

01;03;07

Двумерное движение газа в кюветах лазеров с ядерной накачкой при небольших энергозкладах в газ

© В.Ю. Матьев

Российский федеральный ядерный Центр —
Всероссийский научно-исследовательский институт экспериментальной физики,
607190 Саров, Нижегородская область, Россия

(Поступило в Редакцию 29 апреля 2002 г.)

Рассмотрено распределение скорости двумерного движения газа в лазерных кюветах, облучаемых ионами, при небольших энергозкладах ионов в газовую среду. Показано, что для плавно-неоднородного энергозклада двумерное движение разделяется на два квазиодномерных: продольная скорость газа практически однородна поперек кюветы и определяется поперечно-усредненным энергозкладом, тогда как поперечная скорость определяется разностью между локальным энергозкладом и поперечно-усредненным.

Введение

Основной принцип ядерной накачки лазеров заключается в создании инверсной заселенности лазерных уровней путем облучения газовой среды ионами — продуктами ядерных реакций (обычно осколками деления из урановых слоев; см. обзор [1]). Неоднородный энергозклад ионов в газ приводит к перераспределению плотности газа в кювете [2–7], что ухудшает качество лазерного излучения [2,6]. Проведены одномерные расчеты поперечного движения газа в герметичных кюветах [2–6] и численный расчет двумерного распределения плотности газа в прокачной кювете [7], однако вопрос о распределении двумерной скорости движения газа решен не был.

В данной работе методом разделения переменных проведен аналитический расчет двумерного движения газа в кювете, облучаемой осколками деления, для малых (по сравнению с внутренней энергией газа) энергозкладов осколков деления в газ, когда поле скоростей газа является безвихревым и описывается скалярным потенциалом, удовлетворяющим уравнению Пуассона [8].

Основные физические процессы

Лазер с ядерной накачкой представляет собой заполненную газом кювету (герметичную или прокачную) с нанесенными на нее изнутри тонкими урановыми слоями, облучающими газ (рис. 1). Здесь рассмотрены кюветы с плоскими слоями в двумерном приближении; для герметичных кювет [5] ось x направлена вдоль оптической оси (длина таких кювет $L \sim 1$ м), для прокачных кювет [6] ось x направлена вдоль потока газа, поперек оптической оси (при этом $L \sim 0.1$ м). Ширина кювет (как герметичных, так и прокачных) $2h \sim 0.01$ м.

Ключевым газодинамическим фактором таких кювет является энергозклад осколков деления, облучающих газ из урановых слоев. Энергию осколков δQ , поглощенную малым объемом газа δV за время δt , можно представить

в виде [4,5]

$$\frac{\delta Q}{\delta V \delta t} = \frac{\Theta P_0}{\gamma - 1} \frac{\rho(x, y, t)}{\rho_0} \psi(t) F(x, y, t), \quad (1)$$

где $\rho(x, y, t)$ — плотность газа; ρ_0 — начальная плотность газа; P_0 — начальное давление газа; $\gamma \approx 5/3$ — отношение теплоемкости при постоянном давлении к теплоемкости при постоянном объеме; $F(x, y, t)$ — функция энергозклада, зависящая от геометрии кюветы, распределения потока нейтронов и плотности газа [9]; $F(x, y, t) \sim 1$; Θ — безразмерный параметр энергозклада; $\psi(t)$ — временной профиль потока нейтронов, интеграл от которого за время облучения газа τ нормирован на единицу.

Для герметичных кювет τ — это время нейтронного импульса (~ 1 мс); для прокачных кювет τ — это характерное время прокачки газа, $\tau = L/U_0 \sim 0.01$ с, где $U_0 \sim 10$ м/с — скорость газа на входе в кювету (при $x = 0$). Параметр Θ введен [4] как термодинамическая мера энергозклада: он равен отношению энергии осколков деления, поглощаемой однородным идеальным газом плотности ρ_0 в кювете за время τ , ко внутренней энергии этого газа. На практике $\Theta < 1$ или $\Theta \sim 1$ [5,6]. В данной работе Θ является малым параметром: полагается $\Theta \ll 1$.

Вторым параметром малости является число Маха M . Поперечная скорость газа $w < h/\tau$, продольная скорость $u < L/(2\tau)$ для герметичных кювет и $u \sim U_0$

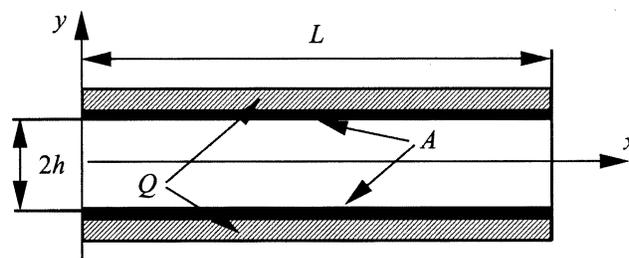


Рис. 1. Кювета лазера с ядерной накачкой: Q — кювета; A — урановый слой.

для прокачных. Для используемых в лазерах с ядерной накачкой газов (He, Ar при давлении $P_0 \sim 1 \text{ atm}$) скорость звука $v_c \sim 10^3 \text{ m/s}$, так что для герметичных кювет $w/v_c < 10^{-2}$, $u/v_c < 0.5$; для прокачных кювет $w/v_c < 10^{-3}$, $u/v_c \sim 10^{-2}$. Поэтому давление газа практически однородно поперек кюветы. Вдоль прокачных кювет давление также однородно, а для герметичных кювет продольную однородность давления можно принять лишь с учетом того, что $u \ll L/(2\tau)$ при $\Theta \ll 1$. Наличие при малых числах Маха заметных перепадов плотности газа, обусловленных внутренними источниками тепла (1), является ключевой особенностью газодинамики лазеров с ядерной накачкой. Вязкость и теплопроводность играют заметную роль лишь в узком пристеночном слое, а в основном объеме кюветы пренебрежимы [2,3,6]. В этих условиях движение газа является по существу самосогласованным по объему кюветы тепловым расширением; условием согласованности служит однородность давления.

Газодинамическая модель

Газ полагается идеальным, невязким и нетеплопроводным, а давление принимается равным своему усредненному по объему кюветы значению

$$p(x, y, t) \approx P(t) \approx \langle p(x, y, t) \rangle_V,$$

скобка $\langle \dots \rangle_V$ означает усреднение по объему кюветы.

Энергия осколков деления ΔQ , выделяемая в элементе газа объемом V , идет на увеличение его внутренней энергии $E = PV/(\gamma - 1)$ и работу на расширение $P\Delta V$,

$$(\gamma - 1)\Delta Q = \gamma P\Delta V + V\Delta P.$$

В пределе $V \rightarrow 0$ с учетом сохранения массы ($\Delta V/V \rightarrow -d\rho/\rho$) имеем

$$(\gamma - 1) \frac{\delta Q}{\delta V \delta t} = \frac{dP}{dt} - \frac{\gamma P}{\rho} \cdot \frac{d\rho}{dt}, \quad (2)$$

причем, согласно уравнению непрерывности,

$$\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dt} + \text{div } \mathbf{v} = 0, \quad \mathbf{v} = (u, w),$$

где \mathbf{v} — скорость газа.

Для герметичных кювет в пренебрежении теплоотводом

$$\frac{dP}{dt} = (\gamma - 1) \left\langle \frac{\delta Q}{\delta V \delta t} \right\rangle_V. \quad (3)$$

В прокачных кюветах $P = P_0$ при стационарной прокачке газа.

Система уравнений (1)–(3) была решена для одномерного поперечного движения газа в герметичной кювете [3,4]. В этом случае функцию энерговклада можно полагать фиксированной в лагранжевых координатах $F(x, y, t) = F_0(y_0)$, где y_0 — лагранжева координата,

определяемая уравнением $\rho_0 dy_0 = \rho(y, t) dy$. Энерговклад при этом легко усредняется, что позволяет сразу определить давление газа. Согласно (1), (3),

$$\begin{aligned} \frac{dP}{dt} &= \Theta P_0 \psi(t) \cdot \frac{1}{h} \int_0^h \frac{\rho(y, t)}{\rho_0} F_0(y_0) dy \\ &= \Theta P_0 \psi(t) \cdot \frac{1}{h} \int_0^h F_0(y_0) dy_0 = \Theta P_0 \psi(t), \end{aligned}$$

поскольку функция энерговклада $F(x, y, t)$ нормирована так [4,5], что ее усредненное по объему значение для кюветы с невозмущенным газом плотности ρ_0 равно единице $\langle F(x, y, 0) \rangle_V = 1$. Отсюда

$$P(t) = \Theta P_0 \int_0^t \psi(t') dt'.$$

При заданном давлении и энерговкладе, привязанном к лагранжевым координатам, уравнение (2) легко решается в лагранжевых координатах (y_0, t) [3,4]; возврат к эйлеровым координатам производится с помощью уравнения непрерывности. Таким образом, для одномерного движения газа уравнения (2), (3), выражающие первый закон термодинамики, позволяют решить газодинамическую задачу полностью. Для малых чисел Маха M это решение является практически точным [3] и даже при $M \rightarrow 1$ оно хорошо описывает динамику сглаженного профиля плотности (на который, однако, накладывается „рябь“ акустических колебаний [3]).

Для двумерных течений ситуация гораздо более сложная. Во-первых, функция энерговклада уже не является фиксированной в лагранжевых координатах. Во-вторых, даже при известном распределении плотности газа определить двумерное движение по одному лишь уравнению непрерывности, вообще говоря, нельзя — нужно задействовать и уравнение Эйлера, введя в рассмотрение неоднородное давление $p(x, y, t)$. Однако для небольших энерговкладов уравнения (2), (3) все же позволяют получить приближенное распределение двумерной скорости газа. По теореме Гельмгольца, векторное поле определяется дивергенцией и ротором (с точностью до постоянного вектора). Дивергенция поля скоростей задана (2), (3), ротор же скорости описывается уравнением Фридмана [10], которое в двумерном случае принимает вид

$$\frac{d\omega}{dt} + \omega \text{div } \mathbf{v} = \frac{1}{\rho^2} |\nabla \rho \times \nabla p|, \quad \omega = |\text{rot } \mathbf{v}|.$$

Для небольших энерговкладов ($\Theta \ll 1$) перепады скорости и плотности газа (а значит, и перепад давления) являются возмущениями первого порядка по Θ , так же

как и интеграл от дивергенции по времени. Поэтому

$$\begin{aligned} \omega(t) &= \exp\left(-\int_0^t \operatorname{div} \mathbf{v} dt'\right) \\ &\times \left\{ \omega(0) + \int_0^t \exp\left(\int_0^{t'} \operatorname{div} \mathbf{v} dt''\right) |\nabla \rho \times \nabla p| \frac{dt'}{\rho^2} \right\} \\ &\approx \omega(0) \cdot \left(1 - \int_0^t \operatorname{div} \mathbf{v} dt'\right) + \int_0^t |\nabla \rho \times \nabla p| \frac{dt'}{\rho^2}, \quad \Theta \ll 1. \end{aligned}$$

Если вначале газ находился в состоянии покоя или безвихревого движения, то величина ротора скорости имеет более высокий порядок малости по Θ , чем величина дивергенции скорости. Таким образом, для случая малых энергокладов (и на начальном этапе для больших энергокладов) течение газа можно полагать безвихревым [8] и ввести скалярный потенциал скорости $\Phi(x, y, t)$

$$\mathbf{v} = \nabla \Phi, \quad \operatorname{div} \mathbf{v} = \Delta \Phi = \frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dt},$$

удовлетворяющий, согласно (2), уравнению Пуассона [8]

$$\Delta \Phi = G(x, y, t), \quad (4)$$

$$G(x, y, t) = \frac{1}{\gamma P} \left\{ (\gamma - 1) \cdot \left(\frac{\delta Q}{\delta V \delta t} \right) - \frac{dP}{dt} \right\}.$$

При малых Θ энергоклад (1) можно рассчитывать для газа с невозмущенной плотностью: $\rho(x, y, t) = \rho_0$, при этом $F(x, y, t) = F_0(x, y)$ — известная функция [9]. В первом порядке по Θ для герметичных кювет с учетом (3)

$$\begin{aligned} G(x, y, t) &= \frac{\gamma - 1}{\gamma P} \left\{ \left(\frac{\delta Q}{\delta V \delta t} \right) - \left\langle \frac{\delta Q}{\delta V \delta t} \right\rangle_V \right\} \\ &\approx \frac{\Theta}{\gamma} \psi(t) \{ F_0(x, y) - \langle F_0(x, y) \rangle_V \}, \quad \Theta \ll 1; \end{aligned} \quad (5)$$

для прокачных кювет при стационарной прокачке газа, когда $\psi(t) = 1/\tau = U_0/L$,

$$G(x, y) = \frac{\gamma - 1}{\gamma P_0} \left(\frac{\delta Q}{\delta V \delta t} \right) \approx \frac{\Theta}{\gamma} \cdot \frac{U_0}{L} F_0(x, y), \quad \Theta \ll 1. \quad (6)$$

Время не входит явно в уравнение для потенциала (4). Распределение скорости квазистационарно в том смысле, что в каждый момент времени образуется свое поле скоростей, которое соответствует давлению газа и распределению энергоклада в данный момент и изменяется во времени лишь вместе с ними. Зависимость скорости от времени фактически является параметрической. Далее аргумент t будет опускаться.

Общее решение для потенциала скорости

Уравнение (4) можно решить методом разделения переменных. Для поперечной скорости $w(x, y)$ граничные условия одинаковы в герметичных и прокачных кюветах

$$w(x, 0) = \frac{\partial \Phi}{\partial y}(x, 0) = 0, \quad w(x, \pm h) = \frac{\partial \Phi}{\partial y}(x, \pm h) = 0,$$

чему соответствуют симметричные собственные функции $\chi_n(y) = \cos(\pi n y/h)$ однородного уравнения $\Delta \Phi = 0$. Потенциал $\Phi(x, y)$ и функцию $G(x, y)$ можно разложить в ряд по этим функциям

$$\begin{aligned} \Phi(x, y) &= \frac{\varphi_0(x)}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(x) \cos(a_n y), \\ \varphi_n(x) &= \frac{2}{h} \int_0^h \Phi(x, y) \cos(a_n y) dy, \end{aligned} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} G(x, y) &= \frac{g_0(x)}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} g_n(x) \cos(a_n y), \\ g_n(x) &= \frac{2}{h} \int_0^h G(x, y) \cos(a_n y) dy, \end{aligned} \quad (8)$$

$$a_n = \frac{\pi n}{h}, \quad \frac{g_0(x)}{2} = \langle G(x, y) \rangle_y,$$

скобки $\langle \dots \rangle_y$ означают усреднение поперек кюветы.

Из (4), (7), (8) видно, что нулевой потенциал $\varphi_0(x)/2$ определяет продольную скорость $U(x)$, для которой

$$\begin{aligned} \frac{dU}{dx} &= \frac{1}{2} \frac{d^2 \varphi_0}{dx^2} = \frac{g_0(x)}{2} = \langle G(x, y) \rangle_y, \\ U(x) &= \int_0^x \langle G(\xi, y) \rangle_y d\xi + U_0. \end{aligned} \quad (9)$$

Для прокачных кювет U_0 — это скорость прокачки газа; для герметичных кювет $U_0 = 0$ и $U(L) = 0$ согласно (5). Из (4), (9) видно, что нулевой потенциал $\varphi_0(x)/2$ соответствует поперечно-усредненной задаче, т.е. описывает продольное движение газа в одномерном приближении.

Для ненулевых коэффициентов разложения $\varphi_n(x)$ из (4), (7), (8)

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \varphi_n}{dx^2} - a_n^2 \varphi_n(x) &= g_n(x), \\ \varphi_n(x) &= \frac{\exp(a_n x)}{2a_n} \left\{ A_n + \int_0^x g_n(\xi) \exp(-a_n \xi) d\xi \right\} \\ &\quad - \frac{\exp(-a_n x)}{2a_n} \left\{ B_n + \int_0^x g_n(\xi) \exp(a_n \xi) d\xi \right\}. \end{aligned} \quad (10)$$

Таким образом, компоненты скорости газа в общем случае имеют вид

$$u(x, y) = \frac{\partial \Phi}{\partial x} = U(x) + \sum_{n=1}^{\infty} v_n(x) \cos(a_n y), \quad (12)$$

$$v_n(x) = \frac{d\varphi_n}{dx} = \frac{\exp(a_n x)}{2} \left\{ A_n + \int_0^x g_n(\xi) \exp(-a_n \xi) d\xi \right\} + \frac{\exp(-a_n x)}{2} \left\{ B_n + \int_0^x g_n(\xi) \exp(a_n \xi) d\xi \right\}, \quad (13)$$

$$w(x, y) = \frac{\partial \Phi}{\partial y} = \sum_{n=1}^{\infty} [-a_n \varphi_n(x)] \sin(a_n y). \quad (14)$$

Значение коэффициентов A_n и B_n определяется граничными условиями для продольной скорости $u(x, y)$. Поскольку для герметичных и прокачных кювет эти условия различны, оба случая следует рассмотреть отдельно.

Герметичные кюветы

В герметичных кюветах граничные условия для продольной скорости $u(x, y)$ такие же, как и для поперечной: $u(0, y) = u(L, y) = 0$. Подстановка этих условий в (12) дает общее решение задачи

$$B_n = -A_n = \frac{1}{\text{sh}(a_n L)} \int_0^L g_n(\xi) \text{ch}[a_n(L - \xi)] d\xi, \\ \varphi_n(x) = \frac{1}{a_n} \left\{ \int_0^x g_n(\xi) \text{sh}[a_n(x - \xi)] d\xi - \frac{\text{ch}(a_n x)}{\text{sh}(a_n L)} \int_0^L g_n(\xi) \text{ch}[a_n(L - \xi)] d\xi \right\}, \quad (15)$$

$$v_n(x) = \int_0^x g_n(\xi) \text{ch}[a_n(x - \xi)] d\xi - \frac{\text{sh}(a_n x)}{\text{sh}(a_n L)} \int_0^L g_n(\xi) \text{ch}[a_n(L - \xi)] d\xi. \quad (16)$$

Если энергозклад поперечно-однороден $F = F(x)$, то $g_n = 0$, $v_n = \varphi_n = 0$ и решение сводится к одномерному продольному движению (9). Если же энергозклад продольно-однороден $F = F(y)$, решение сводится к одномерным поперечным движениям [3,4]. В этом случае, согласно (5), $G = G(y)$, $\langle G \rangle_y = \langle G \rangle_V = 0$, поперечно-усредненная скорость (9) равна нулю, а коэффициенты разложения g_n не зависят от x ; согласно (15), (16),

$$B_n = -A_n = \frac{g_n}{a_n}, \quad \varphi_n = -\frac{g_n}{a_n^2}, \quad v_n = 0,$$

т.е. продольная скорость равна нулю, а для поперечной скорости, согласно (14),

$$w(y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{g_n}{a_n} \sin(a_n y),$$

$$\frac{dw}{dy} = \sum_{n=1}^{\infty} g_n \cos(a_n y) = G(y) - \langle G \rangle_y = G(y),$$

что с учетом (4) соответствует (2) для одномерных поперечных движений. Таким образом, полученное распределение двумерной скорости содержит в себе в качестве частных случаев одномерные течения, как продольные (когда $G = G(x)$, $g_n = 0$), так и поперечные ($G = G(y)$, $\langle G \rangle_y = 0$, g_n не зависит от x).

Общее решение (12)–(16) имеет довольно сложный вид, однако для практически важных случаев оно может быть существенно упрощено. Обычно энергозклад плавно-неоднороден вдоль кюветы: $G(x, y)$ и соответственно $g_n(x)$ существенно изменяются вдоль x на расстояниях $\sim L \gg h$, тогда как фигурирующие в общем решении подинтегральные экспоненты даже для $n \sim 1$ ведут себя круто на расстояниях $\sim h$. Поэтому с хорошей степенью точности функцию $g_n(x)$ можно взять равной ее значению в максимуме затухающих экспонент. Тогда для продольной скорости из (16)

$$v_n(x) \approx \int_0^x \frac{g_n(\xi)}{2} \exp\{-a_n(x - \xi)\} d\xi - \int_x^L \frac{g_n(\xi)}{2} \exp\{-a_n(\xi - x)\} d\xi + \int_0^L \frac{g_n(\xi)}{2} \exp\{-a_n(\xi + x)\} d\xi - \int_0^L \frac{g_n(\xi)}{2} \exp\{-a_n(2L - \xi - x)\} d\xi \\ \approx \frac{g_n(0) - g_n(x)}{2a_n} \exp\{-a_n x\} + \frac{g_n(x) - g_n(L)}{2a_n} \exp\{-a_n(L - x)\},$$

прочие слагаемые экспоненциально малы. Оставшиеся слагаемые столь же малы везде, кроме узких областей у торцов кюветы (продольный размер этих областей порядка h), так что в основной части кюветы продольная скорость имеет лишь поперечно-усредненную составля-

ющую (9). Аналогично для поперечной скорости из (15)

$$\begin{aligned} \varphi_n(x) &\approx -\frac{g_n(x)}{a_n^2} - \Omega(x), \\ \Omega(x) &= \frac{g_n(0) - g_n(x)}{2a_n^2} \exp\{-a_n x\} \\ &+ \frac{g_n(L) - g_n(x)}{2a_n^2} \exp\{-a_n(L-x)\}, \end{aligned} \quad (17)$$

причем добавок $\Omega(x)$ экспоненциально мал везде, кроме тех же торцевых областей. За пределами этих областей, согласно (14),

$$w(x, y) \approx \sum_{n=1}^{\infty} \frac{g_n(x)}{a_n} \sin(a_n y), \quad (18)$$

т. е. поперечная скорость удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial w}{\partial y} \approx \sum_{n=1}^{\infty} g_n(x) \cos(a_n y) = G(x, y) - \langle G(x, y) \rangle_y. \quad (19)$$

Результат (17) можно получить и непосредственно из (10), перейдя к безразмерной продольной координате $X = x/L$ и переписав (10) в виде

$$\mu \frac{d^2 \varphi_n}{dX^2} - \varphi_n = \frac{g_n(X)}{a_n^2}, \quad \mu = \left(\frac{h}{\pi n L} \right)^2 \ll 1.$$

Это типичное сингулярно-возмущенное уравнение (с малым сомножителем при производной) и его решение вдали от торцов может быть выписано сразу

$$\varphi_n(X) \approx -\frac{g_n(X)}{a_n^2},$$

поскольку слагаемое со второй производной пренебрежимо мало везде, кроме как у торцов, где оно призвано обеспечивать выполнение граничных условий.

Итак, если энерговклад плавно-неоднороден вдоль кюветы, в основном объеме кюветы (вне узких торцевых областей) продольная скорость газа определяется поперечно-усредненным энерговкладом, а поперечная скорость — разностью между локальным энерговкладом и поперечно-усредненным.

Сугубо двумерную специфику задачи можно продемонстрировать на модельном примере кюветы со ступенчатым энерговкладом

$$F_0(x, y) = \begin{cases} f(y), & 0 < x < l, \\ 0, & l < x < L, \end{cases} \quad (20)$$

$$\langle F_0(x, y) \rangle_y = f_0 \frac{l}{L}, \quad f_0 = \langle f(y) \rangle_y,$$

причем сечение разрыва энерговклада $x = l$ расположено не слишком близко к торцам кюветы. Физически такая задача соответствует лазерной кювете с большим буферным объемом, куда может вытекать газ (рис. 2).

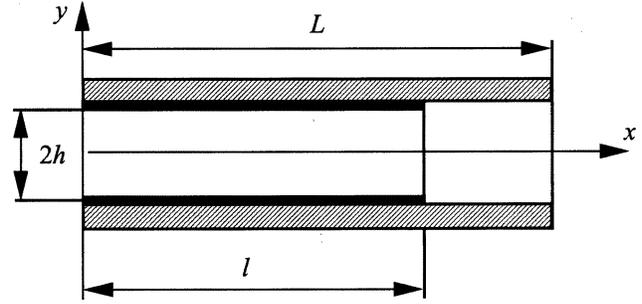


Рис. 2. Герметичная кювета с буферным объемом.

Здесь пренебрегается узким участком у края уранового слоя, где энерговклад плавно падает к нулю (продольный размер этого участка не превосходит удвоенного пробега осколков деления в газе $2R_0 \ll L$). Если параметр энерговклада Θ нормирован на объем активной (облучаемой) части кюветы $0 < x < l$, то $f_0 = 1$ [4,5]. Согласно (5), (9), (20),

$$\langle G(x, y) \rangle_y = \begin{cases} \frac{\Theta}{\gamma} \psi(t) \left(1 - \frac{l}{L}\right), \\ \frac{\Theta}{\gamma} \psi(t) \left(-\frac{l}{L}\right), \end{cases}$$

$$g_n(x) = \begin{cases} g_n & 0 < x < l, \\ 0, & l < x < L, \end{cases}$$

$$U(x) = \begin{cases} \frac{\Theta}{\gamma} \psi(t) \left(1 - \frac{l}{L}\right) x, & 0 < x < l, \\ \frac{\Theta}{\gamma} \psi(t) l \left(1 - \frac{x}{L}\right), & l < x < L. \end{cases} \quad (21)$$

Поперечно-усредненная продольная скорость газа в активной части кюветы линейно растет от торца, достигает максимального значения на краю активного слоя (при $x = l$), а в буферной части линейно падает до нуля на другом торце. Для коэффициентов разложения продольной скорости (16)

$$v_n(x) = \frac{g_n \operatorname{sh}(a_n x)}{a_n \operatorname{sh}(a_n L)} \operatorname{sh}[a_n(L-l)] \approx \frac{g_n}{2a_n} \exp\{-a_n(l-x)\},$$

$$0 < x < l,$$

$$\begin{aligned} v_n(x) &= \frac{g_n}{a_n} \left\{ \frac{\operatorname{sh}(a_n x)}{\operatorname{sh}(a_n L)} \operatorname{sh}[a_n(L-l)] + \operatorname{sh}[a_n(l-x)] \right\} \\ &\approx \frac{g_n}{2a_n} \exp\{-a_n(x-l)\}, \quad l < x < L, \end{aligned} \quad (22)$$

с точностью до экспоненциально малых членов. Отсюда видно, что даже для разрывного энерговклада (20) продольная скорость газа практически не отличается от своего поперечно-усредненного значения (21) как в активной части кюветы, так и в буферном объеме. Лишь на участке вблизи разрыва продольная скорость имеет существенно двумерный характер; размеры этого

участка примерно равны ширине канала h . Для поперечной скорости, согласно (15),

$$\begin{aligned} \varphi_n(x) &= -\frac{g_n}{a_n^2} \left\{ 1 - \frac{\text{ch}(a_n x)}{\text{sh}(a_n L)} \text{sh}[a_n(L-l)] \right\} \\ &\approx -\frac{g_n}{a_n^2} \left\{ 1 - \frac{1}{2} \exp[-a_n(l-x)] \right\}, \quad 0 < x < l, \\ \varphi_n(x) &= -\frac{g_n}{a_n^2} \left\{ \text{ch}[a_n(x-l)] - \frac{\text{ch}(a_n x)}{\text{sh}(a_n L)} \text{sh}[a_n(L-l)] \right\} \\ &\approx -\frac{g_n}{2a_n^2} \exp\{-a_n(x-l)\}, \quad l < x < L \end{aligned} \quad (23)$$

с точностью до экспоненциально малых членов. Двумерные эффекты по-прежнему сосредоточены на том же узком участке вблизи разрыва энергоклада; за его пределами поперечное движение в буферном объеме отсутствует, а в активной части кюветы имеет квазиодномерный характер: согласно (14), (23), поперечная скорость в активной части кюветы имеет тот же вид (18), что и для плавно-неоднородного энергоклада, подчиняясь уравнению (19). В месте разрыва энергоклада (при $x = l$) поперечная скорость, согласно (14), (23), равна половине поперечной скорости в активной части кюветы (18).

Впрочем, полученное распределение скорости на двумерном участке имеет модельный характер, так как именно в пределах этого участка ступенчатая аппроксимация энергоклада является слишком грубым приближением.

Рассмотренные случаи плавно-неоднородного и разрывного энергоклада позволяют сделать общий вывод для двумерных движений газа в герметичных кюветах при малых энергокладах. В тех областях кюветы, где продольный профиль энергоклада плавно-неоднороден (существенно меняется на длине, много большей ширины кюветы), двумерное движение разделяется на два квазиодномерных: продольная скорость практически однородна поперек кюветы и определяется поперечно-усредненным энергокладом согласно (9), тогда как поперечная скорость определяется разностью между локальным энергокладом и поперечно-усредненным согласно (19). В этих областях исходное уравнение (2) расщепляется [8]

$$\gamma P \frac{\partial u}{\partial x} = (\gamma - 1) \left\langle \frac{\delta Q}{\delta V \delta t} \right\rangle_y - \frac{dP}{dt}, \quad (24)$$

$$\gamma P \frac{\partial w}{\partial y} = (\gamma - 1) \left\{ \left\langle \frac{\delta Q}{\delta V \delta t} \right\rangle - \left\langle \frac{\delta Q}{\delta V \delta t} \right\rangle_y \right\}. \quad (25)$$

У торцов кюветы и в переходных участках между плавно-неоднородными областями, где энергоклад резко неоднороден (существенно меняются на длине порядка ширины кюветы), распределение скорости перестраивается от одного квазиодномерного вида к другому. Размеры этих участков примерно равны ширине кюветы, и здесь движение существенно двумерно.

Рассмотрение проводилось для кювет с плоскими слоями, однако основной результат (24), (25) справедлив, очевидно, и для цилиндрических кювет.

Прокачные кюветы

Общие закономерности формирования поля скоростей в прокачных кюветах (рис. 1) такие же, как и в герметичных. Однако из-за отсутствия торцов граничные условия имеют более деликатный характер. Если просто потребовать, чтобы скорость втекающего в кювету газа была поперечно-однородной (и равной U_0), из (11), (13) следуют „нулевые“ граничные условия

$$\varphi_n(0) = v_n(0) = 0, \quad A_n = B_n = 0, \quad (26)$$

которые приводят к расходимости решения на удалении от входа. Дело в том, что дозвуковой поток всякое изменение условий течения в канале (а энергоклад является существенным изменением условий течения) ощущает заранее и еще на подходе к нему перестраивает распределение скорости. Поэтому „нулевые“ условия следует ставить не на входе в кювету (при $x = 0$), а вдали от него (формально при $x \rightarrow -\infty$) и решать задачу как сопряженную. Поскольку $g_n = 0$ при $x < 0$, из (11), (13) с учетом „нулевых“ граничных условий (26) при $x \rightarrow -\infty$ следует

$$\varphi_n(x) = \frac{C_n}{2a_n} \exp(a_n x), \quad v_n(x) = \frac{C_n}{2} \exp(a_n x), \quad x < 0. \quad (27)$$

Сопряжение (27) с (11), (13) при $x = 0$ дает коэффициенты B_n и C_n

$$C_n = A_n \quad B_n = 0.$$

После выхода газа из кюветы его скорость должна быть конечной на любом расстоянии $x \gg L$, это условие с учетом (11), (13) позволяет определить A_n :

$$A_n = - \int_0^L g_n(\xi) \exp(-a_n \xi) d\xi, \quad (28)$$

этот коэффициент остается фактически таким же, как и в герметичных кюветах.

Итак, коэффициенты разложения (11), (13) в прокачных кюветах имеют вид

$$\begin{aligned} \varphi_n(x) &= -\frac{1}{2a_n} \left\{ \int_0^x g_n(\xi) \exp[a_n(\xi-x)] d\xi \right. \\ &\quad \left. + \int_x^L g_n(\xi) \exp[a_n(x-\xi)] d\xi \right\}, \end{aligned}$$

$$v_n(x) = \frac{1}{2} \left\{ \int_0^x g_n(\xi) \exp[a_n(\xi - x)] d\xi - \int_x^L g_n(\xi) \exp[a_n(x - \xi)] d\xi \right\}. \quad (29)$$

При выводе (27)–(29) предполагалось, что действие энерговклада ограничено пределами кюветы $0 < x < L$. В более общем случае таких четких границ действия энерговклада может и не быть. Чтобы избежать сопряжения разных областей, можно потребовать ограниченности скорости на всей продольной оси и получить из (11), (13)

$$\begin{aligned} \varphi_n(x) &= -\frac{1}{2a_n} \left\{ \int_{-\infty}^x g_n(\xi) \exp[a_n(\xi - x)] d\xi + \int_x^{\infty} g_n(\xi) \exp[a_n(x - \xi)] d\xi \right\}, \\ v_n(x) &= \frac{1}{2} \left\{ \int_{-\infty}^x g_n(\xi) \exp[a_n(\xi - x)] d\xi - \int_x^{\infty} g_n(\xi) \exp[a_n(x - \xi)] d\xi \right\}, \end{aligned} \quad (30)$$

что фактически совпадает с (29). При этом аналогично (28)

$$A_n = -\int_{-\infty}^{\infty} g_n(\xi) \exp(-a_n \xi) d\xi, \quad B_n = 0.$$

Для плавно-неоднородного энерговклада ($g_n(x)$ — плавные функции) из (29)

$$\begin{aligned} \varphi_n(x) &\approx -\frac{g_n(x)}{a_n^2} + \frac{g_n(x)}{2a_n^2} \{ \exp[-a_n x] + \exp[-a_n(L - x)] \}, \\ v_n(x) &\approx -\frac{g_n(x)}{2a_n} \{ \exp[-a_n x] - \exp[-a_n(L - x)] \}. \end{aligned} \quad (31)$$

Для прокачных кювет наблюдается та же картина, что и для герметичных: на расстоянии порядка ширины кюветы от входа (т.е. от скачка энерговклада) отличие продольной скорости от своего усредненного значения становится пренебрежимо малым, поперечная скорость приобретает вид (18), удовлетворяя уравнению (19), и задача сводится к расщепленной системе (24), (25).

У входа в кювету на начальном участке действия энерговклада (при $x \rightarrow 0$, но $x > 0$) из (29) с учетом (9), (12), (14)

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{dU}{dx} &\approx \frac{\partial w}{\partial y} \approx \sum_{n=1}^{\infty} \frac{g_n(0)}{2} \cos(a_n y) \\ &= \frac{1}{2} \{ G(0, y) - \langle G(0, y) \rangle_y \}, \quad 0 < x \rightarrow 0, \end{aligned}$$

откуда видно, что в областях, где локальный энерговклад выше среднего по сечению энерговклада, газ расширяется поперек кюветы, а его продольное расширение больше среднего по сечению продольного расширения. В тех же областях, где локальный энерговклад ниже среднего по сечению энерговклада, газ сжимается поперек кюветы, а его продольное расширение меньше среднего по сечению. При $x \rightarrow 0$ с другой стороны от входа (в области, где еще нет энерговклада) из (27), (28) с учетом (12), (14)

$$u(x, y) \approx -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{g_n(0)}{2a_n} \exp(a_n x) \cos(a_n y),$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} \approx -\frac{1}{2} \{ G(0, y) - \langle G(0, y) \rangle_y \},$$

$$w(x, y) \approx \sum_{n=1}^{\infty} \frac{g_n(0)}{2a_n} \exp(a_n x) \sin(a_n y),$$

$$\frac{\partial w}{\partial y} \approx \frac{1}{2} \{ G(0, y) - \langle G(0, y) \rangle_y \}, \quad 0 > x \rightarrow 0;$$

при этом, конечно, $\partial u/\partial x + \partial w/\partial y = 0$ при $x < 0$.

Таким образом, газ, которому предстоит войти в район более высокого энерговклада, заранее начинает расширяться поперек кюветы и потому сжимается (притормаживается) вдоль потока. Газ же, которому предстоит войти в район пониженного энерговклада, наоборот, заранее начинает сужаться поперек кюветы и поэтому расширяется (ускоряется) вдоль потока.

Распределение двумерной скорости газа в прокачных кюветах (12), (14), (29) получено в виде бесконечных рядов. Используя известные формулы [11],

$$2 \sum_{n=1}^{\infty} e^{-nt} \sin(nz) = \frac{\sin z}{\operatorname{ch} t - \cos z},$$

$$2 \sum_{n=1}^{\infty} e^{-nt} \cos(nz) = \frac{\operatorname{sh} t}{\operatorname{ch} t - \cos z} - 1,$$

это распределение с учетом (8), (9) можно преобразовать к виду двойных квадратур

$$u(x, y) = \frac{1}{4h} \int_0^L \int_0^h \Xi(x, y, \xi, \eta) G(\xi, \eta) d\eta d\xi + U_0,$$

$$w(x, y) = \frac{1}{4h} \int_0^L \int_0^h \Psi(x, y, \xi, \eta) G(\xi, \eta) d\eta d\xi, \quad (32)$$

$$\begin{aligned} \Xi(x, y, \xi, \eta) &= \frac{\operatorname{sh} Z(x, \xi)}{\operatorname{ch} Z(x, \xi) - \cos S(y, \eta)} \\ &+ \frac{\operatorname{sh} Z(x, \xi)}{\operatorname{ch} Z(x, \xi) - \cos R(y, \eta)} + 2, \end{aligned}$$

$$\Psi(x, y, \xi, \eta) = \frac{\sin S(y, \eta)}{\operatorname{ch} Z(x, \xi) - \cos S(y, \eta)} + \frac{\sin R(y, \eta)}{\operatorname{ch} Z(x, \xi) - \cos R(y, \eta)},$$

$$Z(x, \xi) = \pi \frac{x - \xi}{h}, \quad S(y, \eta) = \pi \frac{y + \eta}{h},$$

$$R(y, \eta) = \pi \frac{y - \eta}{h}.$$

Представление распределения скоростей в таком виде более удобно для численных расчетов, хотя и не столь прозрачно для качественного анализа. Аналогичные формулы можно получить и для герметичных кювет.

Заключение

Построено распределение двумерной скорости для глубоко дозвуковых течений газа в лазерных кюветах (герметичных и прокачных) с внутренними источниками тепла сравнительно низкой мощности. Показано, что для плавно-неоднородного энерговклада двумерное движение газа из-за разного масштаба продольных и поперечных координат разделяется на два квазиодномерных: продольная скорость газа практически однородна поперек кюветы и определяется поперечно-усредненным энерговкладом, а поперечная скорость определяется разностью между локальным энерговкладом и поперечно-усредненным.

Разделение двумерного движения на два квазиодномерных позволяет проводить приближенные расчеты распределения плотности газа в лазерных кюветах, не прибегая к сложным двумерным газодинамическим программам (таким, как использованные в работе [7]), что весьма упрощает анализ оптических неоднородностей в лазерах с ядерной накачкой.

Расщепленная система уравнений движения газа (24), (25) остается в силе для приосевых областей кюветы и при учете вязкотермического пограничного слоя, если давление рассчитывать с учетом теплоотвода на стенку [4,5].

В рамках расщепленной модели (24), (25) поперечное движение газа приводило бы при очень больших энерговкладах ($\Theta \rightarrow \infty$) к формированию предельного поперечного профиля плотности, обратного к поперечному профилю энерговклада $\rho(y) \propto 1/F(y)$, при $x \rightarrow \infty$ для прокачных кювет, при $t \rightarrow \infty$ для герметичных кювет аналогично случаю одномерного поперечного движения [3,4]. Однако при больших энерговкладах расщепленная модель, вообще говоря, некорректна [8].

Список литературы

- [1] *Schneider R.T., Hohl F.* Advances in Nuclear Science and Technology. New York: Plenum Press, 1984. Vol. 16. P. 123–287.
- [2] *Сизов А.Н., Дерюгин Ю.Н.* // ЖТФ. 1992. Т. 62. Вып. 9. С. 107–111.
- [3] *Torczynski J.R.* // J. Fluid. Mech. 1989. Vol. 201. P. 167–188.
- [4] *Матвеев В.Ю.* // Сб. докл. Второй конф. „Физика ядерно-возбуждаемой плазмы и проблемы лазеров с ядерной накачкой“. Арзамас 16: ВНИИЭФ, 1995. Т. 1. С. 410–420.
- [5] *Матвеев В.Ю., Боровков В.В., Мельников С.П.* // ЖТФ. 2001. Т. 71. Вып. 1. С. 79–85.
- [6] *Боровков В.В., Лаженицев Б.В., Нор-Аревян В.А.* и др. // Квантовая электрон. 1995. Т. 22. № 12. С. 1187–1191.
- [7] *Montierth L.M., Neuman W.A., Nigg D.W., Merrill B.J.* // J. Appl. Phys. 1991. Vol. 69. N 10. P. 6776–6788.
- [8] *Матвеев В.Ю.* // Сб. докл. Второй конф. „Физика ядерно-возбуждаемой плазмы и проблемы лазеров с ядерной накачкой“. Арзамас 16: ВНИИЭФ, 1995. Т. 1. С. 430–442.
- [9] *Матвеев В.Ю.* // ЖТФ. 2001. Т. 71. Вып. 1. С. 72–78.
- [10] *Кочин Н.Е., Кибель И.А., Розе Н.В.* Теоретическая гидромеханика. Ч. 1. М.: ГИТТЛ, 1955. 560 с.
- [11] *Градштейн И.С., Рыжик И.М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Наука, 1971. 1108 с.