмотря на весьма сильные смещения вблизи ядра.

Список литературы

[1] *Molodenskii M.S.* Comm. Obs. R. Belgique. 1961. Vol. 25. P. 288–296.
[2] Собственные колебания Земли. Сб. научных трудов. М.: Наука, 1964. 288 с.
[3] *Магницкий В.А.* Внутреннее строение и физика Земли. М.: Наука, 1965. 433 с.
[4] *Мельхиор П.* Земные приливы. М.: Наука, 1968. 396 с.
[5] *Weber J.* // Phys. Rev. Lett. 1968. Vol. 20. P. 1031–1045.
[6] *Маркарян Е.Г., Мясников В.П.* Гидродинамическая модель эволюции Земли. М.: Институт космических исследований АН СССР, 1977.
[7] *Won J., Kuo J.* // Geophys. Res. 1973. Vol. 78. P. 905–918.
[8] *Мясников В.П., Фадеев В.Е.* // Итоги науки и техники. Сер. физика Земли. М., 1980. Вып. 5.
[9] *Садовский М.А., Писаренко В.Ф.* и др. // Изв. АН СССР. Сер. физика Земли. 1983. Вып. 12. С 3–10.
[10] *Садовский М.А., Писаренко В.Ф.* и др. // Изв. АН СССР. Сер. физика Земли. 1984. Вып. 1. С. 12–19.
[11] *Акимов О.А., Малугин В.А., Манукин А.Б.* // Физика Земли. 1985. Вып. 10. С. 97–102.
[12] *Agnew D.* // Rev. Geophys. 1986. N 3. P. 579–596.
[13] *Melchior P., Ducarme B.* // Phys. Earth and Plan. Int. 1986. Vol. 129. P. 42–48.
[14] *Кобзев А.В., Мясников В.П.* // ДАН СССР. !987. Т. 296. № 3. С. 381–385.
[15] Динамические процессы в земной коре. М.: Наука, 1994.
[16] *Брагинский В.Б., Зельдович Я.Б., Руденко В.Н.* Определение постоянной тяготения и измерение некоторых тонких гравитационных эффектов. М., 1973. С. 8–19.
[17] *Бичак И., Руденко В.Н.* Гравитационные волны в ОТО и проблема их обнаружения. М.: Наука, 1987. 312 с.
[18] *Rudenko V.N.* // Phys. Lett. A. 1996. Vol. 223. P. 421–426.
[19] *Эльсгольц Л.Э.* Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. М.: Наука, 1969. 424 с.
[20] *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Механика М.: Наука, 1973. 207 с.
[21] *Гладков С.О., Токарев А.М.* // ФГВ. 1990. Т. 25. Вып. 1. С. 30–38.
[22] *Гладков С.О.* // Перспективные материалы. 2000. Вып. 1. С. 50–54.
[23] *Лоскутов А.Ю., Михайлов А.С.* Введение в синергетику. М.: Наука, 1990. 272 с.
[24] *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Теория упругости. Т. 7. М.: Наука, 1987. 246 с.