01

О взаимодействии точечных зарядов в произвольной области

© *А.С. Зильберглейт,*[1] *И.М. Неменман,*[2] *И.В. Мандель*[3]

Gravity Probe B.W.W. Hansen Experimental Physics Laboratory, Stanford University,
Stanford, CA 94305-4085, USA

[1] e-mail: gleit@relgyro.stanford.edu
[2] e-mail: nemenman@itp.ucsb.edu
[3] e-mail: ilya@caltech.edu

(Поступило в Редакцию 29 августа 2002 г.)

Разработан систематический подход к расчету электростатической силы между точечными зарядами в произвольном объеме с произвольными граничными условиями. В присутствии границы простое правило вычисления силы, дающее ее как „заряд, умноженный на напряженность поля, в котором он находится", становится неверным. Это правило можно, однако, сохранить, предопределив внешее поле так, чтобы оно включало все члены, не расходящиеся в точке заряда, в том числе и те, что вызваны взаимодействием самого заряда с физической границей. Доказательство этого модифицированного закона проведено с помощью геометрической регуляризации, позволяющей проанализировать и преодолеть расходимость энергии самодействия точечных зарядов.

Введение

Формула расчета силы, с которой внешнее электрическое поле[1] действует на точечный заряд, знакома всем со школьной скамьи: „Сила равна произведению заряда на напряженность поля, в котором он находится". Этим правилом можно пользоваться и в том случае, когда поле создается другими точечными зарядами.

Ситуация, однако, существенно меняется, когда поле создается группой точечных зарядов, находящихся внутри произвольного объема с какой-либо физической границей, присутствие которой отражено в соответствующих граничных условиях. Тогда само понятие „поля, в котором находится заряд", становится плохо определенным. Действительно, наивный подход к задаче с одним-единственным зарядом (находящимся, например, около проводящей плоскости) приводит к абсурдному заключению о равенстве нулю силы, действующей на заряд: ведь здесь все поле вызвано самим зарядом (иных источников просто нет!), значит, „поле, в котором находится заряд", равно нулю.

Более опытный физик может, конечно, сказать, что только та часть поля, которая расходится как $1/r^2$ около заряда, непосредственно создана им самим, а остальные члены являются следствием граничных условий, которые математически описывают перераспределение других физических зарядов на границе. Поэтому именно остаток после вычитания сингулярного члена дает „поле, в котором находится заряд". Тем не менее это остается лишь догадкой на фоне точного расчета потенциалов и полей; чтобы не снижать уровня строгости, справедливость докадки следует доказать. Это тем более имеет смысл сделать ввиду того, что выбор членов, дающих вклад в силу, далеко не очевиден.

[1] Слово „внешнее" означает, что поле создается другими источниками, а границы находятся вдалеке от заряда.

Таким образом, представляется важным дать строгое доказательство измененного правила „сила равна заряду, умноженному на ту часть поля, которая не расходится в точке, где находится заряд" и выяснить границы его применимости. Для этого естественно использовать фундаментальный закон сохранения энергии, дающий силу как минус градиент энергии в точке расположения заряда. Но и такой подход немедленно сталкивается с трудностями, так как энергия точечных зарядов бесконечна из-за их самодействия.

Возможно, именно из-за этих трудностей, а также благодаря обманчивой простоте задачи попытки найти хоть какие-то относящиеся к делу результаты в литературе, в частности известных учебниках и монографиях [1–10], не приводит к успеху, если не считать нескольких абзацев из книги [6], которые мы обсудим в разделе.

Ввиду этого в настоящей работе мы даем строгий вывод общего выражения для силы, действующей на точечный заряд. Вывод состоит из (геометрической) регуляризации задачи, расчета силы на основе (регуляризованной и конечной) энергии и рассмотрения сингулярного предельного перехода. Результат полностью подтверждает интуитивные физические соображения.

1. Электростатическая задача с точечными зарядами в объеме: потенциал и энергия

Рассмотрим произвольную трехмерную область D с идеально проводящей границей S и N точечными электрическими зарядами внутри. В этом случае электрический потенциал $\psi(\mathbf{r})$ определяется с помощью граничного условия Дирихле (мы используем единицы СИ на протяжении всей работы)

$$\Delta\psi = -\frac{1}{\varepsilon_0}\sum_{i=1}^{N} q_i\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_i), \quad \mathbf{r}, \mathbf{r}_i \in D; \tag{1}$$

$$\psi\big|_S = 0. \tag{2}$$

Здесь $\mathbf{r} = x\mathbf{e}_x + y\mathbf{e}_y + z\mathbf{e}_z$ — радиус-вектор точки, $\mathbf{r}_i = x_i\mathbf{e}_x + y_i\mathbf{e}_y + z_i\mathbf{e}_z$ задает местоположение i-го заряда, а $\mathbf{e}_\alpha$, $\alpha = x, y, x$ суть орты некоторой прямоугольной системы координат. В соответствии с принципом суперпозиции потенциал $\psi(\mathbf{r})$ равен сумме потенциалов, вызванных отдельными зарядами,

$$\psi(\mathbf{r}) = \kappa\sum_{j=1}^{N} q_j G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_j), \tag{3}$$

$$\psi(\mathbf{r}) \equiv \kappa\sum_{j=1}^{N} q_j\left[\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_j|} + G_R(\mathbf{r}, \mathbf{r}_j)\right], \tag{4}$$

причем $\kappa = 1/\pi\varepsilon_0$, а $G_R(\mathbf{r}, \mathbf{r}_j)$ — регулярная часть фукции Грина $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_j)$ данной задачи (т.е. ее решение при $q_j = 1$, $q_i = 0$, $i \neq j$ в уравнении (1)). Обе эти функции, разумеется, симметричны

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_j) = G(\mathbf{r}_j, \mathbf{r}), \quad G_R(\mathbf{r}, \mathbf{r}_j) = G_R(\mathbf{r}_j, \mathbf{r}). \tag{5}$$

Перепишем выражение (4), разделяя потенциал на сумму сингулярных и регулярных слагаемых,

$$\psi(\mathbf{r}) = \kappa\sum_{j=1}^{N}\frac{q_j}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_j|} + \psi_R(\mathbf{r}), \tag{6}$$

$$\psi_R(\mathbf{r}) \equiv \kappa\sum_{j=1}^{N} q_j G_R\mathbf{r}, \mathbf{r}_j. \tag{7}$$

Здесь $\psi_R(\mathbf{r})$ — регулярная функция, удовлетворяющая уравнения Лапласа везде в D (а также по непрерывности в любой регулярной точке[2] границы S, хотя это несущественно для данного подхода). Заметим, что и сам потенциал ψ и его регулярная часть ψ_R зависят как от расположения зарядов $\mathbf{r}_i$, так и от точки, в которой измеряется потенциал, $\mathbf{r}$. Это явно указано в полной записи

$$\psi(\mathbf{r}) \equiv \psi(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1, \ldots, \mathbf{r}_i, \ldots, \mathbf{r}_N), \tag{8}$$

$$\psi_R(\mathbf{r}) \equiv \psi_R(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1, \ldots, \mathbf{r}_i, \ldots, \mathbf{r}_N). \tag{9}$$

Предположим, что потенциал известен, и необходимо рассчитать силу $\mathbf{F}^i$, действующую на заряд q_i. По закону сохранения энергии, эта сила равна [6]

$$\mathbf{F}^i = -\frac{\partial}{\partial\mathbf{r}_i}W_D, \quad \frac{\partial}{\partial\mathbf{r}_i} = \frac{\partial}{\partial\mathbf{x}_i}\mathbf{e}_x + \frac{\partial}{\partial\mathbf{y}_i}\mathbf{e}_y + \frac{\partial}{\partial\mathbf{z}_i}\mathbf{e}_z, \tag{10}$$

где W_D — энергия поля в области D,

$$W_D = \frac{\varepsilon_0}{2}\int\limits_D(\boldsymbol{\nabla}\psi)^2 dV \tag{11}$$

(оба символа $\boldsymbol{\nabla}$ и $\partial/\partial\mathbf{r}$ обозначают градиент; в каждом случае мы используем тот или другой, исходя из удобства записи).

Трудность, однако, заключается в том, что интеграл (11), очевидно, расходится из-за самодействия точечных зарядов (энергия одного точечного заряда беспонечна). Мы докажем, что, хотя для данного распределения точечных зарядов энергия бесконечна, разница между двумя значениями энергии, соответствующими двум любым таким распределениям, конечна независимо от формы границы и стремится к нулю, когда одно распределение стремится к другому; следовательно, сила тоже оказывается конечной в соответствии с интуитивными представлениями. Эта ситуация с энергией напоминает ту, которая возникает при расчете эффекта Казимира [12], также требующего регуляризации.

2. Регуляризованная энергия и сила, действующая на заряды

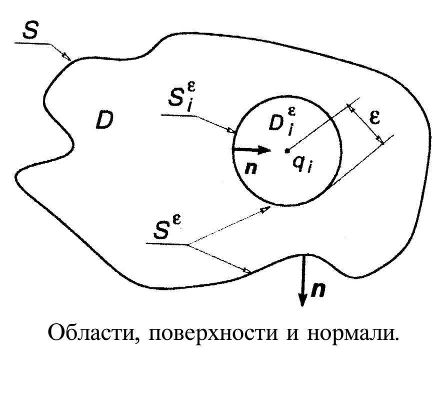
Окружим каждый заряд q_i малой сферой S_i^ϵ радиуса ϵ; пусть D_i^ϵ обозначет внутренность этой сферы. Пусть D^ϵ обозначает область D за вычетом всех областей D_i^ϵ, а S^ϵ — объединение S и всех сферических поверхностей S_i^ϵ (см. рисунок). Таким образом, S^ϵ является границей области D^ϵ, причем $D^\epsilon = D$, $S^\epsilon = S$, когда $\epsilon = 0$.

Используя соотношение (10), можно определить силу, действующую на заряд q_i по формуле

$$\mathbf{F}^i = \lim_{\epsilon\to 0}\mathbf{F}^i_\epsilon = -\lim_{\epsilon\to 0}\frac{\partial}{\partial\mathbf{r}_i}W_D^\epsilon, \tag{12}$$

где W_D^ϵ — регуляризованная энергия, т.е. энергия поля в области D^ϵ, величина которой конечна из-за отсутствия там особеннстей (точечных зарядов).

Следует обратить внимание на порядок действий в определении (12): сначала берется градиент регуляризованной энергии в точке расположения заряда, а затем (сингулярный) предел. В принципе следует также доказать, что конечный результат не зависит от



Области, поверхности и нормали.

[2] Мы допускаем граничные сингулярности, как например ребра и острия, предполагая возле них выполнение условия типа Мейснера [11], гарантирующего конечность энергии; область D может быть и неограниченной.

выбора метода регуляризации; этот вопрос обсуждается в разделе 3.

В силу формулы (11) и того, что итоговый потенциал, который дается представлением (3) или (6), регулярен в D^ϵ, регуляризованная энергия равна

$$W_D^\epsilon \equiv \frac{\varepsilon_0}{2} \int\limits_{D^\epsilon} (\nabla\psi)^2 dV \tag{13}$$

$$= \frac{\varepsilon_0}{2} \int\limits_S \psi \frac{\partial\psi}{\partial n} dA - \frac{\varepsilon_0}{2} \int\limits_{D^\epsilon} \psi\Delta\psi dV, \tag{14}$$

где n — направление внешней нормали к S^ϵ (и соответственно внутренней нормали к сферам S_i^ϵ).

В случае, если область D бесконечна, предположим еще, что потенциал и его градиент достаточно быстро стремятся к нулю на бесконечности, чтобы вклад от интеграла по сфере большого радиуса в пределе стремился к нулю.

Поскольку ψ — гармоническая функция всюду в D^ϵ, интеграл по объему в правой части предыдущего равенства исчезает; оставшийся интеграл по поверхности можно записать как

$$W_D^\epsilon = \frac{\varepsilon_0}{2} \sum_{k=1}^N \int\limits_{S_\kappa^\epsilon} \psi \frac{\partial\psi}{\partial n} dA + \frac{\varepsilon_0}{2} \int\limits_S \psi \frac{\partial\psi}{\partial n} dA \tag{15}$$

и, далее, используя граничное условие (2), как

$$W_D^\epsilon = \frac{\varepsilon_0}{2} \sum_{k=1}^N \int\limits_{S_\kappa^\epsilon} \psi \frac{\partial\psi}{\partial n} dA. \tag{16}$$

В конечном итоге нас интересует предел $\epsilon \to 0$, поэтому необходимо учитывать только те члены, которые дают вклад в этом пределе. Поскольку площадь, по которой идет интегрирование в предыдущей формуле, пропорциональна ϵ^2, мы сохраняем только те члены под интегралом, которые в пределе растут не медленнее, чем ϵ^{-2}. Учитывая это и используя выражение (6) для потенциала, можно записать интеграл по поверхности, стоящий в равенстве (16), в виде

$$\int\limits_{S_k^\epsilon} \psi \frac{\partial\psi}{\partial n} dA = \int\limits_{S_k^\epsilon} \frac{\kappa q_k}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_k|} \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{\kappa q_k}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_k|} \right) dA$$
$$+ \int\limits_{S_k^\epsilon} \left[\psi_R(\mathbf{r}) + \sum_{j=1,\, j\neq k}^N \frac{\kappa q_j}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_j|} \right] \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{\kappa q_k}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_k|} dA + O(\epsilon). \right) \tag{17}$$

Первое слагаемое в предудущем уравнении соответствует регуляризованной энергии самодействия k-го заряда $W_{k,\mathrm{self}}^\epsilon$. Элементарное интегрирование дает

$$W_{k,\mathrm{self}}^\epsilon = \frac{\varepsilon_0}{2} \kappa^2 \frac{4\pi q_k^2}{\epsilon} = \frac{\kappa q_k^2}{2\epsilon}. \tag{18}$$

Единственное свойство регуляризованной энергии (18), существенное для нашего вычисления, — это то, что она не зависит от расположения заряда q_k, т.е. от радиус-вектора $\mathbf{r}_k$.

Регулярность ψ_R и $1/|\mathbf{r}-\mathbf{r}_j|$, $j \neq k$ на поверхности S_k^ϵ и в области D_k^ϵ позволяет нам упростить второе слагаемое правой части (17). В упрощенной форме это соотношение (17) выглядит так:

$$\frac{\varepsilon_0}{2} \int_{S_k^\epsilon} \psi \frac{\partial\psi}{\partial n} dA = W_{k,\mathrm{self}}^\epsilon + \frac{\varepsilon_0}{2} \left[\psi_R(\mathbf{r}_k) + \sum_{j=1,\, j\neq k} \frac{\kappa q_j}{|\mathbf{r}_k-\mathbf{r}_j|} \right]$$
$$\times \int_{S_k^\epsilon} \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{\kappa q_k}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_k|} \right) dA + O(\epsilon)$$
$$= W_{k,\mathrm{self}}^\epsilon + \frac{q_k}{2} \left[\psi_R(\mathbf{r}_k) + \sum_{j=1,\, j\neq k} \frac{\kappa q_j}{|\mathbf{r}_k-\mathbf{r}_j|} \right] + O(\epsilon), \tag{19}$$

причем множитель 4π, возникающий в результате интегрирования, представляет, естественно, полный телесный угол. Асимптотическое равенство (19) можно дифференцировать по $\mathbf{r}_i$ с той же оценкой остатка.

Подставляя последнее выражение в правую часть (16), получаем

$$W_D^\epsilon = \sum_{k=1}^N W_{k,\mathrm{self}}^\epsilon + \frac{\kappa}{2} \sum_{k=1}^N \sum_{j=1,\, j\neq k}^N \frac{q_j q_k}{|\mathbf{r}_j-\mathbf{r}_k|}$$
$$+ \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N q_k \psi_R(\mathbf{r}_k) + O(\epsilon). \tag{20}$$

Выражение (20) в свою очередь подставляется в формулу (12) для силы; при этом видно, что энергии самодействия зарядов на зависят от расположения последних, так что, хотя и расходятся в пределе $\epsilon \to 0$, но не дают вклада в силу. Дальнейшие расчеты относительно просты, следует лишь аккуратно дифференцировать последнее слагаемое правой части (20) при $k = i$. В самом деле, как видно из записи (8), величина $\mathbf{r}_i$ встречается в этом случае дважды среди аргументов ψ_R, а именно $\psi_R(\mathbf{r}_i) \equiv \psi_R(\mathbf{r}_i, \mathbf{r}_1, \ldots, \mathbf{r}_i \ldots, \mathbf{r}_N)$, и дифференцировать необходимо по обоим этим аргументам. С учетом этого формула для силы приобретает следующий вид:

$$\mathbf{F}^i = -\kappa q_i \sum_{k=1,k\neq i}^N \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_i} \frac{q_k}{|\mathbf{r}_i-\mathbf{r}_k|}$$
$$- \frac{1}{2} \left[\sum_{k=1}^N q_k \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_i} \psi_R(\mathbf{r}) \Big|_{\mathbf{r}=\mathbf{r}_k} + q_i \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \psi_R(\mathbf{r}) \Big|_{\mathbf{r}=\mathbf{r}_i} \right]$$
$$= \kappa q_i \sum_{k=1,k\neq i}^N q_k \frac{\mathbf{r}_i-\mathbf{r}_k}{|\mathbf{r}_i-\mathbf{r}_k|^3}$$
$$- \frac{1}{2} \left[\sum_{k=1}^N q_k \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_i} \psi_R(\mathbf{r}) \Big|_{\mathbf{r}=\mathbf{r}_k} + q_i \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \psi_R(\mathbf{r}) \Big|_{\mathbf{r}=\mathbf{r}_i} \right]. \tag{21}$$

Этот результат можно выразить в более изящной форме с помощью дополнительных преобразований. Заменяя в (21) ψ_R на его выражение из (6), находим

$$\mathbf{F}^i = -\kappa q_i \sum_{k=1,k\neq i}^{N} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_i} \frac{q_k}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_k|}$$

$$- \frac{\kappa q_i}{2}\left[\sum_{k=1}^{N} q_k \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_i} G_R(\mathbf{r}, \mathbf{r}_i)\bigg|_{\mathbf{r}=\mathbf{r}_k} + \sum_{j=1}^{N} q_j \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} G_R(\mathbf{r}, \mathbf{r}_j)\bigg|_{\mathbf{r}=\mathbf{r}_i}\right]$$

$$= -\kappa q_i \left[\sum_{k=1,k\neq i}^{N} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_i} \frac{q_k}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_k|} + \sum_{k=1}^{N} q_k \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} G_R(\mathbf{r}, \mathbf{r}_k)\bigg|_{\mathbf{r}=\mathbf{r}_i}\right], \tag{22}$$

где второе равенство получено в использованием симметрии (5).

Для того чтобы физическая суть формулы стала еще более очевидной, можно преобразовать выражение (22) следующим образом:

$$\mathbf{F}^i = -\kappa q_i \boldsymbol{\nabla} \left\{ \sum_{k=1}^{N} q_k \left[\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_k|} + G_R(\mathbf{r}, \mathbf{r}_k)\right] - \frac{q_i}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|} \right\}\bigg|_{\mathbf{r}=\mathbf{r}_i} = -q_i \boldsymbol{\nabla} \left[\psi(\mathbf{r}) - \frac{\kappa q_i}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|}\right]\bigg|_{\mathbf{r}=\mathbf{r}_i}. \tag{23}$$

Последнее выражение полностью соответствует интуитивным представлениям о формуле для силы: оно записано как раз по обобщенному правилу, предложенному во Введении.

3. Обсуждение

Из выражений (21)–(23) для силы с очевидностью следует, что для зарядов в пустом пространстве (область D — все пространство, границы отсутствуют) $G_R(\mathbf{r}, \mathbf{r}_k) \equiv 0$, $\psi_R \equiv 0$ и мы имеем классическую формулу Кулона.

Далее, формула (23) показывает, что закон: „Сила — это заряд, умноженный на напряженность поля, в котором он находится“ действительно работает, если под этим полем понимать его регулярную часть. Можно сформулировать некий „минимальный принцип“, а именно: чтобы получить правильный ответ для силы, надо выбросить из поля только ту его часть, которая дала бы бесконечный ответ. Как было отмечено во Введении, этот результат просматривается интуитивно. Он становится еще более прозрачным, если заметить, что сингулярная часть поля радиальна, а радиальное поле силы не создает.

Вклад регулярной части поля, созданного зарядом, в силу, действующую на этот самый заряд, особенно важен в случае, когда другие заряды отсутствуют, как видно из простейшего примера с зарядом у проводящей пластины. Именно регулярная часть поля, созданного зарядом (равная полю отраженного заряда), дает полное значение силы.

Рассмотрим теперь важный вопрос о корректности нашей регуляризации, т.е. о том, не зависит ли вдруг выражение для силы от того, каким именно способом регуляризация проводится. Два следующих соображения указывают на то, регуляризация корректна.

Первое из них относится к использованной нами геометрической регуляризации. Если вырезать окрестности зарядов не с помощью сфер, как это было сделано, а посредством других гладких поверхностей, т.е. заменить шар D_k^ϵ вокруг q_k на произвольный „топологический шар“, то нетрудно увидеть, что все члены порядка $O(\epsilon)$ в выражении (20) для регуляризованной энергии не меняются и соответственно наш результат для силы остается верным. Схема доказательства при этом не меняется тоже, только при вычислении интеграла по поверхности S_k^ϵ в формуле (19) следует воспользоваться известным результатом из теории потенциала [13,п. 193;14]. Что касается первого интеграла в правой части соотношения (17), определяющего энергию самодействия $W_{k,\mathrm{self}}^\epsilon$, то нет необходимости искать для него точное выражение, а достаточно воспользоваться его очевидной независимостью от $\mathbf{r}_k$.

Существует и альтернативный подход к регуляризации (он широко использовался классиками в эпоху „до дельта-функции Дирака“). Это физическая регуляризация, когда точечный заряд q_k заменяется, в малой области D_k^ϵ, на гладкое распределение заряда с плотностью $\rho_k^\epsilon(\mathbf{r})$ и тем же суммарным зарядом q_k, а затем ϵ устремляется к нулю. В данном случае такой подход оказывается более трудным для расчета, но приводит к тем же $O(\epsilon)$ членам в выражении (20) для регуляризованной энергии. Главное отличие этого подхода в том, что вывод удобнее начинать со следующего выражения для регуляризованной энергии:

$$W_D^\epsilon \equiv \frac{1}{2}\int_D \rho^\epsilon \psi dV = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{N}\int_{D_k^\epsilon} \rho_k^\epsilon \psi dV, \tag{24}$$

и затем вместо представления (3) для потенциала разбить его на сумму потенциалов от $\rho_k^\epsilon(\mathbf{r})$ по D_k^ϵ (которая становится сингулярной в пределе) и регулярную добавку $\psi_R^\epsilon(\mathbf{r})$. Результат для силы, как уже сказано, сохраняется.

Физическая регуляризация используется, в частности, в разделе 3.08 монографии [6] для расчета силы, действующей на один точечный заряд в произвольной области с нулевым потенциалом на границе. Там используется вывод на „физическом уровне строгости“ и ответ не доведен до физически наиболее значимой формы (23). Кроме того, окончательный результат (правая часть уравнения (2) раздела 3.08) формально расходится из-за неправильного использования обозначения для полного потенциала там, где должна быть лишь его регулярная часть.

В заключение обсуждения отметим, что в только что решенной электростатической задаче, как и в ее обобщениях, обсуждаемых в следующем разделе, рассматриваются только заряды, находящиеся внутри объема. В других ситуациях, например, в задачах магнитостатики, связанных с магнитными нитями, вмороженными в сверхпроводящую среду [15], появляются и поверхностные заряды (флаксоны). Анализ подобных задач представляет интерес для современной экспериментальной физики (см., например, [16]). Оказывается, что величина силы, действующей между зарядами на поверхности, существенно зависит от локальной формы последней, например от кривизны поверхности в точках, где расположены заряды. Поэтому вывод выражения для силы в подобных случаях оказывается значительно более сложным; взаимодействие поверхностных зарядов будет рассмотрено в отдельной публикации.

4. Обобщение: границы других типов

Полученный результат можно обобщить на случай других граничных условий, причем не всегда очевидным путем.

Частное, но полезное обобщение — случай электродов, когда на границе задается произвольное распределение потенциала $V(\mathbf{r})$, не обязательно равное нулю,

$$\psi\big|_S = V(\mathbf{r}), \quad \mathbf{r} \in S. \tag{25}$$

Разделим потенциал на две части,

$$\psi = \psi^{(1)} + \psi^{(2)}, \tag{26}$$

из которых первая задается, как и прежде, точечными зарядами при нулевом потенциале на границе, а вторая — следствие исключительно ненулевого граничного потенциала. Тогда $\psi^{(1)}$ удовлетворяет (1), (2)

$$\Delta\psi^{(1)} = -\frac{1}{\varepsilon_0}\sum_{i=1}^{N} q_i\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_i), \quad \mathbf{r}, \mathbf{r}_i \in D; \tag{27}$$

$$\psi^{(1)}\big|_S = 0. \tag{28}$$

Как было показано выше, сила, действующая на заряд со стороны поля, заданного потенциалом $\psi^{(1)}$, выражается, согласно (23), формулой

$$\mathbf{F}^i_{(1)} = -q_i\boldsymbol{\nabla}\left[\psi^{(1)}(\mathbf{r}) - \frac{\kappa q_i}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_i|}\right]\bigg|_{\mathbf{r}=\mathbf{r}_i}. \tag{29}$$

При этом потенциал $\psi^{(2)}$, удовлетворяющий задаче

$$\Delta\psi^{(2)} = 0, \quad \mathbf{r} \in D; \quad \psi^{(2)}\big|_S = V(\mathbf{r}), \tag{30}$$

описывает поле, внешнее для всех точечных зарядов, поскольку оно не зависит от их величины и расположения. Таким образом, сила, с которой действует это поле, равна

$$\mathbf{F}^i_{(2)} = -q_i\boldsymbol{\nabla}\psi^{(2)}(\mathbf{r})\big|_{\mathbf{r}=\mathbf{r}_i}. \tag{31}$$

Используя принцип суперпозиции, складываем эти две силы и получаем тот же результат (23) для данного случая

$$\mathbf{F}^i = \mathbf{F}^i_{(1)} + \mathbf{F}^i_{(2)} = -q_i\boldsymbol{\nabla}\left[\psi(\mathbf{r}) - \frac{\kappa q_i}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_i|}\right]\bigg|_{\mathbf{r}=\mathbf{r}_i}. \tag{32}$$

При смешанных граничных условиях

$$\psi\big|_{S_1} = V(\mathbf{r}), \quad \varepsilon_0\frac{\partial\psi}{\partial n}\bigg|_{S_2} = \sigma(\mathbf{r}), \tag{33}$$

где поверхности S_1, S_2 не пересекаются ($S_1 \cap S_2 = \emptyset$) и в сумме составляют полную границу $S_1 \cup S_2 = S$; $V(\mathbf{r}), \sigma(\mathbf{r})$ — заданные функции, вновь получаем стандартный ответ (23) для силы без дополнительных технических трудностей. Действительно, как и в представлении (26), потенциал разбивается на две части, определяемые задачами

$$\Delta\psi^{(1)} = -\frac{1}{\varepsilon_0}\sum_{i=1}^{N} q_i\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_i), \quad \mathbf{r}, \mathbf{r}_i \in D; \tag{34}$$

$$\psi^{(1)}\big|_{S_1} = 0, \quad \frac{\partial\psi^{(1)}}{\partial n}\bigg|_{S_2} = 0 \tag{35}$$

и

$$\Delta\psi^{(2)} = 0, \quad \mathbf{r} \in D; \tag{36}$$

$$\psi^{(2)}\big|_{S_1} V(\mathbf{r}), \quad \varepsilon_0\frac{\partial\psi^{(2)}}{\partial n}\bigg|_{S_2} = \sigma(\mathbf{r}). \tag{37}$$

Формула для силы от потенциала $\psi^{(1)}$ выводится так же, как в разделе 2, что дает результат (29). Внешнее по отношению к зарядам поле потенциала $\psi^{(2)}$ создает силу, определяемую формулой (31), так что суперпозиция опять приводит к той же суммарной силе, что и в (23) (или в (32)).

Для граничных условий второго рода

$$\varepsilon_0\frac{\partial\psi}{\partial n}\bigg|_S = \sigma(\mathbf{r}), \quad \int_S \sigma(\mathbf{r})dA + Q = 0, \quad Q \equiv \sum_{j=1}^{N} q_j \tag{38}$$

разделение потенциала на две части менее очевидно. Дело в критерии разрешимости задачи Неймана, требующем, чтобы полный заряд, равный сумме зарядов в объеме и на поверхности, был равен нулю. При разбиении потенциала на две части это вызывает необходимость добавить и вычесть дополнительный точечный заряд Q (равный сумме точечных зарядов q_i) в произвольной точке $\mathbf{r}_*$ области D. Тогда потенциал можно разбить на два следующим образом:

$$\Delta\psi^{(1)} = -\frac{1}{\varepsilon_0}\left[\sum_{i=1}^{N} q_i\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_i) - Q\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_*)\right],$$

$$\mathbf{r}, \mathbf{r}_i, \mathbf{r}_* \in D; \tag{39}$$

$$\frac{\partial\psi^{(1)}}{\partial n}\bigg|_S = 0, \tag{40}$$

а также

$$\Delta\psi^{(2)} = -\frac{Q}{\varepsilon_0}\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_*), \quad \mathbf{r}, \mathbf{r}_* \in D; \tag{41}$$

$$\varepsilon_0 \frac{\partial\psi^{(2)}}{\partial n}\bigg|_S = \sigma(\mathbf{r}). \tag{42}$$

Обе сформулированные задачи разрешимы. Вновь вывод выражения силы, вызываемой потенциалом $\psi^{(1)}$, которая удовлетворяет однородному граничному условию, проводится так же, как раньше, и по-прежнему приводит к (29). Внешнее по отношению к зарядам поле потенциала $\psi^{(2)}$ действует на заряд q_i с силой (31), и суперпозиция опять дает в ответе формулу (23). Сама задача (38), однако, не вполне реалистична, за исключением случая изолированной границы, $\sigma(\mathbf{r}) \equiv 0$.

Эта работа выполнена при поддержке по гранту NASA (NAS 8-39225), проекту Gravity Probe B. Кроме того, И.Н. Неменман частично пользовался поддержкой NEC Research Institute.

Авторы благодарны Р.В. Вагонеру и В.С. Манделю за ценные замечания и участникам теоретического семинара GP-B за полезное обсуждение.

Список литературы

[1] *Sommerfeld A.J.W.* Electrodynamics. New York: Academic Press, 1952.
[2] *Тамм И.Е.* Основы теории электричества. М.: ГИТТЛ, 1957.
[3] *Stratton J.A.* Electromagnetic Theory. New York: McGraw Hill, 1941.
[4] *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Теория поля. М.: ГИФМЛ, 1962.
[5] *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Электродинамика сплошных сред. М.: Наука, 1982.
[6] *Smythe W.R.* Static and Dynamic Electricity. New York; Washington; Philadelphia; London: Hemisphere Publ. Corp., 1989.
[7] *Jackson J.D.* Classical Electrodynamics. New York: Chichester; Weinheim; Brisbane; Singapore; Toronto: John Wiley and Sons, 1999.
[8] *Feynman R.P.* The Feynman Jectures of Physics / Redwood City: Addison-Wesley. 1989. Vol. 2. Electromagnettism and Matter.
[9] *Crowley J.M.* Fundamentals of Applied Electrostatics New York: John Wiley and Sons, 1986.
[10] Electrostatics and Its Applications / Ed. A.D. Moore. New York: John Wiley and Sons, 1973.
[11] *Mittra R., Lee S.W.* Analytical Techniques in the Theory of Guided Waves. Berlin; New York: Springer Verlag, 1967.
[12] *Mostepanenko V.M., Trunov N.N.* The Casimir Effect and its Applications. Oxford: Clarendon Press, 1997.
[13] *Смирнов В.И.* Курс высшей математики. Т. IV. М.: ГИТТЛ, 1957.
[14] *Kellogg O.D.* Foundations of Potential Theory New York: The Macmillan Co., 1971.
[15] *Tinkham M.* Introduction to Superconductivity. New York; Singapore: McGraw Hill, 1996.
[16] *Nemenman I.M., Silbergleit A.S.* // J. Appl. Phys. 1999. T. 86. P. 616.