01;03

Аналитическое решение обобщенной задачи Смолуховского с использованием нового модельного кинетического уравнения

© А.В. Латышев, А.А. Юшканов

Московский педагогический университет,
107005 Москва, Россия
e-mail: latyshev@orc.ru

(Поступило в Редакцию 14 февраля 2002 г.)

Предлагается новое кинетическое уравнение, приводящее к правильному числу Прандтля. На примере классической задачи Смолуховского о нахождении скачков температуры и концентрации развивается метод аналитического решения граничных полупространственных задач. Приводятся численные результаты, свидетельствующие о преемственности предлагаемого уравнения.

Введение. Вывод нового модельного уравнения

Скачок температуры на границе раздела газ–конденсированная фаза является одним из важнейших явлений в кинетической теории газов. Этот эффект оказывает существенное влияние на протекание различных физических процессов и требует учета при определении теплопроводности газов, при изучении динамики аэрозольных частиц и т. д.

Впервые это явление было рассмотрено Смолуховским, и до сих пор теоретическое изучение этого явления является актуальной задачей. Существуют различные теоретические методы изучения данного эффекта. Среди них особое место занимают методы получения аналитических решений. Это направление восходит к работе [1] и неизменно привлекает к себе пристальное внимание. Отметим также работы [2,3] и другие. До сих пор получены аналитические решения задачи Смолуховского для БГК модели (Бхатнагар, Гросс и Крук) [4] и для эллипсоидально-статистической модели [5] с постоянной частотой столкновений молекул. Кроме того, было получено аналитическое решение этой задачи для БГК модели с переменной (пропорциональной скорости молекул) частотой столкновений [6].

К задаче Смолуховского примыкает задача о слабом испарении газа с плоской поверхности. Под слабым понимается испарение со скоростями газа, много меньшими скорости звука. Эта задача также имеет многочисленные применения в проблемах тепло- и массообмена между газом и конденсированной фазой [3]. Отличается задача о слабом испарении от задачи Смолуховского лишь граничными условиями. Поэтому их удобно рассматривать вместе и называть обобщенной задачей Смолуховского.

Отметим, что БГК модель обладает тем известным недостатком, что число Прандтля, следующее из этой модели, отличается от реального. Для БГК модели с переменной частотой столкновений это отличие меньше, чем для БГК модели с постоянной частотой столкновений, но тем не менее отличие от реального числа Прандтля имеет место.

В то же время число Прандтля является важным параметром, характеризующим свойства газов. Поэтому актуальной и до сих пор не решенной задачей является получение аналитического решения задачи Смолуховского для кинетического уравнения с переменной частотой столкновений, в котором число Прандтля принимает правильное значение.

Рассмотрим построение модельного кинетического уравнения с переменной частотой столкновений, приводящего к правильному числу Прандтля. При этом ограничимся линеаризованным случаем, так как задача Смолуховского в классической постановке является линейной. В линеаризованном и стационарном случае функцию распределения можно представить в виде $f(\mathbf{r},\mathbf{v}) = f_0(1+\varphi(\mathbf{r},\mathbf{v}))$; f_0 — максвелловская функция распределения; $f_0 = n_s\beta^{3/2}\exp(-\beta v^2)$, $\beta = m/(2kT_s)$; T_s — температура поверхности; n_s — концентрация насыщенного пара при испарении с поверхности, соответствующей температуре T_s.

Стационарное линеаризованное кинетическое уравнение для φ в общем виде таково: $\mathbf{C}\nabla\varphi = J[\varphi]$, где $J[\varphi]$ — линеаризованный интеграл столкновений, $\mathbf{C} = \sqrt{\beta}\mathbf{v}$ — безразмерная скорость молекул. Для БГК уравнения с постоянной частотой столкновений ν линеаризованный интеграл столкновений имеет следующий вид:

$$J[\varphi] = \sqrt{\beta}\nu\left[2\mathbf{CU} + \frac{\delta n}{n_0} + \left(C^2 - \frac{3}{2}\right)\frac{\delta T}{T_0} - \varphi\right].$$

Здесь

$$\mathbf{U} = \pi^{-3/2}\int \exp(-C^2)\mathbf{C}\varphi d^3C,$$

$$\frac{\delta n}{n_0} = \pi^{-3/2}\int \exp(-C^2)\varphi d^3C,$$

$$\frac{\delta T}{T_0} = \frac{2}{3}\pi^{-3/2}\int \exp(-C^2)\left(C^2 - \frac{3}{2}\right)\varphi d^3C.$$

Для БГК уравнения с частотой столкновений, пропорциональной скорости молекул (и с постоянной длиной свободного пробега $\sim \nu_0^{-1}$), линеаризованный интеграл столкновений имеет вид [2,6]

$$J[\varphi] = \sqrt{\beta}\nu_0\left[\frac{3}{4}\sqrt{\pi}C\mathbf{C}\mathbf{U}_* + \frac{\sqrt{\pi}}{2}C\frac{\delta n_*}{n_0} + \frac{\sqrt{\pi}}{4}C(C^2-2)\frac{\delta T_*}{T_0} - C_\varphi\right].$$

Здесь

$$\mathbf{U}_* = \pi^{-3/2}\int C'\exp(-C'^2)\mathbf{C}'\varphi d^3C',$$

$$\frac{\delta n_*}{n_0} = \pi^{-3/2}\int C'\exp(-C'^2)\varphi d^3C',$$

$$\frac{\delta T_*}{T_0} = \pi^{-3/2}\int C'\exp(-C'^2)(C'^2-2)\varphi d^3C'.$$

Пропорциональность безразмерной скорости молекул C всех членов в последнем интеграле столкновений соответствует тому, что частота столкновений молекул пропорциональна скорости молекул.

Случаи постоянной частоты столкновений и частоты столкновений, пропорциональной скорости молекул, являются частными случаями. В общем случае частота столкновений является сложной функцией скорости молекул.

Рассмотрим простейшее нетривиальное обобщение рассмотренных интегралов столкновений, учитывающее возможность более сложной зависимости частоты столкновений от скорости молекул.

Возьмем следующий линеаризованный интеграл столкновений:

$$J[\varphi] = \sqrt{\beta}\nu_0\Big[2\alpha_{11}C\mathbf{C}\mathbf{U}_* + 2\alpha_{12}\mathbf{C}\mathbf{U}_* + 2\alpha_{21}C\mathbf{C}\mathbf{U} + 2\alpha_{22}\mathbf{C}\mathbf{U} + \frac{\sqrt{\pi}}{2}C\frac{\delta n_*}{n_0} + \frac{\pi}{4}C(C^2-2)\frac{\delta T_*}{T_0} - C\varphi\Big]. \quad (1)$$

В приведенном интеграле столкновений одна часть членов пропорциональна скорости молекул, вторая — нет. Это соответствует смешанной зависимости частоты столкновений от скорости молекул.

Интеграл столкновений должен удовлетворять следующему свойству [7]:

$$\int \exp(-C^2)\varphi J[\psi]d^3C = \int \exp(-C^2)\psi J[\varphi]d^3C, \quad (2)$$

где φ и ψ — произвольные функции молекулярной скорости.

Из свойства (2) следует симметрия коэффициентов $\alpha_{12} = \alpha_{21}$. Кроме того, интеграл столкновений (1) должен удовлетворять законам сохранения числа молекул, импульса и энергии [7]. Учет этих требований приводит к следующей системе уравнений:

$$\int \exp(-C^2)J[\varphi]\psi_j(\mathbf{C})d^3C = 0; \quad j = 0, 1, 2, 3, 4, \quad (3)$$

где ψ_j — инварианты столкновений, $\psi_0 = 1$, $(\psi_1, \psi_2, \psi_3) = \mathbf{C}$, $\psi_4 = C^2$.

Система (3) приводит к линейной связи между коэффициентами α_{ij}. Примем α_{22} за свободный параметр и обозначим его через a. Тогда остальные параметры выражаются через a следующим образом: $\alpha_{12} = \alpha_{21} = -2\alpha a$, $\alpha_{11} = 2\alpha(1+2\alpha a)$, $\alpha = 3\sqrt{\pi}/16$. Обозначим далее $a_1 = -2\alpha a$, $a_2 = 2\alpha(1+2\alpha a)$.

Таким образом, стационарное линеаризованное модельное кинетическое уравнение после введения безразмерной пространственной координаты, осуществляемой путем замены $x \to \nu_0 x$, имеет следующий вид:

$$\frac{\mathbf{C}}{C}(\nabla\varphi) + \varphi(\mathbf{r},\mathbf{C}) = \frac{1}{2\pi}\int \exp(-C'^2)C'k(\mathbf{C},\mathbf{C}')\varphi(\mathbf{r},\mathbf{C}')d^3C' \quad (4)$$

с ядром

$$k(\mathbf{C},\mathbf{C}') = 1 + \frac{1}{2}(C^2-2)(C'^2-2) + \frac{4\mathbf{C}\mathbf{C}'}{\sqrt{\pi}CC'}\left[a + a_1(C+C') + a_2CC'\right].$$

Параметр a связан с числом Прандтля соотношением

$$\Pr = \frac{8\alpha(1+2a)-2a}{9\alpha-2a(1-9\alpha^2)}.$$

При $a = 0$ из уравнения (4) в точности получается известное уравнение [2,6], которое является БГК уравнением с частотой столкновений, пропорциональной молекулярной скорости.

Наличие параметра a позволяет использовать модельное уравнение (4) в самых разнообразных проблемах, в частности в тех, где определяющим механизмом является теплопроводность, и в тех, где вязкость.

Пусть газ занимает полупространство $x > 0$ над плоскостью раздела газ–конденсированная фаза, с которой происходит испарение (конденсация) с постоянной скоростью u, а также теплообмен между конденсированной фазой и газом; вдали от плоскости задан постоянный градиент температуры K_t, ортогональный поверхности. Предположим, что градиент температуры мал, а скорость испарения (конденсации) мала по сравнению со скоростью звука, так что задача может быть рассмотрена в линейной постановке. Профили температуры и концентрации газа вне слоя Кнудсена имеют вид $T(x) = T_0 + K_t x$, $n(x) = n_0 - K_t x$. Скорость газа u вне слоя Кнудсена постоянна. Требуется найти величины $\varepsilon_t = T_0/T_s - 1$ и $\varepsilon_n = n_0/n_s - 1$, называемые (относительными) скачками температуры и концентрации. В линейном приближении $\varepsilon_t = T_t k_t + T_u U$, $\varepsilon_n = N_t k_t + N_u U$. Здесь $k_t = K_t/(T\nu_0)$, $U = \sqrt{\beta}u$ — безразмерные градиент температуры и скорость газа. Будем искать далее безразмерные коэффициенты T_t, T_u и N_t, N_u, называемые соответственно коэффициентами скачков температуры и концентрации. Подробности простановки этой задачи известны по многочисленным работам, в том числе в [1–8].

Граничные условия (в случае диффузного отражения молекул от стенки) приведем без вывода

$$\varphi(0,\mu,C)=0,\quad 0<\mu<1,$$

$$\varphi(x,\mu,C)=\varphi_{\mathrm{as}}(x,\mu,C)+o(1),\quad x\to\infty,\quad -1<\mu<0, \tag{5}$$

где

$$\varphi_{\mathrm{as}}(x,\mu,C)=\varepsilon_n+\varepsilon_t\left(C^2-\frac{3}{2}\right)$$

$$+2UC\mu+k_t(x-\mu)\left(C^2-\frac{5}{2}\right)+k_t(b_0+b_1C)\mu,$$

$$b_1=-\frac{1+2\alpha a}{8\alpha-2a(1-8\alpha^2)},$$

$$b_0=\frac{a}{8\alpha-2a(1-8\alpha^2)},\quad \mu=C_x/C.$$

В данной задаче функция φ, граничные условия (5) и уравнение (4) зависят только от модуля скорости C и косинуса угла μ между направлением движения молекулы и нормалью к поверхности и от одной пространственной координаты x. Поэтому в уравнении (4) можно выполнить интегрирование по полярному углу (азимуту) в плоскости (C_y,C_z) от 0 до 2π. В результате получаем уравнение

$$\mu\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\varphi(x,\mu,C)$$

$$=\int\limits_{-1}^{1}\int\limits_{0}^{\infty}k(\mu\mu',C,C')\varphi(x,\mu',C')\exp(-C'^2)C'^3d\mu'dC',$$

$$k(\mu\mu',C,C')=1+\frac{1}{2}(C^2-2)(C'-2)$$

$$+\frac{4\mu\mu'}{\sqrt{\pi}}\left[aCC'+a_1(C+C')+a_2\right]. \tag{6}$$

Отметим, что величине числа Прандтля $\mathrm{Pr}=2/3$ (это соотношение хорошо выполняется для простых газов) отвечают следующие значения параметров:

$$a=\frac{3\alpha}{1-6\alpha^2},\quad a_1=-\frac{6\alpha^2}{1-6\alpha^2},\quad a_2=\frac{2\alpha}{1-6\alpha^2},$$

$$b_0=\frac{3}{2},\quad b_1=-\frac{1}{2\alpha}.$$

Сведение задачи Смолуховского к одномерной задаче

Будем искать решение задачи (5), (6) в виде

$$\varphi(x,\mu,C)=h_1(x,\mu)+Ch_2(x,\mu)+(C^2-2)h_3(x,\mu).$$

Тогда уравнение (6) эквивалентно одномерному векторному уравнению

$$\mu\frac{\partial h}{\partial x}+h(x,\mu)=\frac{1}{2}\int\limits_{-1}^{1}K_0(\mu,\mu')h(x,\mu')d\mu' \tag{7}$$

относительно вектора-столбца $h=\mathrm{col}\{h_1,h_2,h_3\}$, $K_0(\mu,\mu')$ — ядро уравнения,

$$K_0(\mu,\mu')=K_0+\frac{4}{\sqrt{\pi}}\mu\mu'K_1,$$

$$K_0=\begin{bmatrix}1 & 4\alpha & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & \alpha & 1\end{bmatrix},$$

$$K_1=\begin{bmatrix}a+4\alpha a_1 & 0 & 2\alpha\alpha_1\\ a_1+4\alpha a_2 & 2a_2+4\alpha a_1 & 2\alpha a_2\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}.$$

Граничные условия (5) переходят в следующие:

$$h(0,\mu)=0,\quad 0<\mu<1,$$

$$h(x,\mu)=h_{\mathrm{as}}(x,\mu)+o(1),\quad x\to+\infty,\quad -1<\mu<0,$$

$$h_{\mathrm{as}}(x,\mu)=\begin{bmatrix}\varepsilon_n+\frac{1}{2}\varepsilon_t-\frac{1}{2}k_t(x-\mu)+b_0k_t\mu\\ b_1k_t\mu+2U\mu\\ \varepsilon_t+k_t(x-\mu)\end{bmatrix}. \tag{8}$$

Упростим ядро уравнения (7). Воспользуемся законами сохранения массы и энергии. В результате получим, что ядро уравнения (7) можно представить в виде $K(\mu,\mu')=K_0+\mu\mu'K_2$, где K_0 — та же, что и ранее, а

$$K_2=\begin{bmatrix}\frac{4}{\sqrt{\pi}}ac_0 & 0 & 0\\ 0 & 3c_0(1+2\alpha a) & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}.$$

Разделение переменных и собственные решения

Разделим переменные в уравнении (7). Общий метод Фурье приводит к выражению

$$h_\eta(x,\mu)=\exp\left(-\frac{x}{\eta}\right)\Phi(\eta,\mu), \tag{9}$$

где η — спектральный параметр, или параметр разделения, вообще говоря, комплексный.

Выражение (9) сразу приводит к характеристическому уравнению

$$(\eta-\mu)\Phi(\eta,\mu)=\frac{1}{2}\eta K_0n^{(0)}(\eta)+\frac{1}{2}\mu\eta K_2n^{(1)}(\eta),$$

$$n^{(\alpha)}(\eta)=\int\limits_{-1}^{1}\mu^\alpha\Phi(\eta,\mu)d\mu;\quad \alpha=0,1. \tag{10}$$

Интергируя уравнение (10) по μ от -1 до $+1$, получаем следующее соотношение: $n^{(1)}(\eta) = \eta(E - K_0)n(\eta)$, где E — единичная матрица, а через $n(\eta)$ обозначен вектор $n^{(0)}(\eta)$. Следовательно, уравнение (10) можно записать в виде

$$(\eta - \mu)\Phi(\eta, \mu) = \frac{1}{2}\eta\nabla(\mu\eta)n(\eta),$$

$$\Delta(x) = K_0 + xK_3, \quad K_3 = K_2(E - K_2). \qquad (11)$$

В силу однородности уравнения (7) можно считать, что $n(\eta) = \mathrm{col}\{1, 1, 1\}$.

Пусть $\eta \in (-1, 1)$, тогда из уравнения (11) в пространстве обобщенных функций [9] находим собственную матрицу-функцию характеристического уравнения

$$\Phi(\eta, \mu) = \frac{1}{2}\eta\Delta(\mu\eta)P\frac{1}{\eta - \mu} + \Lambda(\eta)\delta(\eta - \mu). \qquad (12)$$

Здесь символ Px^{-1} означает распределение — главное значение интеграла при интегрировании x^{-1}, $\delta(x)$ — дельта-функция Дирака, $\Lambda(z)$ — дисперсионная матрица-функция задачи

$$\Lambda(z) = E + z\frac{1}{2}\int\limits_{-1}^{1}\frac{\Delta(z\mu)}{\mu - z}d\mu.$$

Итак, решения непрерывного спектра определяются согласно равенству (9), в котором $\Phi(\eta, \mu)$ определяется соотношением (12) при $\eta \in (0, 1)$.

Далее дисперсионная матрица понадобится в явном виде

$$\Lambda(z) = \begin{bmatrix} \lambda_c(z) & 4\alpha z t(z) - 3c_0 a z^2\lambda_c(z) & 0 \\ 0 & \omega(z) & 0 \\ 0 & \alpha z t(z) & \lambda_c(z) \end{bmatrix},$$

где $\lambda_c(z) = 1 + zt(z)$ — дисперсионная функция Кейза [10],

$$t(z) = \frac{1}{2}\int\limits_{-1}^{1}\frac{d\tau}{\tau - z}, \quad \omega(z) = 1 + 3c_0(1 + 2\alpha a)z^2\lambda_c(z).$$

Дисперсионной функцией задачи называется (см., например, [10]) определитель дисперсионной матрицы $\lambda(z) \equiv \det\Lambda(z) = \lambda_c^2(z)\omega(z)$.

Дискретный спектр уравнения (10) образуют нули дисперсионной функции. Сначала займемся нулями $\omega(z)$. С помощью принципа аргумента [11] можно показать, что функция $\omega(z)$ имеет два простых действительных нуля $\pm\eta_0$, лежащих вне разреза $(-1, 1)$ вблизи его концов. Пусть $\eta = \eta_0$; тогда из уравнения (11) находим

$$\Phi(\eta_0, \mu) = \frac{1}{2}\eta_0\Delta(\mu\eta_0)\frac{1}{\eta_0 - \mu}n(\eta_0). \qquad (13)$$

Подставим в уравнение (7) функцию

$$h_{\eta_0}(x, \mu) = \exp\left(-\frac{x}{\eta_0}\right)\Phi(\eta_0, \mu), \qquad (14)$$

где $\Phi(\eta_0, \mu)$ определяется согласно (13).

Получим, что функция $h_{\eta_0}(x, \mu)$ является решением уравнения (7) тогда и только тогда, когда $n(\eta_0)$ удовлетворяет однородному уравнению

$$\Lambda(\eta_0)n(\eta_0) = \Theta, \quad \Theta = \mathrm{col}\{0, 0, 0\}. \qquad (15)$$

Уравнение (15) имеет ненулевое решение, ибо $\lambda(\eta_0) = \det\Lambda(\eta_0) = 0$.

Запишем уравнение (12) в виде трех скалярных и найдем вектор $n(\eta_0)$

$$n(\eta_0) = \begin{bmatrix} -4\alpha\eta_0 t(\eta_0) + 3c_0 a\eta_0^2\lambda_c(\eta_0) \\ \lambda_c(\eta_0) \\ -\alpha\eta_0 t(\eta_0) \end{bmatrix}. \qquad (16)$$

Итак, собственное решение дискретного спектра, отвечающее нулю η_0, построено и определяется равенствами (13), (14) и (16).

Дисперсионная функция $\lambda(z)$ имеет еще один нуль — точку $\eta_i = \infty$ четвертого порядка. Этому нулю отвечают четыре линейно независимых дискретных решения — векторы-столбцы в разложении $h_{\mathrm{as}}(x, \mu)$.

Решение граничной задачи. Сведение к векторной краевой задаче

Будем искать решение задачи (7), (8) в виде разложения по собственным решениям дискретного и непрерывного спектров

$$h(x, \mu) = A_0 h_{\eta_0}(x, \mu) + h_{\mathrm{as}}(x, \mu) + \int\limits_0^1 \exp\left(-\frac{x}{\eta}\right)\Phi(\eta, \mu)A(\eta)d\eta,$$
$$-1 < \mu < 1, \quad x > 0 \qquad (17)$$

или подробнее

$$h(x, \mu) = A_0 h_{\eta_0}(x, \mu) + h_{\mathrm{as}}(x, \mu) + \frac{1}{2}\int\limits_0^1 \exp\left(-\frac{x}{\eta}\right)\frac{\eta\Delta(\mu\eta)}{\eta - \mu}A(\eta)d\eta + \exp\left(-\frac{x}{\mu}\right)\Lambda(\mu)A(\mu)\Theta_+(\mu).$$

Здесь $A_0, \varepsilon_n, \varepsilon_t$ — неизвестные постоянные (коэффициенты дискретного спектра); $A(\eta)$ — неизвестная вектор-функция (коэффициент непрерывного спектра);

$\Theta_+(\mu) = 1$, если $0 < \mu < 1$; $\Theta_+(\mu) = 0$, если $-1 < \mu < 0$.

Подставим разложение (17) в первое граничное условие (8). Получаем сингулярное интегральное уравнение с ядром Коши в интервале (0,1)

$$A_0 h_{\eta_0}(0,\mu) + h_{\text{as}}(0,\mu) + \frac{1}{2}\int\limits_0^1 \frac{\eta\Delta(\mu\eta)}{\eta-\mu}A(\eta)d\eta + \Lambda(\mu)A(\mu) = \Theta. \quad (18)$$

Введем неизвестную вспомогательную вектор-функцию

$$N(z) = \frac{1}{2}\int\limits_0^1 \eta\Delta(\eta z)A(\eta)\frac{d\eta}{\eta - z}, \quad (19)$$

для которой, согласно формулам Сохоцкого,

$$N^+(\mu) - N^-(\mu) = \pi i\mu\Delta(\mu^2)A(\mu), \quad 0 < \mu < 1. \quad (20)$$

С помощью граничных значений $N(z)$ и $\Lambda(z)$ сведем уравнение (18) к векторной краевой задаче Римана–Гильберта

$$B^+(\mu)\left[N^+(\mu) + A_0 h_{\eta_0}(0,\mu) + h_{\text{as}}(0,\mu)\right] =$$
$$= B^-(\mu)\left[N^-(\mu) + A_0 h_{\eta_0}(0,\mu) + h_{\text{as}}(0,\mu)\right], \quad 0 < \mu < 1. \quad (21)$$

Рассмотрим соответствующую однородную краевую задачу

$$B^+(\mu)X^+(\mu) = B^-(\mu)X^-(\mu), \quad 0 < \mu < 1. \quad (22)$$

Здесь $X(z)$ — неизвестная матрица, аналитическая в плоскости с разрезом вдоль отрезка $[0,1]$. Учитывая, что дисперсионная матрица может быть представлена в виде

$$\Lambda(z) = \lambda_c(z)\Delta(z^2) + K_4, \quad K_4 = \begin{bmatrix} 0 & -4\alpha & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\alpha & 0 \end{bmatrix},$$

получаем, что

$$B(z) = \lambda_c E + \frac{1}{3c_0(1+2\alpha a)z^2}K_4.$$

Опуская (см. [6]) диагонализацию задачи (22) без доказательства приведем матрицу

$$X(z) = \begin{bmatrix} U(z) & 4\alpha(U(z)-V(z)) & 0 \\ 0 & V(z) & 0 \\ 0 & \alpha(U(z)-V(z)) & U(z) \end{bmatrix}.$$

Здесь

$$U(z) = z\exp(-u(z)), \quad u(z) = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^1 \frac{\Theta(\tau)}{\tau - z}d\tau,$$

$$\Theta(\tau) = -\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}\frac{2\lambda_c(\tau)}{\pi\tau},$$

$$V(z) = z\exp(-\upsilon(z)), \quad \upsilon(z) = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^1 \frac{\varepsilon(\tau)}{\tau - z}d\tau,$$

$$\varepsilon(\tau) = -\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}\frac{2\omega(\tau)}{3c_0(1+2\alpha a)\pi\tau^3}.$$

Вернемся к решению неоднородной задачи (21). Преобразуем ее с помощью однородной к задаче определения аналитической вектор-функции по ее нулевому скачку на разрезе

$$[X^+(\mu)]^{-1}\left[N^+(\mu) + A_0 h_{\eta_0}(0,\mu) + h_{\text{as}}(0,\mu)\right] =$$
$$= [X^-(\mu)]^{-1}\left[N^-(\mu) + A_0 h_{\eta_0}(0,\mu) + h_{\text{as}}(0,\mu)\right], \quad 0 < \mu < 1.$$

Учитывая поведение входящих в эту задачу матриц и векторов в точке η_0 и в точке $\eta_i = \infty$, получаем ее общее решение

$$N(z) = -A_0 h_{\eta_0}(0,z) - h_{\text{as}}(0,z) + X(z)\left[\frac{B}{z-\eta_0} + C\right]. \quad (23)$$

Здесь векторы B, C имеют произвольные элементы B_i, C_i $(i = 1,2,3)$. Чтобы решение (23) можно было принять в качестве вспомогательной функции (19), устраним особенности общего решения.

Условия разрешимости и численные расчеты

Устраняя полюс в точке η_0 у решения (23), потребуем, чтобы

$$\frac{1}{2}A_0\eta_0\Delta(\eta_0^2)n(\eta_0) + X(\eta_0)B = \Theta.$$

Это уравнение эквивалентно трем скалярным, из которых находим вектор B

$$B = \frac{A_0\eta_0}{2V(\eta_0)}\begin{bmatrix} -4\alpha \\ 1 \\ -\alpha \end{bmatrix}.$$

Разложим матрицу-функцию $X(z)$ в окрестности точки $\eta_i = \infty$

$$X(z) = zE - \begin{bmatrix} U_1 & 4\alpha(U_1 - V_1) & 0 \\ 0 & V_1 & 0 \\ 0 & \alpha(U_1 - V_1) & U_1 \end{bmatrix} + o(1), \quad |z| \to \infty.$$

Здесь

$$U_1 = -\frac{1}{\pi}\int\limits_0^1 \Theta(\tau)d\tau, \quad V_1 = -\frac{1}{\pi}\int\limits_0^1 \varepsilon(\tau)d\tau.$$

Теперь легко разложить $N(z)$ в окрестности точки $\eta_i = \infty$

$$N(z) = zN_1 + N_0 + o(1), \quad |z| \to \infty.$$

Здесь

$$N_1 = \begin{bmatrix} -k_t(1/2+b_1)+C_1 \\ -(2U+b_1k_t)+C_2 \\ k_t+C_3 \end{bmatrix},$$

$$N_0 = \begin{bmatrix} -\varepsilon_n - \frac{1}{2}\varepsilon_t - \frac{1}{2}A_0 3c_0 a\eta_0^2 n_1(\eta_0)+ \\ +B_1 - U_1C_1 - 4\alpha(U_1-V_1)C_2 \\ \frac{1}{2}A_0 3c_0(1+2\alpha a)\eta_0^2 n_2(\eta_0) + B_2 - V_1C_2 \\ -\varepsilon_t + B_3 - \alpha(U_1-V_1)C_2 - U_1C_3 \end{bmatrix}.$$

Устраняя полюс у $N(z)$ в точке $\eta_i = \infty$, построим вектор C

$$C = \begin{bmatrix} k_t(1/2+b_0) \\ 2U+b_1k_t \\ -k_t \end{bmatrix}.$$

Найдем значение вспомогательной функции $N(z)$ в точке $\eta_i = \infty$

$$N(\infty) = \frac{3c_0}{2}\int_0^1 \eta^2 \begin{bmatrix} aA(\eta) \\ (1+2\alpha a)A_2(\eta) \\ 0 \end{bmatrix} d\eta.$$

Теперь из условия $N(\infty) = N_0$ получаем следующую систему:

$$\frac{3c_0}{2}a\int_0^1 \eta^2 A(\eta)d\eta = -\varepsilon_n - \frac{1}{2}\varepsilon_t - \frac{1}{2}A_0 3c_0 a\eta_0^2 n(\eta_0)$$

$$+B_1 - U_1C_1 - 4\alpha(U_1-V_1)C_2, \tag{24}$$

$$-\frac{3c_0}{2}(1+2\alpha a)\int_0^1 \eta^2 A_2(\eta)d\eta = -\frac{1}{2}A_0 + B_2 - V_2C_2, \tag{25}$$

$$\varepsilon_t = B_3 - \alpha(U_1-V_1)C_2 - U_1C_3. \tag{26}$$

Подставляя общее решение (23) в формулу Сохоцкого (20), находим подынтегральную функцию из интегралов в (24) и (25)

$$\frac{3c_0}{2}(1+2\alpha a)\eta^2 A_2(\eta)d\eta =$$

$$= \frac{1}{2\pi i\eta}[V^+(\eta) - V^-(\eta)]\left(\frac{B_2}{\eta-\eta_0} + C_2\right). \tag{27}$$

Обозначим

$$J(\eta_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_0^1 [V^+(\eta) - V^-(\eta)]\frac{d\eta}{\eta-\eta_0}.$$

С помощью техники контурного интегрирования можно показать, что

$$J(\eta_0) = V(\eta_0) - \eta_0 + V_1.$$

Интегрируя (27) и учитывая (25) и (26), получаем (положив $\beta = \alpha(V_1 - \eta_0 - U_1)$)

$$\varepsilon_n = 2U\left(\frac{7}{2}\beta - \frac{a(V_1-\eta_0)}{1+2\alpha a}\right)$$

$$+k_t\left(-U_1 + \frac{7}{2}b_1\beta + \frac{a(V_1-\eta_0-U_1)}{8\alpha - 2a(1-9\alpha^2)}\right), \tag{28}$$

$$\varepsilon_t = 2U\beta + k_t(U_1 + b_1\beta). \tag{29}$$

При $a = 0$ из формул (29) и (28) получаем

$$\varepsilon_t = 2U\beta + k_t\left(U_1 - \frac{2\beta}{3\sqrt{\pi}}\right),$$

$$\varepsilon_n = 2U\left(\frac{7}{2}\beta\right) + k_t\left(-U_1 - \frac{7\beta}{3\sqrt{\pi}}\right),$$

что в точности совпадает с известными формулами (6.1) из [6].

Формулы (29)и (28) возьмем при значении параметра a, отвечающему величине числа Прандтля $\mathrm{Pr} = 2/3$, и приведем к расчетному виду

$$\varepsilon_t = 2U\alpha(V_1 - \eta_0 - U_1) + k_t\frac{1}{2}(3U_1 - V_1 + \eta_0),$$

$$\varepsilon_n = U\alpha(V_1 - \eta_0 - 7U_1) + k_t\frac{1}{4}(-3U_1 - V_1 + \eta_0). \tag{30}$$

Численные расчеты показывают, что $\eta_0 = 1 + \varepsilon$, где $\varepsilon = 1.3 \cdot 10^{-17}$, $U_1 = 0.71045$, $V_1 = 0.99326$. Следовательно, согласно (30),

$$\varepsilon_t = 1.06904k_t - 0.23835(2U),$$

$$\varepsilon_n = -0.53115k_t - 0.82749(2U).$$

Перейдем к размерным переменным, определяя длину свободного пробега молекул согласно [8] $l = (\eta/\rho)\sqrt{\pi m/2kT_0}$, где η — коэффициент кинематической вязкости, ρ — плотность газа. Тогда формулы для скачков температуры и концентрации имеют вид

$$\varepsilon_t = C_t l K_t + 2\sqrt{\beta}C_t^u u, \quad \varepsilon_n = C_n l K_t + 2\sqrt{\beta}C_n^u u.$$

Здесь

$$C_t = \frac{15}{8}(1.06904) = 2.00445, \quad C_t^u = -0.23835,$$

$$C_n = \frac{15}{8}(-0.53115) = -0.99591, \quad C_n^u = -0.82749.$$

Для сравнения приведем результаты из [6] для газов с частотой столкновений, пропорциональной скорости молекул (т.е. с постоянной длиной свободного пробега молекул): $C_t = 1.99885$, $C_n = -0.99657$, $C_t^u = -0.23687$, $C_n^u = -0.82905$.

Теперь приведем результаты из [12] для газов с постоянной частотой столкновений молекул: $C_t = 2.20262$, $C_n = -1.23035$, $C_t^u = -0.22436$, $C_n^u = -0.84350$.

Приведем для сравнения результат, полученный численно с использованием полного уравнения Больцмана [13] для модели молекулы–твердые сферы: $C_t = 2.1133$, а также приведем результат из [14], где использовалась 13-моментная кинетическая модель с постоянной частотой столкновений молекул. В этой работе получен следующий результат: $C_t = 2.20576$. Отметим, что результаты, приведенные в указанных работах, пересчитаны с учетом принятого в данной работе определения длины свободного пробега молекул газ при $\mathrm{Pr} = 2/3$.

Заключение

Сравнение с предыдущими результатами показывает, что полученные в данной статье результаты (для коэффициента скачка температуры) лежат между результатами, полученными для БГК модели с постоянной частотой столкновений и результатами, полученными для БГК модели с постоянной длиной свободного пробега. Это соответствует представлению о данной модели, как о модели с промежуточным характером частоты столкновений. Важное преимущество предлагаемой модели состоит в том, что она способна учесть правильное значение числа Прандтля. Отметим, что для моделей, которые не обладают этой особенностью, необходим пересчет полученных результатов с учетом отличия значения числа Прандтля от его истинного значения [8]. Подобная процедура обладает элементами неоднозначности. Результаты, полученные по новой модели с истинным числом Прандтля, свободны от этого недостатка.

Отметим также, что точность предлагаемой модели соответствует точности широко применяемой 13-моментной кинетической модели.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ (код проекта: 99-01-00336).

Список литературы

[1] *Welander P.* // Ark. Physik. 1954. B. 7. P. 507–533.
[2] *Cercignani C.* // Trans. Theory Stat. Phys. 1977. Vol. 6. N 1. P. 29–56.
[3] *Sone Y.* // J. Phys. Soc. Japan. 1978. Vol. 45. N 1. P. 315–320.
[4] *Латышев А.В.* // ПММ. 1990. Т. 54. Вып. 4. С. 581–586.
[5] *Латышев А.В., Юшканов А.А.* // Изв. РАН. Сер. МЖГ. 1992. № 1. С. 163–171.
[6] *Латышев А.В., Юшканов А.А.* // Изв. РАН. Сер. МЖГ. 1996. № 3. С. 140–153.
[7] *Латышев А.В., Юшканов А.А.* // Письма в ЖТФ. 2000. Т. 26. Вып. 23. С. 16–23.
[8] *Черчиньяни К.* Теория и приложения уравнения Больцмана. М.: Мир, 1978. 496 с.
[9] *Владимиров В.С.* Обобщенные функции в математической физике. М.: Наука, 1976. 280 с.
[10] *Куйз К., Цвайфель П.Ф.* Линейная теория переноса. М.: Мир, 1972. 384 с.
[11] *Гахов Ф.Д.* Краевые задачи. М.: Мир, 1977. 640 с.
[12] *Latyshev A.V., Yushkanov A.A.* // Mathematical Models of Non-Linear Excitations, Transfer, Dynamics, and Control in Condensed Systems and Other Media / Ed. L.A. Uvarova, A.E. Arinstein, A.V. Latyshev. New York: Kluwer Academic, Moscow, 1999. 411 p.
[13] *Loyalka S.K.* // Transp. theory and statist. phys. 1991. Vol. 20. N 2 & 3. P. 237–249.
[14] *Soga T.* // Phys. Fluids. 1986. Vol. 29. N 4. P. 976–985.