

01;05;10;11

## Влияние характера отражения электронов от поверхности на электромагнитные свойства цилиндрических частиц

© Э.В. Завитаев, А.А. Юшканов, Ю.И. Яламов

Московский педагогический университет,  
107005 Москва, Россия

(Поступило в Редакцию 29 апреля 2002 г.)

Рассчитано сечение магнитного поглощения металлической частицы цилиндрической формы. Рассмотрен общий случай, когда отношение длины свободного пробега электронов к поперечному размеру частицы может принимать произвольные значения. В качестве граничных условий задачи принято условие зеркально-диффузионного отражения электронов от внутренней поверхности частицы. Рассмотрены предельные случаи и проведено обсуждение полученных результатов.

### Введение

Электромагнитные свойства малых металлических частиц обладают рядом особенностей [1,2]. Эти особенности связаны с тем, что длина свободного пробега электронов в таких частицах оказывается одного порядка с их линейными размерами. При этом существенную роль начинают играть нелокальные эффекты. Классическая теория взаимодействия электромагнитного излучения с металлическими частицами [3] (теория Ми), основанная на локальных уравнениях макроскопической электродинамики, оказывается неприменимой.

В работах [4,5] рассмотрен вопрос о магнитном дипольном поглощении инфракрасного излучения сферическими частицами. При этом для описания электромагнитного отклика частицы применялась стандартная кинетическая теория вырожденного ферми-газа электронов проводимости в металлах [6]. Рассмотрение было ограничено случаем чисто диффузного отражения электронов проводимости от внутренней поверхности частицы.

В последующих работах [7–9] поднимался вопрос о влиянии зеркального отражения электронов на электромагнитные свойства малых металлических частиц. В работе [10] было проведено подробное рассмотрение магнитного дипольного поглощения сферической частицы при условии, что отражение электронов от поверхности частицы носит смешанный — зеркально-диффузный характер [6].

В данной работе, которая является обобщением [11], построена теория взаимодействия электромагнитного излучения с цилиндрической частицей с учетом смешанного (зеркально-диффузного) характера отражения электронов.

### Постановка задачи

Рассматривается бесконечный металлический цилиндр радиуса  $R$  и длины  $L$  ( $R \gg L$ ) в поле плоской электромагнитной волны (предполагается, что магнитное поле волны направлено вдоль оси цилиндра). Его

магнитное поглощение обусловлено возникновением вихревых токов. В дипольном приближении и в пренебрежении скин-эффектом (считается, что  $R < \delta$  — глубины скин-слоя) вихревое электрическое поле, вызывающее появление этих токов, имеет вид

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2c} \left[ \mathbf{r}, \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \right] = \frac{\omega}{2ic} [\mathbf{r}, \mathbf{H}_0] \exp(-i\omega t), \quad (1)$$

где  $\mathbf{H} = \mathbf{H}_0 \exp(-i\omega t)$  — напряженность магнитного поля;  $\mathbf{r}$  — радиус-вектор (начало координат выбирается на оси частицы),  $\mathbf{H}_0$  — амплитуда магнитного поля волны,  $\omega$  — угловая частота волны,  $c$  — скорость света.

Средняя диссипируемая мощность  $\bar{Q}$  в частице находится по формуле [12]

$$\bar{Q} = \int (\operatorname{Re} \mathbf{E})(\operatorname{Re} \mathbf{j}) d^3 r = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \int \mathbf{j} \mathbf{E}^* d^3 r. \quad (2)$$

Здесь чертой обозначено усреднение по времени, звездочкой — комплексное сопряжение;  $\mathbf{j}$  — вихревой ток. Если для нахождения тока  $\mathbf{j}$  применить локальный закон Ома в виде

$$\mathbf{j} = \sum (\omega) \mathbf{E}; \quad \Sigma(\omega) = \frac{\sigma(0)}{1 - i\omega\tau}, \quad (3)$$

где  $\Sigma(\omega)$  — проводимость Друде [6,13],  $\Sigma(0) = (e^2 n \tau) / m$  — статическая проводимость металла, то, разделив  $\bar{Q}$  на средний поток энергии в волне  $c H_0^2 / 8\pi$ , получим классическую формулу для сечения  $\sigma_{\text{кл}}$  магнитного поглощения частицы [12]

$$\sigma_{\text{кл}} = \frac{\pi^2 e^2 n R^4 L}{2mc^3} \frac{\tau \omega^2}{1 + \omega^2 \tau^2}, \quad (4)$$

где  $e$ ,  $m$  и  $n$  — соответственно заряд, масса и концентрация электронов проводимости;  $\tau$  — время релаксации.

В данной работе рассмотрим случай когда радиус частицы  $R$  сравним с длиной свободного пробега электронов в металле  $\Lambda$  или меньше ее  $R < \Lambda$ . Тогда уравнение (3) неприменимо, так как связь между  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{j}$  на таких расстояниях оказывается существенно нелокальной. Для описания этой связи применим кинетическое уравнение

(в приближении времени релаксации) к вырожденному ферми-газу электронов проводимости в цилиндрической частице. Для достаточно слабых внешних полей  $\mathbf{E}$  это уравнение можно линеаризовать по внешнему полю  $\mathbf{E}$  и по малым отклонениям от равновесной фермиевской функции распределения

$$-i\omega f_1 + \mathbf{v} \frac{\partial f_1}{\partial \mathbf{r}} + e(\mathbf{v}\mathbf{E}) \frac{\partial f_0}{\partial \varepsilon} = -\frac{f_1}{\tau}. \quad (5)$$

Здесь

$$f(\mathbf{r}, \mathbf{v}) = f_0(\varepsilon) + f_1(\mathbf{r}, \mathbf{v}), \quad \varepsilon = \frac{mv^2}{2} \quad (6)$$

— функция распределения электронов;  $f_0(\varepsilon)$  — равновесная фермиевская функция распределения электронов по энергиям, причем далее рассматривается квадратичная зависимость энергии от скорости:  $mv^2/2$  и используется ступенчатая аппроксимация для равновесной функции  $f_0(\varepsilon)$  [13]

$$f_0(\varepsilon) = \theta(\varepsilon_f - \varepsilon) = \begin{cases} 1, & 0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_f, \\ 0, & \varepsilon_f < \varepsilon, \end{cases} \quad (7)$$

$\varepsilon_f = mv_f^2/2$  — энергия Ферми;  $f_1(\mathbf{r}, \mathbf{v})$  — малое отклонение  $f$  от равновесного значения  $f_0(\varepsilon)$ , возникающее под действием поля и приводящее к появлению тока

$$\mathbf{j} = en\langle \mathbf{v} \rangle = en \left[ \int f_0 d^3v \right]^{-1} \int f_1 \mathbf{v} d^3v. \quad (8)$$

Концентрация электронов  $n$  определяется по стандартной формуле, согласно которой

$$n = 2 \frac{m^3}{h^3} \int f_0 d^3v = 2 \frac{m^3}{h^3} \frac{4\pi v_f^3}{3}, \quad (9)$$

где  $h$  — постоянная Планка,  $v_f$  — скорость Ферми.

Взяв в уравнении (5) поле  $\mathbf{E}$  в виде (1), найдем  $f_1$  как решение уравнения (5). После этого из соотношения (8) найдем ток и сечение поглощения

$$\sigma = \frac{8\pi\bar{Q}}{cH_0^2}. \quad (10)$$

Однозначное решение поставленной задачи возможно при выборе граничного условия на поверхности частицы для неизвестной функции  $f_1$ . Физически это означает, что при выполнении условия  $R < \Lambda$  поглощение энергии частицей существенно зависит от характера взаимодействия электронов проводимости с границей частицы. Зададим следующее граничное условие:

$$f_1(\mathbf{r}_\perp, \mathbf{v}_\perp, \mathbf{v}_z) = qf_1(\mathbf{r}_\perp, \mathbf{v}'_\perp, \mathbf{v}_z) \text{ при } \begin{cases} |r_\perp| = R, \\ \mathbf{r}_\perp \mathbf{v}_\perp < 0, \end{cases} \quad (11)$$

где  $\mathbf{r}_\perp$  и  $\mathbf{v}_\perp$  — соответственно проекции радиус-вектора электрона  $\mathbf{r}$  и его скорости  $\mathbf{v}$  на плоскость, перпендику-

лярную оси цилиндра,

$$\mathbf{v}'_\perp = \mathbf{v}_\perp - \frac{2\mathbf{r}_\perp(\mathbf{r}_\perp \mathbf{v}_\perp)}{R^2} \quad (12)$$

— вектор скорости, который при зеркальном отражении от внутренней поверхности цилиндра в точке  $\mathbf{r}_\perp(|r_\perp| = R)$  переходит в вектор  $\mathbf{v}_\perp$ ;  $\mathbf{v}_z$  — составляющая скорости электрона вдоль оси частицы;  $q$  — коэффициент зеркальности (вероятность зеркального отражения)

$$0 \leq q \leq 1. \quad (13)$$

При  $q = 0$  получаем условие диффузного отражения электронов проводимости, а при  $q = 1$  отражение чисто зеркальное. При значениях  $q \neq 0$  и  $q \neq 1$  получаем различные варианты смешанного (зеркально-диффузного) отражения электронов.

## Функция распределения

Кинетическое уравнение (5) решается методом характеристик [14]. Изменение  $f_1$  вдоль траектории (характеристики)

$$d\mathbf{r} = \mathbf{v}dt \quad (14)$$

определяется уравнением

$$df_1 = - \left( v f_1 + e(\mathbf{v}\mathbf{E}) \frac{\partial f_0}{\partial \varepsilon} \right) dt, \quad (15)$$

где

$$v = \frac{1}{\tau} - i\omega \quad (16)$$

— комплексная частота рассеяния.

Граничное условие (10) позволяет проследить за изменением  $f_1$  вдоль зеркально отражающейся траектории. В точке отражения  $t = t_n$  функция  $f_1(t)$  испытывает скачок

$$f_1(t_n + 0) = qf_1(t_n - 0). \quad (17)$$

Знак  $+/-$  обозначает предел функции  $f_1$  в точке отражения  $t_n$  справа или слева по времени пролета.

При зеркальном отражении сохраняется угловой момент  $[\mathbf{r}_\perp, \mathbf{v}_\perp] = [\mathbf{r}_\perp, \mathbf{v}'_\perp]$ , поэтому на рассматриваемой траектории

$$[\mathbf{r}_\perp, \mathbf{v}_\perp] = \text{const}. \quad (18)$$

Разность  $t_n - t_{n-1}$  не зависит от номера  $n$  точки отражения

$$t_n = nT + \text{const}, \quad n \in Z, \quad (19)$$

где  $T$  — время пролета электрона со скоростью  $\mathbf{v}_\perp$  от точки  $\mathbf{r}_{n-1\perp}$  до точки  $\mathbf{r}_{n\perp}$

$$T = -\frac{2(\mathbf{v}_{n\perp} \mathbf{r}_{n\perp})}{v_\perp^2}. \quad (20)$$

Величина  $\mathbf{v}\mathbf{E}$  также постоянна на траектории

$$\mathbf{v}\mathbf{E} = \frac{\omega}{2ic} [\mathbf{r}, \mathbf{H}] \mathbf{v} = \frac{i\omega}{2c} [\mathbf{r}, \mathbf{v}] \mathbf{H} = \text{const}. \quad (21)$$

Решением уравнения (14) в общем виде является функция

$$f_1 = C \exp(-vt) - \frac{A}{v}, \quad \text{где } A = e(\mathbf{v}\mathbf{E}) \frac{\partial f_0}{\partial \varepsilon}. \quad (22)$$

Проведем решение этого уравнения на интервале  $(t_{n-1}, t_n)$ . В момент начала отсчета времени ( $t = 0$ )

$$f_1(t_{n-1} + 0) = C - \frac{A}{v}. \quad (23)$$

Откуда ищется значение постоянной  $C$

$$C = \frac{A}{v} + f_1(t_{n-1} + 0). \quad (24)$$

Теперь получим связь между начальными значениями функции  $f_1$  на двух соседних звеньях траектории. Поскольку  $t_n - 0 = t_{n-1} + T$ , то

$$\begin{aligned} f_1(t_n - 0) &= \left( \frac{A}{v} + f_1(t_{n-1} + 0) \right) \exp(-vT) - \frac{A}{v} \\ &= \frac{A}{v} (1 - \exp(-vT)) + f_1(t_{n-1} + 0) \exp(-vT). \end{aligned} \quad (25)$$

Применяя условие (17), получаем

$$\begin{aligned} f_1(t_n + 0) &= q \left\{ -\frac{A}{v} (1 - \exp(-vT)) \right. \\ &\quad \left. + f_1(t_{n-1} + 0) \exp(-vT) \right\}. \end{aligned} \quad (26)$$

Выражая затем с помощью этого рекуррентного соотношения  $f_1(t_{n-1} + 0)$  через  $f_1(t_{n-2} + 0)$  и т.д., приходим к выражению для  $f_1(t_n + 0)$  через сумму бесконечной геометрической прогрессии со знаменателем  $q \exp(-vT)$ . Суммируя ее, имеем

$$f_1(t_n + 0) = \frac{-qA(1 - \exp(-vT))}{v(1 - q \exp(-vT))}. \quad (27)$$

Чтобы найти конкретный вид решения уравнения (14), воспользуемся начальным условием (27). Когда  $t = 0$ ,

$$\frac{-qA(1 - \exp(-vT))}{v(1 - q \exp(-vT))} = C - \frac{A}{v}, \quad (28)$$

откуда

$$\begin{aligned} C &= \frac{A}{v} \left\{ 1 - \frac{q(1 - \exp(-vT))}{1 - q \exp(-vT)} \right\} \\ &= \frac{A}{v} \left\{ \frac{1 - q}{1 - q \exp(-vT)} \right\}. \end{aligned} \quad (29)$$

Поэтому

$$\begin{aligned} f_1(t) &= \frac{A}{v} \left\{ \frac{1 - q}{1 - q \exp(-vT)} \right\} \exp(-vt) - \frac{A}{v} \\ &= \frac{A}{v} \left\{ \frac{(1 - q) \exp(-vt)}{1 - q \exp(-vT)} - 1 \right\}. \end{aligned} \quad (30)$$

Параметры  $t$  и  $T$  можно связать с координатами точки  $(\mathbf{r}_\perp, \mathbf{v}_\perp)$  в фазовом пространстве (при  $n = 0$   $\mathbf{v}_{0\perp} = \mathbf{v}_\perp$ ) условиями

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_\perp &= \mathbf{r}_{0\perp} + \mathbf{v}_\perp t; \quad \mathbf{v}_\perp \mathbf{r}_{0\perp} < 0; \\ r_{0\perp}^2 &= R^2; \quad T = -\frac{2(\mathbf{v}_\perp \mathbf{r}_{0\perp})}{v_\perp^2}, \end{aligned}$$

где  $\mathbf{r}_{0\perp}$  — проекция радиус-вектора электрона в момент отражения от границы частицы на плоскость, перпендикулярную оси цилиндра. Исключая отсюда  $\mathbf{r}_{0\perp}$ , получаем

$$t = \left\{ \mathbf{r}_\perp \mathbf{v}_\perp + [(\mathbf{r}_\perp \mathbf{v}_\perp)^2 + (R^2 - r_\perp^2) \mathbf{v}_\perp^2]^{1/2} \right\} / v_\perp^2, \quad (32)$$

$$T = 2[(\mathbf{r}_\perp \mathbf{v}_\perp)^2 + (R^2 - r_\perp^2) \mathbf{v}_\perp^2]^{1/2} / v_\perp^2. \quad (33)$$

Соотношения (30), (32) и (33) полностью определяют функцию  $f_1(\mathbf{r}_\perp, \mathbf{v}_\perp)$ .

## Сечение поглощения

Найденная функция распределения позволяет рассчитать ток (формула (8)) и среднюю диссипируемую мощность (формула (2)), а также сечение поглощения (формула (10)).

При вычислении интегралов (8), (2) удобно перейти к цилиндрическим координатам как в пространстве координат  $(r_\perp, \alpha, r_z)$ ; полярная ось — ось  $Z$ ; вектор  $\mathbf{H}_0$  параллелен оси  $Z$ , так и в пространстве скоростей  $(v_\perp, \varphi, v_z)$ . Ось цилиндра совпадает с осью  $Z$ . Поле (1) в цилиндрических координатах имеет лишь  $\varphi$ -компоненту

$$\mathbf{E} = E_\varphi \mathbf{e}_\varphi; \quad E_\varphi = \frac{i\omega}{2c} r_\perp H_0 \exp(-i\omega t). \quad (34)$$

Соответственно и ток (8) обладает лишь  $\varphi$  — компонентой (линии тока являются замкнутыми окружностями с центрами на оси  $Z$ , в плоскостях, перпендикулярных оси  $Z$ )

$$\begin{aligned} j_\varphi &= 2e \left( \frac{m}{h} \right)^3 \frac{1}{v} \int v_\varphi e(vE) \frac{\partial f_0}{\partial \varepsilon} \left\{ \frac{(1-q) \exp(-vt)}{1 - q \exp(-vT)} - 1 \right\} d^3v \\ &= E_\varphi 2e^2 \left( \frac{m}{h} \right)^3 \frac{1}{v} \int v_\varphi^2 \delta(\varepsilon - \varepsilon_f) \left\{ 1 - \frac{(1-q) \exp(-vt)}{1 - q \exp(-vT)} \right\} d^3v \\ &= E_\varphi 2e^2 \left( \frac{m}{h} \right)^3 \frac{1}{v} \left( \frac{2}{m} \right) \int_0^{v_f} \int_0^{2\pi} \int_0^\infty v_\perp^2 \sin^2 \varphi \delta(v_z - \sqrt{v_f^2 - v_\perp^2}) \\ &\quad \times \frac{1}{\sqrt{v_f^2 - v_\perp^2}} \left\{ 1 - \frac{(1-q) \exp(-vt)}{1 - q \exp(-vT)} \right\} v_\perp dv_\perp d\varphi dv_z \\ &= E_\varphi 2e^2 \left( \frac{m}{h} \right)^3 \frac{1}{v} \left( \frac{2}{m} \right) \int_0^{v_f} \int_0^{2\pi} \frac{v_\perp^3}{\sqrt{v_f^2 - v_\perp^2}} \\ &\quad \times \left\{ 1 - \frac{(1-q) \exp(-vt)}{1 - q \exp(-vT)} \right\} \sin^2 \varphi dv_\perp d\varphi. \end{aligned} \quad (35)$$

Действительно, воспользовавшись свойствами  $\delta$ -функции, имеем

$$\begin{aligned}\delta(\varepsilon - \varepsilon_f) &= \frac{2}{m} \delta(v_z^2 + v_\perp^2 - v_f^2) = \frac{2}{m} \delta[v_z^2 - (v_f^2 - v_\perp^2)] \\ &= \frac{2}{m} \delta\left[(v_z - \sqrt{v_f^2 - v_\perp^2}) \cdot (v_z + \sqrt{v_f^2 - v_\perp^2})\right] \\ &= \frac{1}{m\sqrt{v_f^2 - v_\perp^2}} \left[ \delta\left(v_z - \sqrt{v_f^2 - v_\perp^2}\right) \right. \\ &\quad \left. + \delta\left(v_z + \sqrt{v_f^2 - v_\perp^2}\right) \right].\end{aligned}$$

В силу симметрии задачи интегрирование по всему диапазону скоростей  $v_z$  заменяется интегрированием по положительному диапазону и результат удваивается.

Преобразуем выражения (32) и (33), приняв обозначения  $\xi = r_\perp/R$ ,  $\rho = v_\perp/v_f$  и пользуясь тем, что  $r_\perp v_\perp = r_\perp v_\perp \cos \varphi$ . Получаем

$$t = R \left( \xi \cos \varphi + \sqrt{1 - \xi^2 \sin^2 \varphi} \right) / v_\perp, \quad (36)$$

$$T = 2R \sqrt{1 - \xi^2 \sin^2 \varphi} / v_\perp. \quad (37)$$

Введем новую переменную

$$z = \frac{R}{v_f} \left( \frac{1}{\tau} - i\omega \right) = \frac{R}{\Lambda} - i \frac{R\omega}{v_f} = x - iy = z(x, y). \quad (38)$$

Тогда выражение (35) принимает следующий вид:

$$\begin{aligned}j_\varphi &= 2e^2 E_\varphi \left( \frac{m}{\hbar} \right)^3 \frac{R}{z v_f} \frac{2v_f^3}{m} \int_0^1 \int_0^{2\pi} \frac{\rho^3}{\sqrt{1 - \rho^2}} \\ &\quad \times \left\{ 1 - \frac{(1 - q) \exp(-vt)}{1 - q \exp(-vT)} \right\} \sin^2 \varphi \, d\rho d\varphi. \quad (39)\end{aligned}$$

Сечение поглощения вычислим, пользуясь формулами (2) и (10),

$$\sigma = \left( \frac{8\pi}{cH_0^2} \right) \frac{1}{2} \operatorname{Re} \int \mathbf{j} \mathbf{E}^* d^3 r = \sigma_0 F(x, y), \quad (40)$$

где

$$\sigma_0 = \frac{3\pi n e^2 R^3 L v_f}{m c^3},$$

$$\begin{aligned}F(x, y) &= y^2 \operatorname{Re} \int_0^1 \int_0^1 \int_0^{2\pi} \xi^3 d\xi \frac{\rho^3}{\sqrt{1 - \rho^2}} \frac{1}{z} \\ &\quad \times \left\{ 1 - \frac{(1 - q) \exp(-vt)}{1 - q \exp(-vT)} \right\} \sin^2 \varphi \, d\rho d\varphi. \quad (41)\end{aligned}$$

Трехкратный интеграл сводится к двукратному замене переменных интегрирования:  $(\xi \cos \varphi, \xi \sin \varphi) \rightarrow (u, w)$ . Действительно,

$$\begin{aligned}F(x, y) &= \frac{y^2}{z(x, y)} \int_0^1 \int_{-1}^1 \int_{-\sqrt{1-w^2}}^{\sqrt{1-w^2}} \frac{\rho^3}{\sqrt{1-\rho^2}} w^2 \\ &\quad \times \left\{ 1 - \frac{(1 - q) \exp\left(-\frac{z(x, y)}{\rho} (u + \sqrt{1 - w^2})\right)}{1 - q \exp\left(-\frac{2z(x, y)}{\rho} \sqrt{1 - w^2}\right)} \right\} d\rho dw du. \quad (42)\end{aligned}$$

Произведя интегрирование по переменной  $u$ , приходим к сумме трех двойных интегралов, описывающей безразмерное сечение поглощения  $F(x, y)$ ,

$$\begin{aligned}F(x, y) &= \frac{y^2}{z(x, y)} \int_0^1 \int_{-1}^1 \frac{\rho^3}{\sqrt{1-\rho^2}} 2w^2 \sqrt{1-w^2} \, d\rho dw \\ &\quad + \frac{y^2}{z(x, y)^2} \int_0^1 \int_{-1}^1 \frac{\rho^4}{\sqrt{1-\rho^2}} w^2 \\ &\quad \times \frac{(1 - q) \exp\left(-\frac{2z(x, y)}{\rho} \sqrt{1 - w^2}\right)}{1 - q \exp\left(-\frac{2z(x, y)}{\rho} \sqrt{1 - w^2}\right)} \, d\rho dw \\ &\quad - \frac{y^2}{z(x, y)^2} \int_0^1 \int_{-1}^1 \frac{\rho^4}{\sqrt{1-\rho^2}} \\ &\quad \times \frac{(1 - q) w^2}{1 - q \exp\left(-\frac{2z(x, y)}{\rho} \sqrt{1 - w^2}\right)} \, d\rho dw. \quad (43)\end{aligned}$$

Последние два интеграла, образующие сумму (43), в элементарных функциях не берутся.

## Обсуждение результатов

В пределе чисто зеркального отражения ( $q = 1$ ) для расчета  $F(x, y)$  получаем выражение

$$\begin{aligned}F(x, y) &= \frac{y^2}{z(x, y)} \\ &\quad \times \int_0^1 \int_{-1}^1 \frac{\rho^3}{\sqrt{1-\rho^2}} 2w^2 \sqrt{1-w^2} \, d\rho dw = \frac{\pi y^2}{6z(x, y)}. \quad (44)\end{aligned}$$

С учетом обозначений (38) и (41) сечение поглощения (40) точно совпадает с классическим результатом (4). Это связано с тем, что при  $q = 1$  граница не оказывает влияния на функцию распределения электронов  $f$ . Вихревой ток внутри зеркально отражающего вытянутого цилиндра (см. (39)) удовлетворяет локальному закону Ома (3) при любом соотношении между

радиусом цилиндра  $R$  и длиной свободного пробега электронов  $\Lambda$ . Таким образом, при зеркальном отражении отсутствуют нелокальные (поверхностные) эффекты.

Независимо от характера отражения (при любом  $q$ ) с ростом размера частицы (при  $x \gg 1$ ) также имеет место макроскопическая асимптотика (44), причем, как видно из формулы (43) (в ней мы пренебрегаем двумя последними интегралами), относительный вклад поверхностных эффектов убывает как  $x^{-1}$  ( $|z| \sim x$ ).

При чисто диффузном отражении ( $q = 0$ ) интеграл (43) упрощается

$$F(x, y) = \frac{y^2}{z(x, y)} \int_0^1 \int_{-1}^1 \frac{\rho^3}{\sqrt{1-\rho^2}} 2w^2 \sqrt{1-w^2} d\rho dw + \frac{y^2}{z(x, y)^2} \int_0^1 \int_{-1}^1 \frac{\rho^4}{\sqrt{1-\rho^2}} w^2 \exp\left(-\frac{2z(x, y)}{\rho} \sqrt{1-w^2}\right) d\rho dw - \frac{y^2}{z(x, y)^2} \int_0^1 \int_{-1}^1 \frac{\rho^4 w^2}{\sqrt{1-\rho^2}} d\rho dw. \quad (45)$$

Подробно проведенный кинетический расчет позволяет уточнить вопрос о применимости известного приближенного описания нелокальных кинетических эффектов в малых металлических частицах. Основная идея этого метода состоит в том, чтобы, сохранив формально локальную связь (3) между током  $j$  и полем  $E$ , модифицировать формулу Друде (см. выше), заменив время релаксации электронов  $\tau$  эффективным временем релаксации  $\tau_{\text{эф}}$ :  $\tau \rightarrow \tau_{\text{эф}}$ , где  $\tau_{\text{эф}}$  зависит от геометрических ( $R$ ) и кинетических ( $q$ ) параметров образца по принципу сложения объемной и поверхностной частот релаксации

$$\tau^{-1} \rightarrow \tau_{\text{эф}}^{-1} = \nu_{\text{эф}} = \tau^{-1} + (1-q)v_f/R. \quad (46)$$

В обозначениях (38) это выглядит как

$$x \rightarrow x_{\text{эф}} = x + 1 - q. \quad (47)$$

Такая модифицированная теория Друде (МД теория) приводит к следующей формуле для безразмерного сечения поглощения  $F(x, y)$ :

$$F_{\text{МД}}(x, y) = \frac{\pi}{6} \frac{(x+1-q)y^2}{(x+1-q)^2 + y^2}. \quad (48)$$

В пределе чисто зеркального отражения ( $q = 1$ ) формула (48), как и точная (43), совпадает с классической (44), однако при  $q \neq 1$  она дает лишь приближение к точной формуле (43). Наибольшее различие между точным кинетическим расчетом и МД теорией достигается в случае чисто диффузного отражения электронов ( $q = 0$ ). Таким образом, МД приближение, основанное на модификации формулы Друде (44) заменой (46), позволяет с точностью не хуже 50%

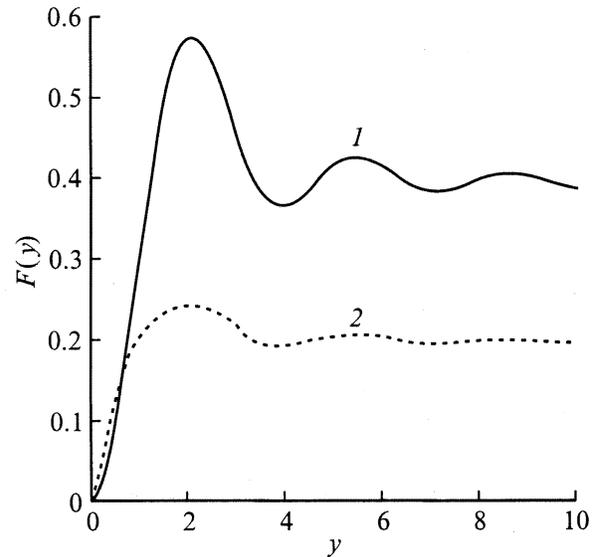


Рис. 1. Зависимость безразмерного сечения поглощения  $F$  от безразмерной частоты  $y$  при фиксированном значении безразмерной обратной длины свободного пробега  $x = 0$  и постоянном коэффициенте отражения  $q$ : 1 — 0, 2 — 0.5, 3 — 1 (совпадает с осью  $y$ ).

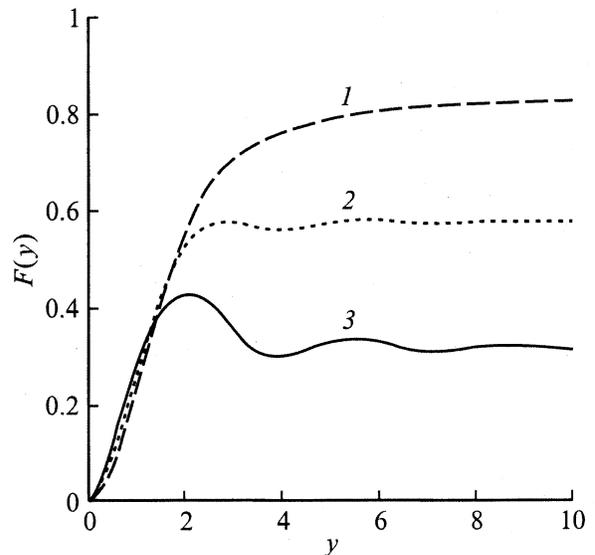
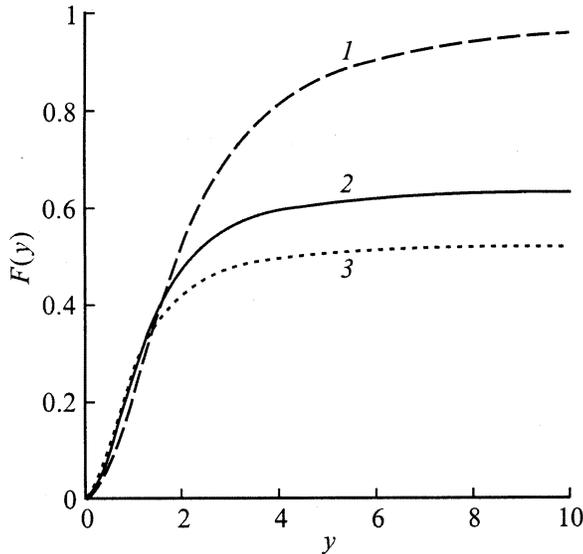


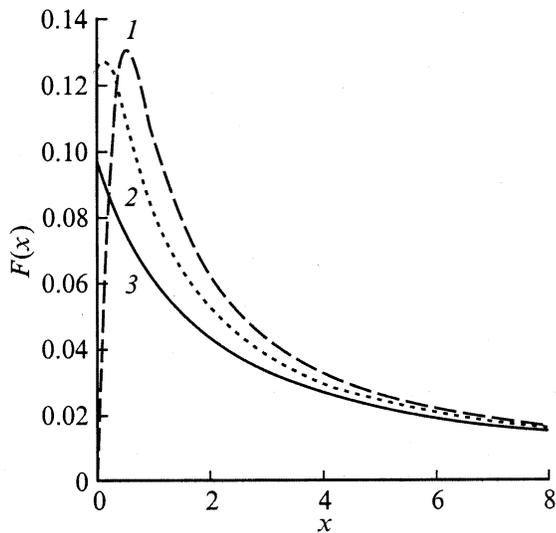
Рис. 2. То же, что на рис. 1, фиксированном значении  $q = 0.2$  и постоянном  $x$ : 1 — 1, 2 — 0.5, 3 — 0.

оценить результат точного кинетического расчета для цилиндрической частицы. При этом следует заметить, что в МД приближении принципиально не воспроизводимы осцилляции частотной зависимости безразмерного сечения поглощения  $F(x, y)$ , которые наиболее сильны в случае диффузного отражения ( $q = 0$ ) для частиц достаточно малого размера ( $x \ll 1$ ).

Анализ результатов, полученных в данной работе, представлен на рис. 1–8.



**Рис. 3.** То же, что на рис. 1, при фиксированном значении  $q = 0.1$  и постоянном  $x = 1$ . 1 — модифицированная формула Друде, 2 — кинетический расчет, 3 — формула Друде.

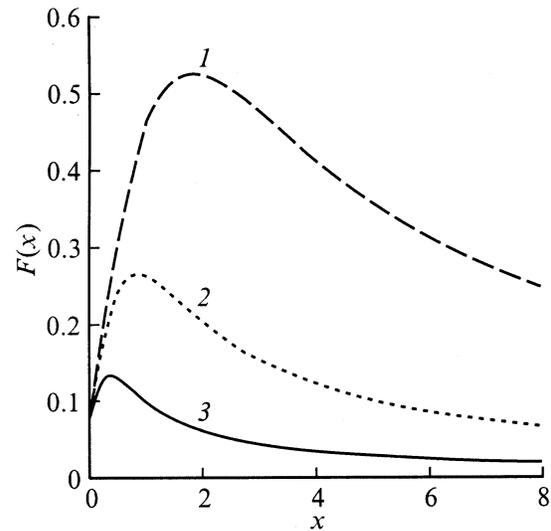


**Рис. 4.** Зависимость безразмерного сечения поглощения  $F$  от безразмерной обратной длины свободного пробега  $x$  при фиксированном значении безразмерной частоты  $y = 0.5$  и постоянном коэффициенте отражения  $q$ : 1 — 1, 2 — 0.5, 3 — 0.

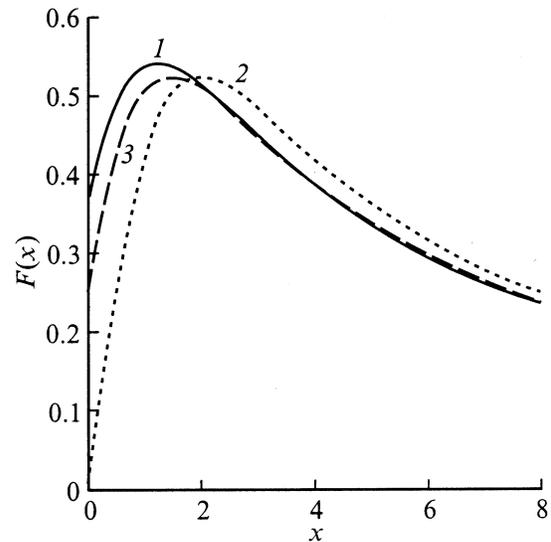
На рис. 1–3 показаны зависимости безразмерного сечения поглощения  $F$  от безразмерной частоты внешнего поля  $y$ . Рис. 1 выполнен для частиц малого размера, когда  $R \ll \Lambda(x = 0)$ . Каждая кривая построена при разных коэффициентах отражения  $q$ . Наличие осцилляций частотной зависимости объясняется тем, что при диффузном отражении электронов от границы частицы ( $q = 0$ ) наиболее существенны поверхностные эффекты, которые убывают по мере возрастания коэффициента отражения  $q$ .

Рис. 2, 3 выполнены при одинаковом коэффициенте отражения  $q$ . Увеличение радиуса частицы приводит к сглаживанию осцилляций частотной зависимости на рис. 2. С ростом коэффициента отражения сечение поглощения уменьшается из-за уменьшения роли поверхностных эффектов при диссипации энергии.

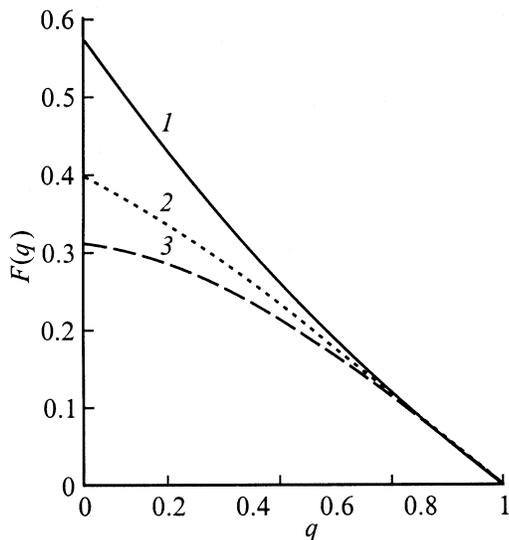
Рис. 3 позволяет сравнить результаты, полученные кинетическим методом, с классическими результатами (44) и (48). Радиус частицы равен длине свободного пробега электронов ( $x = 1$ ), коэффициент отражения  $q = 0.1$ . Когда значение безразмерной частоты  $y$  мало ( $y < 2$ ), сечение поглощения растет пропорционально  $y^2$  и все три формулы дают близкие результаты. При



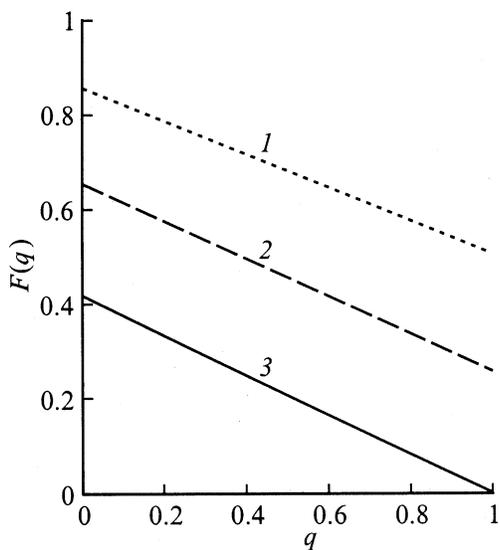
**Рис. 5.** То же, что на рис. 4, при фиксированном значении  $q = 0.8$  и постоянном  $y$ : 1 — 2, 2 — 1, 3 — 0.5.



**Рис. 6.** То же, что на рис. 4, при фиксированном значении  $q = 0.3$  и постоянном  $y = 2$ . 1 — кинетический расчет, 2 — формула Друде, 3 — модифицированная формула Друде.



**Рис. 7.** Зависимость безразмерного сечения поглощения  $F$  от коэффициента отражения  $q$  при фиксированном значении безразмерной частоты  $y$  и постоянной безразмерной обратной длине свободного пробега  $x = 0$ .  $y$ : 1 — 2, 2 — 1, 3 — 1.



**Рис. 8.** То же, что на рис. 7, при фиксированном значении  $y = 5$  и постоянной безразмерной обратной длине свободного пробега  $x$ : 1 — 1, 2 — 0.5, 3 — 0.

дальнейшем росте  $y$  поглощение быстро достигает насыщения. Классические формулы приводят к следующим асимптотикам  $F_{\text{д}}(y) = \pi x/6$ ,  $F_{\text{мд}}(y) = \pi(x + 1 - q)/6$ .

На рис. 4–6 отображены зависимости безразмерного сечения поглощения  $F$  от безразмерной обратной длины свободного пробега  $x$ . Рис. 4 выполнен при заданной безразмерной частоте  $y$  и различных коэффициентах отражения  $q$ . Наиболее острый максимум сечения поглощения на этом рисунке имеет при  $q = 1$  (это совпадает с классическим результатом), причем график

выходит из начала координат. При  $q \neq 1$  безразмерное сечение поглощения отлично от нуля даже при  $x = 0$ . С увеличением радиуса частицы все кривые сливаются и результат переходит в классический. При возрастании частоты сечение поглощения тоже возрастает, так как напряженность вихревого электрического поля прямо пропорциональна частоте внешнего поля.

Рис. 5 показывает, как меняется сечение поглощения при изменении безразмерной частоты  $y$  для данного коэффициента отражения  $q$ : с ростом  $y$  сечение поглощения  $F$  увеличивается.

С помощью рис. 6 можно провести сравнение результатов кинетического расчета и классической теории Друде. При больших  $x$  они практически совпадают. Классические формулы (44), (48) позволяют получить асимптотики:  $F_{\text{д}}(x) = \pi y^2/6x$ ,  $F_{\text{мд}}(x) = \pi y^2/6(x + 1 - q)$ .

По рис. 7 и 8 выясняется влияние  $q$  на сечение поглощения  $F$  коэффициента отражения  $q$ . Из рис. 7 видно, что при отсутствии объемного рассеяния электронов поглощение растет с увеличением безразмерной частоты  $y$ . В этом случае при всех  $y$  сечение поглощения стремится к нулю, когда рассеяние электронов чисто зеркальное ( $q = 1$ ). Это связано с тем, что при больших  $y$  сечение поглощения приблизительно пропорционально сумме частот объемного и поверхностного рассеяния (см. (48)). При заданной частоте с ростом коэффициента отражения (рис. 8) сечение поглощения уменьшается.

## Список литературы

- [1] Петров Ю.И. Физика малых частиц. М.: Наука, 1984. Гл. 7.
- [2] Морохов И.Д., Петинов В.И., Трусов Л.И. и др. // УФН. 1981. Т. 133. С. 653.
- [3] Борн М., Вольф Э. Основы оптики. М.: Наука, 1973. Гл. 13.
- [4] Trodahl H.J. // Phys. Rev. 1979, Vol. B 19. P. 1316–1317.
- [5] Лесскис А.Г., Пастернак В.Е., Юшканов А.А. // ЖЭТФ. 1982. Т. 83, Вып. 1. С. 310–317.
- [6] Займан Дж. Электроны и фононы. М.: ИЛ, 1962. Гл. 11.
- [7] Trodahl H.J. // J. Phys. C. 1982. Vol. 15. P. 7245–7254.
- [8] Mal'shukov A.G. // Sol. St. Commun. 1982. Vol. 44. P. 1257.
- [9] Мальшиуков А.Г. // ЖЭТФ. 1983. Т. 85. С. 700.
- [10] Лесскис А.Г., Юшканов А.А., Яламов Ю.И. // Поверхность. 1987, № 11. С. 115–121.
- [11] Завитаев Э.В., Юшканов А.А., Яламов Ю.И. // ЖТФ. 2001, Т. 71. Вып. 11. С. 114–118.
- [12] Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. // Электродинамика сплошных сред. М.: Наука, 1992. 664 с.
- [13] Харрисон У. Теория твердого тела. М.: Мир, 1972.
- [14] Курант Р. Уравнения с частными производными. М.: Мир, 1964. Гл. 2.