

01;03

О внутреннем резонансе мод нелинейно осциллирующей объемно заряженной диэлектрической капли

© С.О. Ширяева

Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова,
150000 Ярославль, Россия
e-mail: shir@uniyar.ac.ru

(Поступило в Редакцию 18 июля 2002 г.)

В квадратичном приближении по амплитуде произвольной начальной деформации равновесной сферической формы однородно объемно заряженной капли диэлектрической жидкости получено аналитическое выражение для образующей формы ее поверхности при осесимметричных осцилляциях в зависимости от времени. Получено условие, накладываемое на частоты мод, при выполнении которого между модами в квадратичном приближении имеет место резонансное взаимодействие. Показано, что при заряде, докритическом для реализации неустойчивости поверхности капли по отношению к собственному заряду, может иметь место не одна резонансная ситуация, как было известно ранее, но весьма значительное их количество. Исследованы закономерности нелинейного резонансного двух и трехмодового взаимодействия.

1. Изучение особенностей нелинейных капиллярных осцилляций заряженных капель представляет интерес в связи с разнообразием академических, технических и технологических приложений (см., например, [1–11] и указанную там литературу). Тем не менее в связи с громоздкостью аналитических расчетов многие аспекты нелинейных колебаний заряженных капель остаются пока малоизученными. Сказанное относится, например, к так называемой трансляционной неустойчивости капель, проявляющейся, когда в спектре мод, возбужденных в начальный момент времени, имеются несколько соседних [11] к особенностям реализации внутреннего нелинейного резонансного взаимодействия различных мод капиллярных осцилляций капли [1,8], к исследованию влияния на закономерности нелинейных осцилляций капли особенностей распределения ее заряда по объему. В связи со сказанным решим задачу о расчете нелинейных осцилляций объемно однородно заряженной капли диэлектрической жидкости, выделим резонансные ситуации, имеющие место при докритическом заряде (в смысле линейной устойчивости), и проведем анализ полученного решения в окрестности характерных резонансов.

2. Рассмотрим эволюцию во времени формы поверхности капли идеальной, несжимаемой диэлектрической жидкости с плотностью ρ , коэффициентом поверхностного натяжения и диэлектрической проницаемостью ξ и ϵ_d соответственно. Примем, что капля находится в вакууме, ее полный заряд, равный Q , равномерно распределен по объему с постоянной плотностью μ_q , а объем определяется объемом сферы с радиусом R . В начальный момент времени $t = 0$ равновесная сферическая форма капли претерпевает осесимметричное возмущение фиксированной амплитуды, существенно меньшей радиуса капли. Зададимся целью найти спектр возникающих капиллярных осцилляций капли (форму капли) в последующие моменты времени $t > 0$.

Примем, что форма капли осесимметрична как в начальный, так и во все последующие моменты времени, и

уравнение, описывающее ее поверхность в сферической системе координат с началом в центре масс капли в безразмерных переменных, в которых $R = \rho = \xi = 1$, имеет вид

$$r(\Theta, t) = 1 + \xi(\Theta, t), \quad |\xi| \ll 1. \quad (1)$$

Движение жидкости в капле будем полагать потенциальным, при этом поле скоростей движения жидкости в капле $\mathbf{V}(\mathbf{r}, t) = \nabla\psi(\mathbf{r}, t)$ полностью определяется функцией потенциала скорости $\psi(\mathbf{r}, t)$.

Система уравнений для описания эволюции формы поверхности капли состоит из уравнений Лапласа для потенциала поля скоростей $\psi(\mathbf{r}, t)$ и электростатического потенциала вне капли $\Phi_{\text{ex}}(\mathbf{r}, t)$, уравнение Пуассона для электростатического потенциала внутри капли $\Phi_{\text{in}}(\mathbf{r}, t)$

$$\Delta\psi(\mathbf{r}, t) = 0, \quad (2)$$

$$\Delta\Phi_{\text{ex}}(\mathbf{r}, t) = 0, \quad \Delta\Phi_{\text{in}}(\mathbf{r}, t) = -4\pi \frac{\mu_q}{\epsilon_d} \quad (3)$$

и граничных условий

$$r \rightarrow 0: \quad \psi(\mathbf{r}, t) \rightarrow 0; \quad (4)$$

$$r \rightarrow \infty: \quad \nabla\Phi_{\text{ex}}(\mathbf{r}, t) \rightarrow 0;$$

$$r \rightarrow 0: \quad \nabla\Phi_{\text{in}}(\mathbf{r}, t) < \infty; \quad (5)$$

$$r = 1 + \xi(\Theta, t): \quad \frac{\partial\xi}{\partial t} = \frac{\partial\psi}{\partial r} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial\xi}{\partial\Theta} \frac{\partial\psi}{\partial\Theta}; \quad (6)$$

$$\Delta p - \frac{\partial\psi}{\partial t} - \frac{1}{2} (\nabla\psi)^2 - \mu_q \Phi_{\text{in}} + \frac{1}{8\pi} (\epsilon_d - 1) (\nabla\Phi_{\text{ex}})^2 - \frac{(\epsilon_d - 1)^2}{8\pi\epsilon_d} (\mathbf{n}\nabla\Phi_{\text{ex}})^2 = \text{div} \mathbf{n}; \quad (7)$$

$$\Phi_{\text{ex}} = \Phi_{\text{in}}; \quad (8)$$

$$(\mathbf{n} \cdot \nabla\Phi_{\text{ex}}) = \epsilon_d (\mathbf{n} \cdot \nabla\Phi_{\text{in}}). \quad (9)$$

Кроме того, введем дополнительные условия, вытекающие из очевидных требований сохранения объема капли и неподвижности ее центра масс

$$\int_v r^2 dr \sin \Theta d\Theta d\phi = \frac{4}{3} \pi,$$

$$v = [0 \leq r \leq 1 + \xi(\Theta, t), 0 \leq \Theta \leq \pi, 0 \leq \phi \leq 2\pi]; \quad (10)$$

$$\int_v \mathbf{e}_r \cdot r^3 dr \sin \Theta d\Theta d\phi = 0,$$

$$v = [0 \leq r \leq 1 + \xi(\Theta, t), 0 \leq \Theta \leq \pi, 0 \leq \phi \leq 2\pi]. \quad (11)$$

Отметим, что поскольку условия (1), (11) должны выполняться в любой момент времени, в том числе и в начальный, то при $t = 0$ они определяют амплитуды нулевой и первой мод в разложении начального возмущения равновесной сферической формы поверхности капли $\xi(\Theta)$ в ряд по полиномам Лежандра, т.е. амплитуды нулевой и первой мод не могут быть произвольны, но будут зависеть от вида начальной деформации.

Начальные условия задаются в виде начальной деформации равновесной сферической формы капли и равенства нулю начальной скорости движения поверхности

$$t = 0: \quad \xi(\Theta) = \xi_0 P_0(\mu) + \xi_1 P_1(\mu) + \varepsilon \sum_{i \in \Xi} h_i P_i(\mu);$$

$$\frac{\partial \xi(\Theta)}{\partial t} = 0; \quad \sum_{i \in \Xi} h_i = 1, \quad (12)$$

где Ξ — множество значений номеров изначально возбужденных колебательных мод, $\mu \equiv \cos \Theta$.

В выражениях (6)–(12) введены обозначения: Δp — перепад постоянных давлений внутри и вне капли в состоянии равновесия; \mathbf{n} — единичный вектор нормали к поверхности (1); ε — амплитуда начального возмущения формы поверхности капли, являющаяся малым параметром задачи; $P_i(\mu)$ — полиномы Лежандра порядка i ; h_i — коэффициенты, определяющие парциальный вклад i -й колебательной моды в суммарное начальное возмущение; ξ_0 и ξ_1 — константы, определяемые из условий (10) и (11) в начальный момент времени и с точностью до слагаемых второго порядка малости по ε , равные

$$\xi_0 \approx -\varepsilon^2 \sum_{i \in \Xi} \frac{h_i^2}{(2i+1)} + O(\varepsilon^3);$$

$$\xi_1 \approx -\varepsilon^2 \sum_{i \in \Xi} \frac{9ih_{i-1}h_i}{(2i-1)(2i+1)} + O(\varepsilon^3). \quad (13)$$

В уравнениях (3), (5), (8), (9) предполагается, что электрический заряд „вморожен“ в жидкость и в любой момент времени распределен по объему капли с постоянной плотностью $\mu_q = (3Q/4\pi)$.

3. Для отыскания решения поставленной задачи воспользуемся классическим методом многих масштабов. Искомые функции $\xi(\Theta, t)$, $\psi(\mathbf{r}, t)$, $\Phi_{\text{ex}}(\mathbf{r}, t)$ и $\Phi_{\text{in}}(\mathbf{r}, t)$

представим в виде рядов по степеням малого параметра ε и будем считать зависящим не просто от времени t , а от разных его масштабов, определенных через малый параметр ε : $T_m \equiv \varepsilon^m$, t

$$\xi(\Theta, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \varepsilon^m \xi^{(m)}(\Theta, T_0, T_1);$$

$$\psi(\mathbf{r}, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \varepsilon^m \psi^{(m)}(r, \Theta, T_0, T_1);$$

$$\Phi_{\text{ex}}(\mathbf{r}, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \varepsilon^m \Phi_{\text{ex}}^{(m)}(r, \Theta, T_0, T_1);$$

$$\Phi_{\text{in}}(\mathbf{r}, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \varepsilon^m \Phi_{\text{in}}^{(m)}(r, \Theta, T_0, T_1). \quad (14)$$

Решение гидродинамической части задачи проводится аналогично решению задачи [9,10] о колебаниях поверхности заряженной капли идеально проводящей жидкости. Отличие заключается в наложении дополнительного условия неподвижности центра масс в начальный и все последующие моменты времени (11), которое определяет в итоге амплитуду первой моды в начальный момент времени (13) в разложении (12) и эволюцию этой моды со временем (см. (19), (32)). Электрическая часть решаемой задачи подробно разобрана в Приложении А.

Ограничимся рассмотрением поставленной задачи в приближении до второго порядка малости включительно, в рамках которого можно определить зависимость искомых величин от двух временных масштабов T_0 и T_1 .

Подставляя разложения (14) в систему (2)–(11) и приравнявая слагаемые, содержащие одинаковую степень параметра ε , получим набор краевых задач для определения функций $\xi^{(m)}$, $\Psi^{(m)}$, $\Phi_{\text{ex}}^{(m)}$, $\Phi_{\text{in}}^{(m)}$.

Очевидно, что линейным уравнениям (2), (3) должна удовлетворять каждая из функций $\Psi^{(m)}$, $\Phi_{\text{ex}}^{(m)}$, $\Phi_{\text{in}}^{(m)}$. Заметим только, что в силу используемой модели „вмороженного“ заряда потенциал $\Phi_{\text{in}}^{(0)}$ является решением уравнения Пуассона (3), в то время как для определения $\Phi_{\text{in}}^{(1)}$ и $\Phi_{\text{in}}^{(2)}$ будем иметь однородное уравнение Лапласа.

В нулевом приближении получим решение, соответствующее равновесной диэлектрической капле сферической формы с легко вычисляющимися значениями электрических потенциалов нулевого порядка малости $\Phi_{\text{in}}^{(0)}$ и $\Phi_{\text{ex}}^{(0)}$ (см. Приложение А).

4. Решения уравнений (2), (3) для функций первого и второго порядков малости, удовлетворяющие условиям ограниченности (4), (5), запишем в виде

$$\Psi^{(m)}(r, \Theta, T_0, T_1) = \sum_{n=1}^{\infty} (T_0, T_1) r^n P_n(\mu); \quad m = 1, 2;$$

$$\Phi_{\text{ex}}^{(m)}(r, \Theta, T_0, T_1) = \sum_{n=0}^{\infty} F_n^{(m, \text{ex})}(T_0, T_1) r^{-(n+1)} P_n(\mu);$$

$$\Phi_{\text{in}}^{(m)}(r, \Theta, T_0, T_1) = \sum_{n=0}^{\infty} F_n^{(m, \text{in})}(T_0, T_1) r^n P_n(\mu). \quad (15)$$

Последовательные поправки к равновесной поверхности капли также представим в виде разложений по полиномам Лежандра

$$xi^{(m)}(\Theta, T_0, T_1) = \sum_{n=0}^{\infty} M_n^{(m)}(T_0, T_1) P_n(\mu); \quad m = 1, 2. \quad (16)$$

Подставляя решения (15), (16) при $m = 1$ в систему граничных условий первого порядка малости, полученную из (6)–(9), после соответствующих преобразований получим дифференциальные уравнения относительно коэффициентов $M_n^{(1)}(T_0, T_1)$

$$\frac{\partial^2 M_n^{(1)}(T_0, T_1)}{\partial T_0^2} + \omega_n^2 M_n^{(1)}(T_0, T_1) = 0;$$

$$\omega_n^2 \equiv n(n-1)[(n+2) - W \cdot \kappa_1(n, \varepsilon_d)]; \quad W = \frac{Q^2}{4\pi};$$

$$\kappa_1(n, \varepsilon_d) \equiv \frac{n\varepsilon_d^2 - (2n-5)\varepsilon_d + (n+1)}{\varepsilon_d(n\varepsilon_d + n+1)}. \quad (17)$$

Решением уравнений (17) являются гармонические функции с коэффициентами, зависящими от времени T_1 ,

$$M_n^{(1)}(T_0, T_1) = A_n^{(1)}(T_1) \exp(i\omega_n T_0) + \text{к.с.}; \quad n \geq 2;$$

$$A_n^{(1)}(T_1) = a_n^{(1)}(T_1) \exp(ib_n^{(1)}(T_1)). \quad (18)$$

Здесь и далее аббревиатура „к.с.“ обозначает слагаемые, комплексно сопряженные к выписанным; $a_n^{(1)}(T_1)$ и $b_n^{(1)}(T_1)$ — вещественные функции, зависимость которых от времени T_1 может быть определена только при рассмотрении задачи следующего порядка малости.

Из условий (10), (11), записанных в линейном по малой величине ε приближении, следует, что

$$M_0^{(1)}(T_0, T_1) = 0; \quad M_1^{(1)}(T_0, T_1) = 0. \quad (19)$$

Отметим, что формально выражения (19) не противостоят уравнениям (17) для $n = 0$ и $n = 1$.

Удовлетворяя начальным условиям (12) в первом приближении по ε , получим

$$a_i^{(1)}(0) = \frac{1}{2} h_i; \quad b_i^{(1)}(0) = 0; \quad i \in \Xi;$$

$$a_n^{(1)}(0) = 0; \quad b_n^{(1)}(0) \text{ — произвольно}; \quad n \notin \Xi. \quad (20)$$

Решения первого порядка (18), (19) и решения (15), (16) при $m = 2$ подставим в полученную из (6)–(9) систему граничных условий второго порядка малости и после гораздо более громоздких преобразований запишем

уравнение относительно коэффициентов $M_n^{(2)}(T_0, T_1)$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 M_n^{(2)}(T_0, T_1)}{\partial T^2} + \omega_n^2 M_n^{(2)}(T_0, T_1) = & -2i\omega_n \frac{dA_n^{(1)}(T_1)}{dT_1} \\ & \times \exp(i\omega_n T_0) + \sum_{l=2}^{\infty} \sum_{m=2}^{\infty} \left\{ [\gamma_{lmn} + \omega_l \omega_m \eta_{lmn}] A_l^{(1)}(T_1) A_m^{(1)}(T_1) \right. \\ & \times \exp[i(\omega_l + \omega_m) T_0] + [\gamma_{lmn} - \omega_l \omega_m \eta_{lmn}] A_l^{(1)}(T_1) \overline{A_m^{(1)}(T_1)} \\ & \left. \times \exp[i(\omega_l - \omega_m) T_0] \right\} + \text{к.с.} \end{aligned} \quad (21)$$

Здесь и далее горизонтальная черта сверху означает комплексное сопряжение. Выражения для γ_{lmn} и η_{lmn} приведены в Приложении Б.

Согласно общей методике [12], чтобы выписать равномерно пригодное решение уравнения (21), необходимо соответствующим выбором функций $A_n^{(1)}(T_1)$ из правой его части удалить слагаемые, приводящие к появлению в решениях секулярных членов и членов с малыми знаменателями. Условие исключения этих слагаемых позволяет определить вид функций $A_n^{(1)}(T_1)$, т.е. зависимость решения первого порядка малости $M_n^{(1)}(T_0, T_1)$ от медленного времени T_1 .

Напомним, что в частном решении неоднородного уравнения (21) источником дефектов типа секулярных членов и малых знаменателей являются слагаемые в функции неоднородности, изменяющиеся во времени T_0 с частотой, равной собственной частоте решения соответствующего однородного уравнения ω_n .

5. Из вида правой части (21) можно заметить, что если для каких-либо трех мод колебаний поверхности капли с номерами p, q, k выполняется одно из соотношений

$$\omega_p + \omega_q = \omega_k; \quad \omega_p - \omega_q = \omega_k, \quad (22)$$

то эти моды вступают в резонансное взаимодействие, при этом говорят о вторичном комбинационном резонансе.

Заметим, что, согласно (17), значения частот собственных колебаний поверхности капли ω_n зависят от диэлектрической проницаемости жидкости ε_d и величины заряда на капле (параметра W). Причем при значении $W_{cr} = 4/\kappa_1(2, \varepsilon_d)$ частота колебаний основной моды (с $n = 2$) обращается в нуль, что соответствует потере поверхностью капли устойчивости. Это значит, что вторичные резонансы могут проявляться только в том случае, если соотношения (22) выполняются при $W < W_{cr}$. В работе [1] был обнаружен один резонанс подобного типа для случая, когда $\omega_6 = 2\omega_4$.

Численные расчеты по формулам (22) показывают, что в капле возможно возбуждение большого количества вторичных резонансов. Так, значения параметра W , при которых выполняется соотношение $\omega_3 = \omega_p - \omega_q$ для различных значений p и q , не превышающих 10, при $\varepsilon_d = 5$, $W_{cr} = 4.004$ приведены в табл. 1, а при

Таблица 1, 2. Номера мод ($q, p \leq 10$), возбужденных в начальный момент времени, и величина параметра W , характеризующего заряд капли, при которых имеет место резонансная раскачка третьей моды

$\varepsilon_d = 5, W_{cr} = 4.483$			$\varepsilon_d = 1000, W_{cr} = 4.004$		
q	p	Q	q	p	W
4	5	4.355	4	5	3.623
5	6	3.867	5	6	3.210
6	7	3.361	6	7	2.785
7	8	2.847	7	8	2.356
8	9	2.328	8	9	1.925
9	10	1.807	9	10	1.493

Таблица 3, 4. То же, что в табл. 1, 2, в случае раскачки четвертой моды

$\varepsilon_d = 5, W_{cr} = 4.483$			$\varepsilon_d = 1000, W_{cr} = 4.004$		
q	p	Q	q	p	W
3	5	4.355	3	5	3.623
4	6	3.248	4	6	2.671
5	7	2.018	5	7	1.651
6	8	0.750	6	8	0.612

$\varepsilon_d = 1000, W_{cr} = 4.483$ — в табл. 2. Аналогичные данные для соотношения $\omega_4 = \omega_p - \omega_q$ приведены в табл. 3 и 4. Следует отметить, что все полученные решения в формальном предельном переходе $\varepsilon_d \rightarrow \infty$ сводятся к решениям аналогичной задачи для идеально проводящей поверхностно заряженной капли с полным зарядом Q . Поэтому данные, представленные в табл. 2 и 4 при $\varepsilon_d = 1000$ можно считать справедливыми для проводящей капли.

В нижеследующем исследовании уравнения (21) ограничимся рассмотрением ситуации, когда для мод p, q и k выполняется разностное соотношение $\omega_p - \omega_q = \omega_k$ и $p > q$, поскольку очевидно, что случай суммарного резонансного соотношения может быть получен из разностного путем переноса частоты ω_q в правую его часть с соответствующим переобозначением индексов: $p \rightarrow k, k \rightarrow p$.

Проанализируем по отдельности четыре возможных случая: $n \neq k, p, q; n = k; n = p; n = q$, в каждом из которых условие исключения секулярных членов и членов с малыми знаменателями из решения уравнения (21) будет различным.

Для случая $n \neq k, p, q$, когда мода n не связана никаким резонансным соотношением, это условие имеет наиболее простой вид

$$\frac{dA_n^{(1)}(T_1)}{dT_1} = 0.$$

Из этого равенства, используя выражение для $A_n^{(1)}(T_1)$ через скалярные функции $a_n^{(1)}(T_1)$ и $b_n^{(1)}(T_1)$ (18) и

требуя обращения в нуль действительной и мнимой частей, несложно получить

$$\frac{da_n^{(1)}(T_1)}{dT_1} = \frac{db_n^{(1)}(T_1)}{dT_1} = 0.$$

Это означает, что $a_n^{(1)}$ и $b_n^{(1)}$ не зависят от медленного времени T_1 и в рамках рассмотрения задачи с учетом лишь второго порядка малости их можно считать константами, равными своим начальным значениям (20). Выражение (18) для коэффициентов первого порядка малости $M_n^{(1)}(t)$ в разложении возмущения формы равновесной поверхности $\xi^{(1)}(\Theta, t)$ в ряд по полиномам Лежандра (16) примет вид

$$M_n^{(1)}(t) = \delta_{n,i} h_i \cos(\omega_i t); \quad i \in \mathbb{E}; \quad n \neq k, p, q, \quad (23)$$

$\delta_{n,i}$ — дельта-символ Кронекера.

При анализе уравнения (21) для мод с $n = k, p, q$, чтобы отразить близость комбинации частот $\omega_p - \omega_q$ к частоте ω_k , введем параметр расстройки $\sigma \sim O(1)$, определяемый соотношением

$$\omega_p - \omega_q = \omega_k + \varepsilon\sigma.$$

При этом в правой части уравнения (21) для рассматриваемых случаев появятся слагаемые, содержащие следующие множители:

$$\begin{aligned} \exp[i(\omega_p - \omega_q)T_0] &= \exp[i(\omega_k + \varepsilon\sigma)T_0] \\ &= \exp[i\sigma T_1] \exp[i\omega_k T_0]; \\ \exp[i(\omega_k + \omega_q)T_0] &= \exp[i(\omega_p - \varepsilon\sigma)T_0] \\ &= \exp[-i\sigma T_1] \exp[i\omega_p T_0]; \\ \exp[i(\omega_p - \omega_k)T_0] &= \exp[i(\omega_q + \varepsilon\sigma)T_0] \\ &= \exp[i\sigma T_1] \exp[i\omega_q T_0] \end{aligned}$$

и условия исключения секулярных членов из решений уравнения (21) для $n = k, p, q$ запишутся в виде

$$\begin{aligned} -2i\omega_k \frac{dA_k^{(1)}(T_1)}{dT_1} + \Lambda_{pqk}^{(-)} \exp[i\sigma T_1] A_p^{(1)}(T_1) \overline{A_q^{(1)}(T_1)} &= 0; \\ -2i\omega_p \frac{dA_p^{(1)}(T_1)}{dT_1} + \Lambda_{kqp}^{(+)} \exp[-i\sigma T_1] A_k^{(1)}(T_1) A_q^{(1)}(T_1) &= 0; \\ -2i\omega_q \frac{dA_q^{(1)}(T_1)}{dT_1} + \Lambda_{pkq}^{(-)} \exp[i\sigma T_1] A_p^{(1)}(T_1) \overline{A_k^{(1)}(T_1)} &= 0; \\ \Lambda_{pqk}^{(\pm)} &= (\gamma_{pqk} + \gamma_{qpk}) \pm \omega_p \omega_q (\eta_{pqk} + \eta_{qpk}). \end{aligned} \quad (24)$$

Приравнявая нулю действительную и мнимую части выражений (24) и вводя новую функцию

$$\beta_k^{(1)}(T_1) = \sigma T_1 - b_k^{(1)}(T_1), \quad (25)$$

получим систему дифференциальных уравнений относительно вещественных функций $a_k^{(1)}(T_1), \beta_k^{(1)}(T_1), a_p^{(1)}(T_1), b_p^{(1)}(T_1), a_q^{(1)}(T_1), b_q^{(1)}(T_1)$

$$2\omega_k \frac{da_k^{(1)}(T_1)}{dT_1} = \Lambda_{pqk}^{(-)} a_p^{(1)}(T_1) a_q^{(1)}(T_1) \sin[\varphi_{kpq}^{(1)}(T_1)];$$

$$2\omega_k \cdot a_k^{(1)}(T_1) \frac{d\beta_k^{(1)}(T_1)}{dT_1} = 2\omega_k a_k^{(1)}(T_1) \sigma + \Lambda_{pqk}^{(-)} a_p^{(1)}(T_1) a_q^{(1)}(T_1) \cos[\varphi_{kpq}^{(1)}(T_1)];$$

$$2\omega_p \frac{da_p^{(1)}(T_1)}{dT_1} = -\Lambda_{kqp}^{(+)} a_k^{(1)}(T_1) a_q^{(1)}(T_1) \sin[\varphi_{kpq}^{(1)}(T_1)];$$

$$2\omega_p \cdot a_p^{(1)}(T_1) \frac{db_p^{(1)}(T_1)}{dT_1} = -\Lambda_{kqp}^{(+)} a_k^{(1)}(T_1) a_q^{(1)}(T_1) \times \cos[\varphi_{kpq}^{(1)}(T_1)];$$

$$2\omega_q \frac{da_q^{(1)}(T_1)}{dT_1} = \Lambda_{pkq}^{(-)} a_p^{(1)}(T_1) a_k^{(1)}(T_1) \sin[\varphi_{kpq}^{(1)}(T_1)];$$

$$2\omega_q \cdot a_q^{(1)}(T_1) \frac{db_q^{(1)}(T_1)}{dT_1} = -\Lambda_{pkq}^{(-)} a_p^{(1)}(T_1) a_k^{(1)}(T_1) \times \cos[\varphi_{kpq}^{(1)}(T_1)];$$

$$\varphi_{kpq}^{(1)}(T_1) = \beta_k^{(1)}(T_1) + b_p^{(1)}(T_1) - b_q^{(1)}(T_1). \quad (26)$$

Начальными условиями для уравнений (26) служат соотношения (20), причем из требования непротиворечивости системы (26) при $t = 0$ получаем, что если какая-либо из мод k, p или q не присутствует в спектре изначально возбужденных мод Ξ , т.е. ее амплитуда в начальный момент времени равна нулю, то ее фаза при $t = 0$ не произвольна, а равна $\pi/2$. В итоге начальные условия для системы (26) можно записать в следующей компактной форме:

$$a_j^{(1)}(0) = \delta_{i,j} h_j / 2; \quad b_j^{(1)}(0) = \pm(1 - \delta_{i,j}) \cdot \pi / 2; \\ i \in \Xi; \quad j = k, p, q. \quad (27)$$

Коэффициенты первого порядка в разложении (16) для резонансно взаимодействующих мод k, p и q запишутся в виде (см. (18))

$$M_k^{(1)}(t) = 2a_k^{(1)}(\varepsilon t) \cos[(\omega_p - \omega_q)t - \beta_k^{(1)}(\varepsilon t)]; \\ M_p^{(1)}(t) = 2a_p^{(1)}(\varepsilon t) \cos[\omega_p t + b_p^{(1)}(\varepsilon t)]; \\ M_q^{(1)}(t) = 2a_q^{(1)}(\varepsilon t) \cos[\omega_q t + b_q^{(1)}(\varepsilon t)], \quad (28)$$

где коэффициенты $a_k^{(1)}, \beta_k^{(1)}, a_p^{(1)}, b_p^{(1)}, a_q^{(1)}, b_q^{(1)}$ являются решениями системы уравнений (26) с начальными условиями (27).

Отметим, что в используемом приближении (до второго порядка включительно) резонансное взаимодействие трех мод будет проявляться лишь том случае, когда

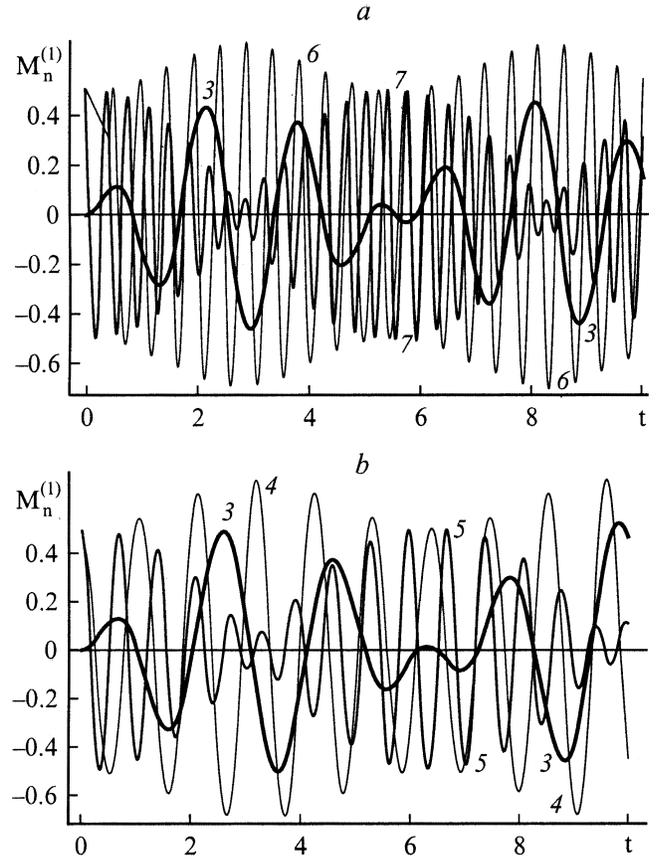


Рис. 1. Зависимости от безразмерного времени t безразмерных амплитуд $M_n^{(1)}$ резонансно взаимодействующих третьей, шестой и седьмой мод (*a*), третьей, четвертой и пятой мод (*b*) капиллярных осцилляций заряженной капли. Цифра у кривой совпадает с номером моды, различные моды выделены также интенсивностью линий.

хотя бы две из них присутствуют в спектре начально возбужденных мод Ξ , т.е. их амплитуды при $t = 0$ отличны от нуля. Третья же мода, даже имея нулевую начальную амплитуду, появится в спектре колебаний первого порядка малости, если ее номер удовлетворяет соотношениям вида (для случая $p, q \in \Xi, k \notin \Xi$) $p + q + k$ — четно; $|p - q| \leq k \leq p + q$, возникающим из требования, что коэффициенты $\Lambda_{pqk}^{(-)}, \Lambda_{kqp}^{(+)}, \Lambda_{pkq}^{(-)}$ в уравнениях (26) не равны нулю.

Результаты расчета при $\varepsilon_d = 5, \varepsilon = 0.3$ временной эволюции амплитуд первого порядка малости резонансно взаимодействующих третьей, шестой и седьмой мод (при $W = 3.361$) представлены на рис. 1, *a* и для третьей, четвертой и пятой мод (при $W = 4.355$) на рис. 1, *b*. Видно, что возбуждение отсутствовавшей в спектре начального возмущения третьей моды происходит за счет резонансной перекачки энергии из наиболее высокой моды. Расчеты показывают, что изменение диэлектрической проницаемости жидкости ε_d не сказывается существенным образом на характере резонансного межмодового взаимодействия.

Прежде чем выписывать решения уравнения (21), следует отметить, что в рамках расчетов второго порядка малости достаточно определить зависимость коэффициентов $M_n^{(2)}(t)$ от времени T_0 . Действительно, пренебрежение зависимостью $M_n^{(2)}(t)$ от медленного времени T_1 приводит к погрешности $\sim O(\varepsilon t)$, что в разложении (14) для $\xi(\Theta, t)$ соответствует погрешности $\sim O(\varepsilon^3 t)$, и, следовательно, на временных интервалах $t \sim O(1)$ не нарушает точности второго приближения. В этой связи, решая уравнение (21), будем полагать, что все функции, стоящие в правой части, не зависят от T_1 и равны своим начальным значениям.

Выбирая зависимость частного решения неоднородного уравнения (21) от T_0 в виде, аналогичном его правой части, и складывая полученное с общим решением соответствующего однородного уравнения, запишем общее решение неоднородного уравнения (21) для случая ($n \geq 2; n \neq p, q, k$) в виде

$$\begin{aligned} M_n^{(2)}(T_0) &= a_n^{(2)} \exp[i(\omega_n T_0 + b_n^{(2)})] \\ &+ \sum_{l=2}^{\infty} \sum_{m=2}^{\infty} \left\{ \lambda_{lmn}^{(+)} A_l^{(1)}(0) A_m^{(1)}(0) \exp[i(\omega_l + \omega_m) T_0] \right. \\ &\left. + \lambda_{lmn}^{(-)} A_l^{(1)}(0) \overline{A_m^{(1)}(0)} \exp[i(\omega_l - \omega_m) T_0] \right\} + \text{к. с.} \end{aligned} \quad (29)$$

Здесь $a_n^{(2)}$ и $b_n^{(2)}$ — вещественные константы, определяемые из начальных условий, а выражения для $\lambda_{lmn}^{(\pm)}$ приведены в Приложении Б.

Начальные условия (12) во втором порядке малости запишутся в виде

$$\begin{aligned} M_n^{(2)}(0) &= -\xi_0 \delta_{n,0} - \xi_1 \delta_{n,1}; \\ \frac{\partial M_n^{(2)}(0)}{\partial T_0} + \frac{\partial M_n^{(1)}(0)}{\partial T_1} &= 0. \end{aligned} \quad (30)$$

Подставляя в них решения (29) и (23), получим окончательное выражение для коэффициентов второго порядка малости в разложении (16)

$$\begin{aligned} M_n^{(2)}(t) &= \sum_{i \in \Xi} \sum_{j \in \Xi} h_i h_j \left\{ \lambda_{ijn}^{(+)} \cdot \sin \left[\frac{1}{2} (\omega_n + \omega_i + \omega_j) t \right] \right. \\ &\times \sin \left[\frac{1}{2} (\omega_n - \omega_i - \omega_j) t \right] + \lambda_{ijn}^{(-)} \cdot \sin \left[\frac{1}{2} (\omega_n + \omega_i - \omega_j) t \right] \\ &\left. \times \sin \left[\frac{1}{2} (\omega_n - \omega_i + \omega_j) t \right] \right\}; \quad n \geq 2; \quad n \neq p, q, k. \end{aligned} \quad (31)$$

Эволюция во времени нулевой $n = 0$ и первой $n = 1$ мод определяется требованиями (10) и (11), записывая которые для второго порядка малости, несложно получить

$$\begin{aligned} M_0^{(2)}(t) &= -\frac{1}{2} \sum_{i \in \Xi} \frac{h_i^2}{(2i+1)} (1 + \cos(2\omega_i t)); \\ M_1^{(2)}(t) &= -\sum_{i \in \Xi} \frac{9i h_{i-1} h_i}{(2i-1)(2i+1)} \cos(\omega_i t) \cdot \cos(\omega_{i-1} t). \end{aligned} \quad (32)$$

Отметим, что выражения (32) не противоречат общему уравнению (21), в чем легко убедиться непосредственной подстановкой.

Решая уравнения (21) для значений $n = p, q$ или k , следует принимать во внимание, что в силу соотношений (24) из двойной суммы в правой части (21) исключены „опасные“ слагаемые. Чтобы это учесть, будем использовать следующее определение:

$$D_{lm}^{pq} \equiv (1 - \delta_{l,p} \delta_{m,q}) (1 - \delta_{l,q} \delta_{m,p}) \quad (33)$$

и общие решения для $n = k, p, q$ запишем в виде, аналогичном (29), но с дополнительными коэффициентами: D_{lm}^{pq} при $\lambda_{lmk}^{(-)}$ (для случая $n = k$); D_{lm}^{kq} при $\lambda_{lmp}^{(+)}$ (для случая $n = p$) и D_{lm}^{kp} при $\lambda_{lmp}^{(-)}$ (для случая $n = q$).

Выписанные общие решения будут содержать вещественные константы: $a_k^{(2)}, \beta_k^{(2)}, a_p^{(2)}, b_p^{(2)}, a_q^{(2)}, b_q^{(2)}$, определяемые из начальных условий (30).

Если все три резонансно взаимодействующие моды присутствуют в спектре изначально возбуждаемых мод: $(k, p, q) \in \Xi$, то, удовлетворяя начальным условиям (30), для временных коэффициентов второго порядка малости в разложении (16) получим выражения, аналогичные (31):

$$\begin{aligned} M_k^{(2)}(t) &= \sum_{i \in \Xi} \sum_{j \in \Xi} h_i h_j \left\{ \lambda_{ijk}^{(+)} \sin \left[\frac{1}{2} (\omega_p - \omega_q + \omega_i + \omega_j) t \right] \right. \\ &\times \sin \left[\frac{1}{2} (\omega_p - \omega_q - \omega_i - \omega_j) t \right] \\ &+ D_{ij}^{pq} \lambda_{ijk}^{(-)} \sin \left[\frac{1}{2} (\omega_p - \omega_q + \omega_i - \omega_j) t \right] \\ &\left. \times \sin \left[\frac{1}{2} (\omega_p - \omega_q - \omega_i + \omega_j) t \right] \right\}; \\ M_p^{(2)}(t) &= \sum_{i \in \Xi} \sum_{j \in \Xi} h_i h_j \left\{ D_{ij}^{kq} \lambda_{ijp}^{(+)} \cdot \sin \left[\frac{1}{2} (\omega_p + \omega_i + \omega_j) t \right] \right. \\ &\times \sin \left[\frac{1}{2} (\omega_p - \omega_i - \omega_j) t \right] \\ &+ \lambda_{ijp}^{(-)} \sin \left[\frac{1}{2} (\omega_p + \omega_i - \omega_j) t \right] \\ &\left. \times \sin \left[\frac{1}{2} (\omega_p - \omega_i + \omega_j) t \right] \right\}; \\ M_q^{(2)}(t) &= \sum_{i \in \Xi} \sum_{j \in \Xi} h_i h_j \left\{ \lambda_{ijq}^{(+)} \sin \left[\frac{1}{2} (\omega_q + \omega_i + \omega_j) t \right] \right. \\ &\times \sin \left[\frac{1}{2} (\omega_q - \omega_i - \omega_j) t \right] \\ &+ D_{ij}^{kp} \lambda_{ijq}^{(-)} \sin \left[\frac{1}{2} (\omega_q + \omega_i - \omega_j) t \right] \\ &\left. \times \sin \left[\frac{1}{2} (\omega_q - \omega_i + \omega_j) t \right] \right\}. \end{aligned} \quad (34)$$

Если же начальная амплитуда одной из резонансно взаимодействующих мод равна нулю, а две другие отличны от нуля, например $[p, q] \in \Xi, k \notin \Xi$, то коэффициенты $M_p^{(2)}(t)$ и $M_q^{(2)}(t)$ определяются выражениями (34), в то время как для k -й моды получим следующие соотношения:

$$M_k^{(2)}(t) = 2a_k^{(2)} \cos[(\omega_p - \omega_q)t - \beta_k^{(2)}] + \frac{1}{2} \sum_{i \in \Xi} \sum_{j \in \Xi} h_i h_j \left\{ \lambda_{ijk}^{(+)} \cos[(\omega_i + \omega_j)t] + D_{ij}^{pq} \lambda_{ijl}^{(-)} \cos[(\omega_i - \omega_j)t] \right\};$$

$$a_k^{(2)} = \left((\alpha_k^{(1)})^2 + (\alpha_k^{(2)})^2 \right)^{1/2}; \quad \text{tg } \beta_k^{(2)} = -\frac{\alpha_k^{(2)}}{\alpha_k^{(1)}};$$

$$\alpha_k^{(1)} \equiv \frac{1}{4} \sum_{i \in \Xi} \sum_{j \in \Xi} h_i h_j \left(\lambda_{ijk}^{(+)} + D_{ij}^{pq} \lambda_{ijl}^{(-)} \right);$$

$$\alpha_k^{(2)} \equiv \frac{h_p h_q}{8(\omega_p - \omega_q)^2} \Lambda_{pqk}^{(-)}. \quad (35)$$

Аналогичные выражения можно записать и для двух других возможных ситуаций: 1) $[k, q] \in \Xi, p \notin \Xi$; 2) $[k, p] \in \Xi, q \notin \Xi$. В первом случае

$$M_p^{(2)}(t) = 2a_p^{(2)} \cos[\omega_p t + b_p^{(2)}] + \frac{1}{2} \sum_{i \in \Xi} \sum_{j \in \Xi} h_i h_j \left\{ D_{ij}^{kq} \lambda_{ijp}^{(+)} \cos[(\omega_i + \omega_j)t] + \lambda_{ijp}^{(-)} \cos[(\omega_i - \omega_j)t] \right\}. \quad (36)$$

Во втором случае

$$M_q^{(2)}(t) = 2a_q^{(2)} \cos[\omega_p t + b_q^{(2)}] + \frac{1}{2} \sum_{i \in \Xi} \sum_{j \in \Xi} h_i h_j \left\{ \lambda_{ijp}^{(+)} \cos[(\omega_i + \omega_j)t] + D_{ij}^{kp} \cdot \lambda_{ijp}^{(-)} \cos[(\omega_i - \omega_j)t] \right\}.$$

$$a_m^{(2)} = \left((\alpha_m^{(1)})^2 + (\alpha_m^{(2)})^2 \right)^{1/2};$$

$$\text{tg } b_m^{(2)} = -\frac{\alpha_m^{(2)}}{\alpha_m^{(1)}}; \quad m = (p, q);$$

$$\alpha_p^{(1)} \equiv \frac{1}{4} \sum_{i \in \Xi} \sum_{j \in \Xi} h_i h_j \left(D_{ij}^{kq} \cdot \lambda_{ijp}^{(+)} + \lambda_{ijp}^{(-)} \right);$$

$$\alpha_p^{(2)} \equiv \frac{h_k h_q}{8\omega_p^2} \Lambda_{kqp}^{(+)};$$

$$\alpha_q^{(1)} \equiv \frac{1}{4} \sum_{i \in \Xi} \sum_{j \in \Xi} h_i h_j \left(\lambda_{ijq}^{(+)} + D_{ij}^{kp} \lambda_{ijq}^{(-)} \right);$$

$$\alpha_q^{(2)} \equiv \frac{h_k h_p}{8\omega_q^2} \Lambda_{pkq}^{(-)}. \quad (37)$$

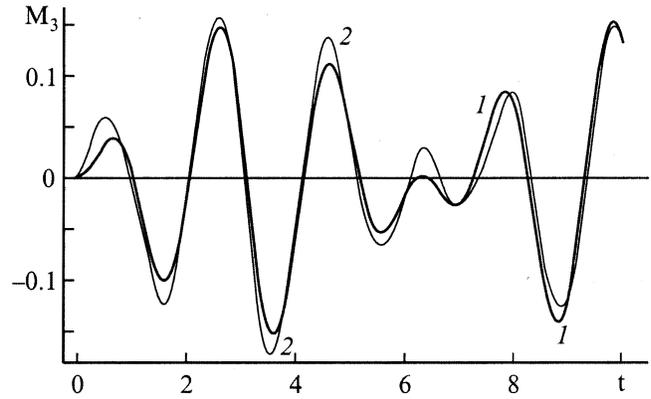


Рис. 2. Зависимости от времени амплитуды третьей моды, рассчитанные с точностью до первого (1) и второго (2) порядков малости.

Не выписанные здесь коэффициенты в обоих случаях определяются выражениями (34).

На рис. 2 приведены зависимости от времени амплитуды третьей моды, рассчитанные при $\varepsilon_d = 5, \varepsilon = 0.3$ и $W = 4.355$ с точностью до первого и второго порядков малости для резонансного взаимодействия третьей, четвертой и пятой мод. Несложно заметить, что учет второго порядка малости приводит лишь к незначительной добавке к амплитуде. Тем не менее еще раз напомним, что само резонансное взаимодействие мод капиллярных осцилляций капли есть нелинейный эффект, реализующийся лишь во втором порядке малости по амплитуде начального возмущения.

6. Рассмотрим отдельно случай, когда резонансно взаимодействуют только две моды, т.е. когда справедливо соотношение вида

$$\omega_k = 2\omega_p.$$

Проводя такой же анализ, как описано выше, получим для временных коэффициентов первого порядка малости в разложении (16)

$$M_k^{(1)}(t) = 2a_k^{(1)}(\varepsilon t) \cos[2\omega_k t - \beta_k^{(1)}(\varepsilon t)];$$

$$M_p^{(1)}(t) = 2a_p^{(1)}(\varepsilon t) \cos[\omega_p t + b_p^{(1)}(\varepsilon t)], \quad (38)$$

где вещественные функции $a_k^{(1)}(\varepsilon t), \beta_k^{(1)}(\varepsilon t), a_p^{(1)}(\varepsilon t), b_p^{(1)}(\varepsilon t)$ являются решениями системы дифференциальных уравнений

$$4\omega_k \frac{da_k^{(1)}(T_1)}{dT_1} = \Lambda_{ppk}^{(+)} \cdot [a_p^{(1)}(T_1)]^2 \cdot \sin[\varphi_{kp}^{(1)}(T_1)];$$

$$4\omega_k \cdot a_k^{(1)}(T_1) \frac{d\beta_k^{(1)}(T_1)}{dT_1} = 4\omega_k \cdot a_k^{(1)}(T_1) \cdot \sigma + \Lambda_{ppk}^{(+)} \cdot [a_p^{(1)}(T_1)]^2 \cdot \cos[\varphi_{kp}^{(1)}(T_1)];$$

$$2\omega_p \frac{da_p^{(1)}(T_1)}{dT_1} = -\Lambda_{kpp}^{(-)} \cdot a_k^{(1)}(T_1) \cdot a_p^{(1)}(T_1) \sin[\varphi_{kp}^{(1)}(T_1)];$$

$$\begin{aligned}
& 2\omega_p \cdot a_p^{(1)}(T_1) \frac{db_p^{(1)}(T_1)}{dT_1} \\
& = -\Lambda_{kpp}^{(1)} \cdot a_k^{(1)}(T_1) \cdot a_p^{(1)}(T_1) \cos[\varphi_{kp}^{(1)}(T_1)]; \\
& \varphi_{kp}^{(1)}(T_1) = \beta_k^{(1)}(T_1) + 2b_p^{(1)}(T_1). \quad (39)
\end{aligned}$$

Из соотношений (20) следует, что для системы (39) возможны следующие комбинации начальных условий:

$$\begin{aligned}
[k, p] \in \Xi: \quad & a_k^{(1)}(0) = h_k/2; \quad \beta_k^{(1)}(0) = 0; \\
& a_p^{(1)}(0) = h_p/2, \quad b_p^{(1)}(0) = 0; \\
k \notin \Xi; \quad p \in \Xi: \quad & a_k^{(1)}(0) = 0; \quad \beta_k^{(1)}(0) = \pi/2; \\
& a_p^{(1)}(0) = h_p/2; \quad b_p^{(1)}(0) = 0.
\end{aligned}$$

В ситуации, когда $p \notin \Xi$, $k \in \Xi$ (т.е. $a_p^{(1)}(0) = 0$, $a_k^{(1)}(0) = h_k/2$), резонансное взаимодействие мод p и k в используемом приближении иметь места не будет, так как из системы (39) при $t = 0$ получим, что

$$\frac{da_k^{(1)}(0)}{dT_1} = \frac{da_p^{(1)}(0)}{dT_1} = 0,$$

т.е. амплитуды $a_p^{(1)}$ и $a_k^{(1)}$ сохраняют свои начальные значения.

На рис. 3 представлены временные зависимости амплитуд резонансно взаимодействующих четвертой и шестой мод, рассчитанные при $\varepsilon_d = 5$, $\varepsilon = 0.3$ и $W = 3.248$ для двух видов начальных условий: а) когда обе моды присутствуют в спектре начального возмущения; б) когда в начальный момент времени возбуждена только четвертая мода, а шестая в начальный момент времени имеет нулевую амплитуду. При начальном возбуждении только шестой моды резонансная раскачка амплитуды четвертой моды места не имеет [8]. Как упоминалось выше, этот резонанс был обнаружен в работе [1], но он не является единственным двухмодовым резонансом при докритическом значении параметра W . Так, при $\varepsilon_d = 5$, $W = 3.607$ реализуется двухмодовое резонансное взаимодействие 9-й и 14-й мод ($\omega_{14} = 2 \cdot \omega_9$).

Во втором порядке малости при двухмодовом резонансе в случае, если $[k, p] \in \Xi$, получим следующие выражения:

$$\begin{aligned}
M_k^{(2)}(t) &= \sum_{i \in \Xi} \sum_{j \in \Xi} h_i h_j \left\{ D_{ij}^{pp} \cdot \lambda_{ijk}^{(+)} \sin \left[\frac{1}{2} (2\omega_p + \omega_i + \omega_j)t \right] \right. \\
&\times \sin \left[\frac{1}{2} (2\omega_p - \omega_i - \omega_j)t \right] + \lambda_{ijk}^{(-)} \sin \left[\frac{1}{2} (2\omega_p + \omega_i - \omega_j)t \right] \\
&\times \left. \sin \left[\frac{1}{2} (2\omega_p - \omega_i + \omega_j)t \right] \right\}; \\
M_p^{(2)}(t) &= \sum_{i \in \Xi} \sum_{j \in \Xi} h_i h_j \left\{ \lambda_{ijp}^{(+)} \sin \left[\frac{1}{2} (\omega_p + \omega_i + \omega_j)t \right] \right. \\
&\times \sin \left[\frac{1}{2} (\omega_p - \omega_i - \omega_j)t \right] + D_{ij}^{kp} \lambda_{ijp}^{(-)} \sin \left[\frac{1}{2} (\omega_p + \omega_i - \omega_j)t \right] \\
&\times \left. \sin \left[\frac{1}{2} (\omega_p - \omega_i + \omega_j)t \right] \right\}. \quad (40)
\end{aligned}$$

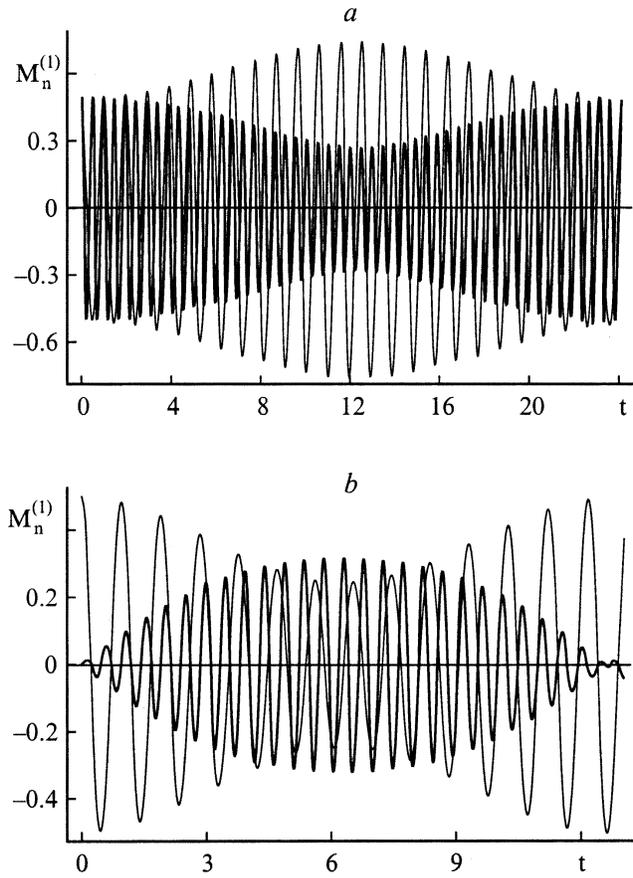


Рис. 3. Те же зависимости, что и на рис. 1, для двухмодового взаимодействия четвертой и шестой моды: *a* — изначально возбуждена четвертая и шестая мода; *b* — изначально возбуждена только четвертая мода. Тонкая линия — четвертая мода, жирная линия — шестая мода.

Если мода k не присутствует в спектре начального возмущения ($k \notin \Xi$, $p \in \Xi$), то для временно́го коэффициента второго порядка малости в разложении (16) для этой моды вместо (40) получим:

$$\begin{aligned}
M_k^{(2)}(t) &= 2a_k^{(2)} \cos[2\omega_p(t) - \beta_k^{(2)}] \\
&+ \frac{1}{2} \sum_{i \in \Xi} \sum_{j \in \Xi} h_i h_j \left\{ D_{ij}^{pp} \lambda_{ijk}^{(+)} \cos[(\omega_i + \omega_j)t] \right. \\
&\left. + \lambda_{ijk}^{(-)} \cos[(\omega_i - \omega_j)t] \right\}; \\
a_k^{(2)} &= \left((\alpha_k^{(1)})^2 + (\alpha_k^{(2)})^2 \right)^{1/2}; \quad \text{tg } \beta_k^{(2)} = -\frac{\alpha_k^{(2)}}{\alpha_k^{(1)}}; \\
\alpha_k^{(1)} &\equiv \frac{1}{4} \sum_{i \in \Xi} \sum_{j \in \Xi} h_i h_j \left(D_{ij}^{pp} \lambda_{ijk}^{(+)} + \lambda_{ijk}^{(-)} \right); \\
\alpha_k^{(2)} &\equiv \frac{h_p^2}{64\omega_p^2} \Lambda_{ppk}^{(+)}. \quad (41)
\end{aligned}$$

7. Подводя итог проделанному выше анализу, запишем выражение для изменения во времени формы поверхности капли с точностью до слагаемых второго порядка малости по амплитуде начального возмущения ε в следующем виде (см. (1), (14), (16)):

$$r(\Theta, t) \approx 1 + \varepsilon \left\{ \sum_{i \in \mathcal{R}} M_i^{(1)} P_i(\mu) \right\} + \varepsilon^2 \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} M_n^{(2)}(t) P_n(\mu) \right\} + O(\varepsilon^3), \quad (42)$$

где \mathcal{R} обозначает множество номеров мод капиллярных колебаний поверхности, амплитуды которых имеют первый порядок малости по ε ; оно объединяет в себе множество Ξ номеров изначально (т.е. при $t = 0$) возбужденных мод (см. (12)) и номера мод, появившихся в результате резонансного межмодового взаимодействия. В выражении (42) амплитуды $M_i^{(1)}(t)$ определяют формулами (19), (23), а в случае наличия резонанса (28) или (38). Амплитуды $M_n^{(2)}(t)$ определяются выражениями (31), (32), а при резонансе формулами типа (34)–(37) или (40), (41) в зависимости от начальных условий и вида резонансного взаимодействия.

Таким образом, в линейном по амплитуде начального возмущения ε приближении форма поверхности капли определяется колебанием мод, присутствующих в спектре начального возмущения, и мод, возбужденных за счет резонансного взаимодействия. Собственные частоты колебаний ω_n зависят от величины диэлектрической проницаемости жидкости ε_d (17), увеличиваясь по мере уменьшения ε_d . Критическое значение параметра W (характеризующего заряд капли Q), при котором поверхность капли теряет устойчивость, определяется условием обращения в нуль частоты колебаний основной моды ($n = 2$): $W_{cr} = 0.25 \cdot \kappa_1(2, \varepsilon_d)$ и тоже растет с уменьшением ε_d . Таким образом, объемно заряженная диэлектрическая капля более устойчива по отношению к заряду, чем капля идеально проводящей жидкости с поверхностным распределением заряда.

Отметим, что выражения для амплитуд второго порядка малости $M_n^{(2)}(t)$ пропорциональны коэффициентам $\lambda_{ijn}^{(\pm)}$, которые в свою очередь выражаются через коэффициенты Клебша–Гордана [13] (см. Приложение Б). Это означает, что $\lambda_{ijn}^{(\pm)}$ отличны от нуля, только если индексы удовлетворяют соотношениям

$$|i - j| \leq n \leq i + j; \quad i + j + n = 2g, \quad (43)$$

где g целое число.

Поэтому количество мод, возбуждаемых в результате межмодового взаимодействия во втором порядке малости, определяется условиями (43), т.е. тем, что коэффициенты $\lambda_{iin}^{(\pm)}$ и $\lambda_{jjn}^{(\pm)}$ в выражениях (31) отличны от нуля лишь для четных значений n , принадлежащих диапазонам $[0, 2i]$ и $[0, 2j]$ соответственно, а $\lambda_{ijn}^{(\pm)}$

и $\lambda_{ijn}^{(\pm)}$ — для значений n из диапазона $[|i - j|, (i + j)]$, удовлетворяющих условию, что $n + i + j$ четное. Поэтому при одновременном возбуждении двух мод, четной и нечетной (с номерами p и q), в результате их взаимодействия будут генерироваться колебания всех четных мод из диапазона $[0; \max(2p, 2q)]$ и всех нечетных мод из диапазона $[|p - q|, (p + q)]$. При начальном возбуждении двух четных, либо двух нечетных мод во втором порядке малости проявится возмущение только четных мод из диапазона $[0; \max(2p, 2q)]$.

Как уже отмечалось выше, сказанное относится и ко вторичным резонансам. Если одна из мод, связанных резонансным соотношением типа (22) (например, мода k), не присутствует в спектре начально возбужденных мод ($k \in \Xi$), то резонансное ее возбуждение возможно при условии, что номера взаимодействующих мод k , p и q удовлетворяют соотношениям, аналогичным (43),

$$|p - q| \leq k \leq p + q; \quad p + q + k = 2g.$$

Из выражения (32) также следует, что если в спектре мод, описывающих начальное возмущение поверхности, присутствуют две соседние колебательные моды, четная и нечетная, то амплитуда первой моды будет отлична от нуля в приближении второго порядка малости. Это обеспечивает неподвижность центра масс при $t \geq 0$ и его позиционирование в начале системы координат путем компенсации того смещения центра масс капли, которое вызвано возбуждением двух соседних колебательных мод.

Заключение

Исследование нелинейной динамики поверхности невязкой объемно заряженной диэлектрической капли при произвольной начальной деформации равновесной сферической формы показало, что количество возможных резонансов, реализующихся за счет трехмодового взаимодействия, при докритическом заряде капли неограниченно велико; в результате резонансного взаимодействия мод имеет место перекачка энергии из высоких мод в низкие, приводя к увеличению амплитуд низких мод, что может привести к снижению устойчивости капли по отношению к собственному заряду; наименьшая мода, возбуждаемая в результате резонансного взаимодействия с высокими модами — третья; нелинейное взаимодействие мод — эффект второго порядка малости, но приводит к росту амплитуды раскачиваемой моды (даже если в начальный момент времени она имела нулевую амплитуду) до величины первого порядка малости.

Возможный механизм распада заряженной капли при малой величине собственного заряда (докритической в смысле линейной устойчивости) может быть связан с нелинейной резонансной перекачкой энергии капиллярных осцилляций капли из высоких мод в низкие.

Приложение А. Вывод выражения для давления электрического поля собственного заряда капли.

Задача, определяющая электростатические потенциалы внутри $\Phi_{\text{in}}(\mathbf{r}, t)$ и вне $\Phi_{\text{ex}}(\mathbf{r}, t)$ капли, необходимые для записи давления электрического поля на поверхность капли в динамическом граничном условии (7), состоит из уравнений (3) и граничных условий (5), (8) и (9). Подставляя в них разложения (14) и требуя выполнения этих уравнений для каждого из порядков малости, получим краевые задачи для определения функций $\Phi_{\text{in}}^{(m)}$ и $\Phi_{\text{ex}}^{(m)}$, где $m = 0, 1, 2$.

Поскольку очевидно, что в нулевом приближении решение обладает центральной симметрией, то уравнение Лапласа и Пуассона (3) для $\Phi_{\text{in}}^{(0)}$ и $\Phi_{\text{ex}}^{(0)}$ превращаются в обыкновенные дифференциальные уравнения второго порядка, решения которых ищутся в виде $\sim C \cdot r^s$. Удовлетворяя граничным условиям (8), (9) в нулевом порядке малости

$$r = 1: \quad \Phi_{\text{in}}^{(0)} = \Phi_{\text{ex}}^{(0)}; \quad \varepsilon_d \frac{d\Phi_{\text{in}}^{(0)}}{dr} = \frac{d\Phi_{\text{ex}}^{(0)}}{dr},$$

получим

$$\Phi_{\text{ex}}^{(0)} = \frac{Q}{r} + \Phi_{\infty}; \quad \Phi_{\text{in}}^{(0)} = \frac{Q}{2\varepsilon} (2\varepsilon_d + 1 - r^2) + \Phi_{\infty}, \quad (\text{A1})$$

где Φ_{∞} — константа, равная принятому значению внешнего потенциала на бесконечности.

Все функции первого и второго порядков малости $\Phi_{\text{in}}^{(m)}$ и $\Phi_{\text{ex}}^{(m)}$, где $m = 1, 2$, являются решениями уравнений Лапласа и с учетом граничных условий (5) записываются в виде

$$\Phi_{\text{ex}}^{(m)}(r, \Theta, T_0, T_1) = \sum_{n=0}^{\infty} F_n^{(m, \text{ex})}(T_0, T_1) r^{-(n+1)} P_n(\mu);$$

$$\Phi_{\text{in}}^{(m)}(r, \Theta, T_0, T_1) = \sum_{n=0}^{\infty} F_n^{(m, \text{in})}(T_0, T_1) r^n P_n(\mu);$$

$$m = 1; 2. \quad (\text{A2})$$

Функции $\xi^{(m)}(\Theta, T_0, T_1)$ ($m = 1, 2$) в разложении (14), описывающие форму поверхности капли в первом и во втором приближении, также представим в виде рядов по полиномам Лежандра

$$\xi^{(m)}(\Theta, T_0, T_1) = \sum_{n=0}^{\infty} M_n^{(m)}(T_0, T_1) P_n(\mu). \quad (\text{A3})$$

Неизвестные функции времени $F_n^{(m, \text{ex})}(T_0, T_1)$ и $F_n^{(m, \text{in})}(T_0, T_1)$ в (A2) могут быть выражены через амплитуды $M_n^{(m)}(T_0, T_1)$ разложения (A3) с помощью условий (8) и (9) на свободной поверхности.

В приближении первого порядка эти условия примут вид

$$r = 1: \quad \Phi_{\text{in}}^{(1)} + \frac{d\Phi_{\text{in}}^{(0)}}{dr} \xi^{(1)} = \Phi_{\text{ex}}^{(1)} + \frac{d\Phi_{\text{ex}}^{(0)}}{dr} \xi^{(1)};$$

$$\varepsilon_d \left[\frac{\partial \Phi_{\text{in}}^{(1)}}{\partial r} + \frac{d^2 \Phi_{\text{in}}^{(0)}}{dr^2} \xi^{(1)} \right] = \frac{\partial \Phi_{\text{ex}}^{(1)}}{\partial r} + \frac{d^2 \Phi_{\text{ex}}^{(0)}}{dr^2} \xi^{(1)}.$$

Подставляя в них решения (A2) при $m = 1$, получим

$$F_n^{(1, \text{ex})}(T_0, T_1) = \kappa_1^{(\text{ex})}(n, \varepsilon_d) Q M_n^{(1)}(T_0, T_1);$$

$$F_n^{(1, \text{in})}(T_0, T_1) = -\kappa_1^{(\text{in})}(n, \varepsilon_d) Q M_n^{(1)}(T_0, T_1). \quad (\text{A4})$$

Выражения для коэффициентов $\kappa_1^{(\text{ex})}(n, \varepsilon_d)$ и $\kappa_1^{(\text{in})}(n, \varepsilon_d)$ приведены в Приложении Б.

Выписывая условия (8), (9) во втором порядке малости

$$r = 1: \quad \Phi_{\text{in}}^{(2)} + \frac{d\Phi_{\text{in}}^{(0)}}{dr} \xi^{(2)} + \frac{\partial \Phi_{\text{in}}^{(1)}}{\partial r} \xi^{(1)} + \frac{1}{2} \frac{d^2 \Phi_{\text{in}}^{(0)}}{dr^2} (\xi^{(1)})^2$$

$$= \Phi_{\text{ex}}^{(2)} + \frac{d\Phi_{\text{ex}}^{(0)}}{dr} \xi^{(2)} + \frac{\partial \Phi_{\text{ex}}^{(1)}}{\partial r} \xi^{(1)} + \frac{1}{2} \frac{d^2 \Phi_{\text{ex}}^{(0)}}{dr^2} (\xi^{(1)})^2;$$

$$\varepsilon_d \left[\frac{\partial \Phi_{\text{in}}^{(2)}}{\partial r} + \frac{d^2 \Phi_{\text{in}}^{(0)}}{dr^2} \xi^{(2)} + \frac{\partial^2 \Phi_{\text{in}}^{(1)}}{\partial r^2} \xi^{(1)} + \frac{1}{2} \frac{d^3 \Phi_{\text{in}}^{(0)}}{dr^3} (\xi^{(1)})^2 \right.$$

$$\left. - \frac{1}{2} \frac{d\Phi_{\text{in}}^{(0)}}{dr} \left(\frac{\partial \xi^{(1)}}{\partial \Theta} \right)^2 - \frac{\partial \Phi_{\text{in}}^{(1)}}{\partial \Theta} \frac{\partial \xi^{(1)}}{\partial \Theta} \right] = \frac{\partial \Phi_{\text{ex}}^{(2)}}{\partial r}$$

$$+ \frac{d^2 \Phi_{\text{ex}}^{(0)}}{dr^2} \xi^{(2)} + \frac{\partial^2 \Phi_{\text{ex}}^{(1)}}{\partial r^2} \xi^{(1)} + \frac{1}{2} \frac{d^3 \Phi_{\text{ex}}^{(0)}}{dr^3} (\xi^{(1)})^2$$

$$- \frac{1}{2} \frac{d\Phi_{\text{ex}}^{(0)}}{dr} \left(\frac{\partial \xi^{(1)}}{\partial \Theta} \right)^2 - \frac{\partial \Phi_{\text{ex}}^{(1)}}{\partial \Theta} \frac{\partial \xi^{(1)}}{\partial \Theta};$$

для функций $F_n^{(2, \text{ex})}$ и $F_n^{(2, \text{in})}$ в решении (A2) получим

$$F_n^{(2, \text{ex})}(T_0, T_1) = \frac{(n\varepsilon_d - n + 3)}{(n\varepsilon_d + n + 1)} Q M_n^{(2)}(T_0, T_1)$$

$$+ \sum_{i=2}^{\infty} \sum_{j=2}^{\infty} [K_{ijn} \kappa_2^{(\text{ex})}(i, n, \varepsilon_d) - \alpha_{ijn} \kappa_2(i, n, \varepsilon_d)]$$

$$\times Q M_i^{(1)}(T_0, T_1) M_j^{(1)}(T_0, T_1);$$

$$F_n^{(2, \text{in})}(T_0, T_1) = - \frac{[(n-2)\varepsilon_d - n - 1]}{\varepsilon_d(n\varepsilon_d + n + 1)} Q M_n^{(2)}(T_0, T_1)$$

$$+ \sum_{i=2}^{\infty} \sum_{j=2}^{\infty} [K_{ijn} \kappa_2^{(\text{in})}(i, n, \varepsilon_d) - \alpha_{ijn} \kappa_2(i, n, \varepsilon_d)]$$

$$\times Q M_i^{(1)}(T_0, T_1) M_j^{(1)}(T_0, T_1). \quad (\text{A5})$$

Все необходимые обозначения приведены в Приложении Б.

Давление электрического поля p_E на поверхность капли определяется суммой следующих слагаемых в динамическом граничном условии (7):

$$p_E = \left[-\mu_q \Phi_{in} + (\varepsilon_d - 1) \frac{1}{8\pi} (\nabla \Phi_{ex})^2 - \frac{(\varepsilon_d - 1)^2}{\varepsilon_d} \frac{1}{8\pi} (\mathbf{n} \cdot \nabla \Phi_{ex})^2 \right] \Big|_{r=1+\xi}. \quad (A6)$$

В выражении (A6) орт нормали \mathbf{n} к поверхности, форма которой определяется уравнением (1), с точностью до слагаемых второго порядка малости запишется в виде

$$\mathbf{n} \approx \mathbf{e}_r \left[1 - \frac{\varepsilon^2}{2} \left(\frac{\partial \xi^{(1)}}{\partial \Theta} \right)^2 \right] - \mathbf{e}_\Theta \left[\varepsilon \frac{\partial \xi^{(1)}}{\partial \Theta} + \varepsilon^2 \left(\frac{\partial \xi^{(2)}}{\partial \Theta} - \varepsilon^{(1)} \frac{\partial \xi^{(1)}}{\partial \Theta} \right) \right]. \quad (A7)$$

Проводя в (A6) разложение по малому параметру ε с учетом представлений (14), выражения (A7) запишем

$$p_E \approx \left\{ -\frac{3Q}{4\pi} \Phi_{in}^{(0)} + \frac{(\varepsilon_d - 1)}{\varepsilon_d} \frac{1}{8\pi} \left(\frac{d\Phi_{ex}^{(0)}}{dr} \right)^2 \right\}_{r=1} + \varepsilon \left\{ -\frac{3Q}{4\pi} \left[\Phi_{in}^{(1)} + \frac{d\Phi_{in}^{(0)}}{dr} \xi^{(1)} \right] + \frac{(\varepsilon_d - 1)}{\varepsilon_d} \frac{1}{4\pi} \times \frac{d\Phi_{ex}^{(0)}}{dr} \left[\frac{d\Phi_{ex}^{(1)}}{dr} + \frac{\partial^2 \Phi_{ex}^{(0)}}{\partial r^2} \xi^{(1)} \right] \right\}_{r=1} + \varepsilon^2 \left\{ -\frac{3Q}{4\pi} \times \left[\Phi_{in}^{(2)} + \frac{d\Phi_{in}^{(0)}}{dr} \xi^{(2)} + \frac{\partial \Phi_{in}^{(1)}}{\partial r} \xi^{(1)} + \frac{1}{2} \frac{d^2 \Phi_{in}^{(0)}}{dr^2} (\xi^{(1)})^2 \right] + \frac{(\varepsilon_d - 1)}{\varepsilon_d} \frac{1}{8\pi} \left[2 \frac{d\Phi_{ex}^{(0)}}{dr} \left(\frac{\partial \Phi_{ex}^{(2)}}{\partial r} + \frac{d^2 \Phi_{ex}^{(0)}}{dr^2} \xi^{(2)} \right) + 2 \left(\frac{d^2 \Phi_{ex}^{(0)}}{dr^2} \frac{\partial \Phi_{ex}^{(1)}}{\partial r} + \frac{d\Phi_{ex}^{(0)}}{dr} \frac{d^2 \Phi_{ex}^{(1)}}{dr^2} \right) \xi^{(1)} + \left(\frac{d\Phi_{ex}^{(0)}}{dr^2} \frac{d^3 \Phi_{ex}^{(0)}}{dr^3} + \frac{d^2 \Phi_{ex}^{(0)}}{dr^2} \frac{\partial^2 \Phi_{ex}^{(0)}}{\partial r^2} \right) (\xi^{(1)})^2 + \left(\frac{\partial \Phi_{ex}^{(1)}}{\partial r} \right)^2 + \varepsilon_d \left(\frac{\partial \Phi_{ex}^{(1)}}{\partial \Theta} \right)^2 + (\varepsilon_d - 1) \times \frac{\partial \Phi_{ex}^{(0)}}{\partial r} \left(2 \frac{\partial \Phi_{ex}^{(1)}}{\partial \Theta} + \frac{\partial \Phi_{ex}^{(0)}}{dr} \frac{d\xi^{(1)}}{d\Theta} \right) \frac{\partial \xi^{(1)}}{\partial \Theta} \right] \Big|_{r=1} + O(\varepsilon^3).$$

Подставляя решения (A1)–(A5), получим для давления электрического поля p_E окончательное выражение

$$p_E = -\mu_q (Q + \Phi_\infty) + \frac{Q^2}{8\pi} \frac{(\varepsilon_d - 1)}{\varepsilon_d} + \varepsilon_d \frac{Q^2}{8\pi} \times \sum_{n=0}^{\infty} 2(n-1) \kappa_1(n, \varepsilon_d) M_n^{(1)}(T_0, T_1) P_n(\mu) + \varepsilon^2 \frac{Q^2}{8\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ 2(n-1) \kappa_1(n, \varepsilon_d) M_n^{(2)}(T_0, T_1) + \sum_{i=2}^{\infty} \sum_{j=2}^{\infty} [K_{ijn} \kappa_3(i, j, n, \varepsilon_d) + \alpha_{ijn} \kappa_4(i, j, n, \varepsilon_d)] \times M_i^{(1)}(T_0, T_1) M_j^{(1)}(T_0, T_1) \right\} P_n(\mu) + O(\varepsilon^3).$$

Все недостающие определения приведены в Приложении Б.

Приложение Б. Коэффициенты, через которые выражается временная зависимость формы нелинейно осциллирующей капли (16).

$$\lambda_{ijn}^{(\pm)} \equiv [\gamma_{ijn} \pm \omega_i \omega_j \eta_{ijn}] [\omega_n^2 - (\omega_i \pm \omega_j)^2]^{-1};$$

$$\omega_n^2 \equiv n(n-1)[(n+2) - W \kappa_1(n, \varepsilon_d)]; \quad W \equiv \frac{Q^2}{4\pi};$$

$$\gamma_{ijn} \equiv K_{ijn} [\omega_i^2 \cdot (n-i+1) + 2n[j(j+1) - 1] + \kappa_3(i, j, n, \varepsilon_d) n \frac{W}{2}] + \alpha_{ijn} \left[\frac{1}{i} \omega_i^2 + \kappa_4(i, j, n, \varepsilon_d) \cdot n \frac{W}{2} \right];$$

$$\eta_{ijn} \equiv K_{ijn} \left(\frac{n}{2} - i + 1 \right) + \alpha_{ijn} \frac{1}{i} \left(1 + \frac{n}{2j} \right);$$

$$\kappa_1(n, \varepsilon_d) \equiv \frac{n \cdot \varepsilon_d^2 - (2n-5)\varepsilon_d + (n+1)}{\varepsilon_d(n\varepsilon_d + n + 1)};$$

$$\kappa_3(i, j, n, \varepsilon_d) \equiv \frac{1}{\varepsilon_d} \left\{ 2(n+1)(\varepsilon_d - 1) \cdot \kappa_2^{(ex)}(i, n, \varepsilon_d) + (i+1)(\varepsilon_d - 1) \cdot \kappa_1^{(ex)}(i, \varepsilon_d) [(j+1) \cdot \kappa_1^{(ex)}(j, \varepsilon_d) - 2(i+4)] - 6\varepsilon_d [\kappa_2^{(in)}(i, n, \varepsilon_d) - i \cdot \kappa_1^{(in)}(i, \varepsilon_d)] + 10\varepsilon_d - 7 \right\};$$

$$\kappa_4(i, j, n, \varepsilon_d) \equiv \frac{1}{\varepsilon_d} \left\{ 2[n+1 - (n-2)\varepsilon_d] \kappa_2(i, n, \varepsilon_d) + (\varepsilon_d - 1) [\kappa_1^{(ex)}(i, \varepsilon_d) (\varepsilon_d \cdot \kappa_1^{(ex)}(j, \varepsilon_d) - 2(\varepsilon_d - 1)) + \varepsilon_d - 1] \right\};$$

$$\kappa_1^{(in)}(n, \varepsilon_d) \equiv \frac{((n-2)\varepsilon_d - n - 1)}{\varepsilon_d(n\varepsilon_d + n + 1)};$$

$$\kappa_1^{(ex)}(n, \varepsilon_d) \equiv \frac{(n\varepsilon_d - n + 3)}{(n\varepsilon_d + n + 1)};$$

$$\kappa_2^{(\text{in})}(i, n, \varepsilon_d) \equiv \frac{1}{(n\varepsilon_d + n + 1)} \left\{ -(i+1)(n-i-1) \right. \\ \left. \times \kappa_1^{(\text{ex})}(j, \varepsilon_d) + i((i+1)\varepsilon_d + n + 1) \right. \\ \left. \times \kappa_1^{(\text{ex})}(i, \varepsilon_d) + \frac{1}{2\varepsilon_d} [2(n-2)\varepsilon_d + n + 1] \right\};$$

$$\kappa_2^{(\text{ex})}(i, n, \varepsilon_d) \equiv \frac{1}{(n\varepsilon_d + n + 1)} \left\{ (i+1)(n \cdot \varepsilon_d + i + 2) \right. \\ \left. \times \kappa_1^{(\text{ex})}(j, \varepsilon_d) + i(n-i+1) \cdot \varepsilon_d \cdot \kappa_1^{(\text{in})}(i, \varepsilon_d) \right. \\ \left. - \frac{1}{2} 2(n-2) \cdot \varepsilon_d + n + 6 \right\};$$

$$\kappa_2(i, n, \varepsilon_d) \equiv \frac{1}{(n\varepsilon_d + n + 1)} \left\{ \kappa_1^{(\text{ex})}(i, \varepsilon_d) + \varepsilon_d \cdot \kappa_1^{(\text{in})}(i, \varepsilon_d) \right\};$$

$$K_{ijn} \equiv [C_{i0j0}^{n0}]^2; \quad \alpha_{ijn} \equiv -\sqrt{i(i+1)j(j+1)} C_{i0j0}^{n0} C_{i(-1)j1}^{n0};$$

$$C_{i0j0}^{n0} \equiv \begin{cases} 0, & \text{если } i+j+n = 2g+1, \\ & \text{где } g \text{ — целое число;} \\ \frac{(-1)^{g-n} \sqrt{2n+1} g!}{(g-i)!(g-j)!(g-n)!} \left[\frac{(2g-2i)!(2g-2j)!(2g-2n)!}{(2g+1)!} \right]^{1/2}, & \\ & \text{если } i+j+n = 2g; \end{cases}$$

$$C_{i(-1)j1}^{n0} \equiv \sqrt{2n+1} n!$$

$$\times \left[\frac{(i+j-n)! i(i+1)}{(n+i-j)!(n-i+j)!(i+j+n+1)! j(j+1)} \right]^{1/2} \\ \times \sum_z \frac{(-1)^{i+1+z} (i+z-1)!(n+j-z+1)!}{z!(i-z+1)!(n-z)!(j-n+z-1)!}.$$

В последней сумме суммирование ведется по всем целым значениям z , для которых выражения под знаком факториала неотрицательны; C_{i0j0}^{n0} и $C_{i(-1)j1}^{n0}$ — коэффициенты Клебша–Гордана [13], которые отличны от нуля только, если нижние индексы удовлетворяют следующим соотношениям:

$$|i-j| \leq n \leq (i+j); \quad i+j+n = 2g \quad (g \text{ — целое число}).$$

Работа выполнена при поддержке гранта Президента РФ (№ 00-15-9925).

Список литературы

- [1] Tsamopoulos J.A., Brown R.A. // J. Fluid Mech. 1984. Vol. 147. P. 373–395.
- [2] Tsamopoulos J.A., Akylas T.R., Brown R.A. // Proc. Roy. Soc. London, 1985. Vol. A401. P. 67–88.
- [3] Basaran O.A., Scriven L.E. // Phys. Fluids A. 1989. Vol. 1. N 5. P. 795–798.
- [4] Natarayan R., Brown R.A. // Proc. Roy. Soc. London, 1987. Vol. A410. P. 209–227.
- [5] Pelekasis, Tsamopoulos J.A., Manolis G.D. // Phys. Fluids. 1990. Vol. 42. N 8. P. 1328–1340.
- [6] Feng Z.C. // J. Fluid Mech. 1997. Vol. 333. P. 1–21.

- [7] Белоножко Д.Ф., Григорьев А.И. // ЖТФ. 2000. Т. 70. Вып. 8. С. 45–52.
- [8] Ширяева С.О. // Письма в ЖТФ. 2000. Т. 26. Вып. 22. С. 76–83.
- [9] Ширяева С.О. // ЖТФ. 2001. Т. 71. Вып. 2. С. 27–35.
- [10] Ширяева С.О. // Изв. РАН. МЖГ. 2001. № 3. С. 163–174.
- [11] Ширяева С.О. // ЖТФ. 2002. Т. 72. Вып. 4. С. 15–22.
- [12] Найфе А.Х. Введение в методы возмущений. М.: Мир, 1984. 535 с.
- [13] Варшалович Д.А., Москалев А.Н., Херсонский В.К. Квантовая теория углового момента. Л.: Наука, 1975. 439 с.