

01;05

## Дисперсия диэлектрической проницаемости трех- и четырехкомпонентных матричных сред

© Ю.П. Емец

Институт электродинамики НАН Украины,  
03680 Киев, Украина  
e-mail: emets@irpen.kiev.ua

(Поступило в Редакцию 27 августа 2002 г.)

Изучены особенности дисперсии эффективной диэлектрической проницаемости гетерогенных матричных сред, содержащих разнородные цилиндрические включения. Определены условия существования дисперсии многокомпонентных сред и дана их физическая интерпретация. Показано, что эффективный коэффициент электрических потерь может иметь несколько максимумов, наибольшее число которых равно числу разнотипных включений в материале. Построены диаграммы эффективной диэлектрической проницаемости на комплексной плоскости. Для сред с малой концентрацией включений предложен приближенный метод определения частоты максимумов.

### Введение

При изучении транспортных характеристик неоднородных материалов важная роль отводится анализу дисперсии диэлектрической проницаемости. Для кусочно-однородных, матричных сред основным механизмом поляризации выступает поляризация Максвелла–Вагнера [1,2]. Это макроскопическая, или, как ее еще называют, поверхностная, поляризация (в литературе встречаются также названия: межслойная, объемно-зарядовая, межфазная и др.). Она связана с образованием на границе разнородных сред поверхностных заряженных слоев, возникающих при перемещении свободных зарядов в пределах отдельных фаз композитного материала под действием внешнего переменного электрического поля.

Несмотря на широкую область приложений в различных областях физики, биологии и химии [3,4], теоретические исследования дисперсии диэлектрической проницаемости гетерогенных сред сдерживаются по ряду причин, среди которых необходимо отметить следующие. Во-первых, аналитические расчеты эффективных параметров многокомпонентных систем, имеющие самостоятельное значение и составляющие неотъемлемую часть теории дисперсии неоднородных диэлектриков, сами по себе представляют сложную математическую задачу, которую удастся решить только в отдельных случаях. Во-вторых, при исследовании многокомпонентных материалов возрастает число параметров и безразмерных чисел, характеризующих поведение неоднородной системы в переменном электрическом поле, кроме параметров, определяющих геометрическую структуру композитов, электропроводные и диэлектрические свойства компонентов, добавляются частотные параметры и характерные времена, соотнесенные с каждой фазой системы. Все это усложняет исследование электрической спектроскопии неоднородных материалов.

Наиболее значительные результаты были получены в случае двумерных двухкомпонентных сред, в основ-

ном для систем с двоякопериодическим распределением включений. С помощью эффективных методов теории функций комплексного переменного удалось аналитически рассчитать средние электрофизические характеристики композиционных материалов с переменным составом компонентов вплоть до критического состава, при котором происходит переход металл–диэлектрик [5–10]. Кроме того, были установлены общие преобразования симметрии и соотношения взаимности, позволившие контролировать правильность и точность расчетов эффективных параметров независимо от структуры неоднородных систем [11–14].

Поляризация Максвелла–Вагнера относится к ориентационному типу поляризации, поскольку включения, в пределах которых перемещаются носители зарядов, ведут себя как макроскопические объекты с индуцированными диполями. Действительно, в расчетах электрического поля во внешности сферических тел и цилиндрических включений кругового сечения поле имеет представление в виде бесконечной суммы индуцированных диполей [15,16]. Релаксационные процессы в таких системах описываются классической теорией Дебая [17]. Это подтверждается и конфигурацией диаграммы Коул–Коула, которая в случае малой концентрации цилиндрических включений кругового сечения в согласии с уравнениями Дебая имеет форму полукруга.

Зависимости эффективных значений диэлектрической проницаемости и коэффициента диэлектрических потерь от частоты чувствительны к соотношению между электрофизическими параметрами дисперсной фазы и матрицы, а также к форме включений и их ориентации во внешнем электрическом поле. Эти свойства эффективных параметров были установлены уже в ранних работах по электроскопии неоднородных материалов [1,2,18]. В последующих работах самосогласованные модели гетерогенных сред Винера, Бругемана, Вагнера и других исследователей позволили уточнить роль различных факторов, оказывающих влияние на дисперсию

диэлектрической проницаемости неоднородных сред [4]. Большая часть полученных результатов относится в основном к двухкомпонентным средам.

По сравнению с двухкомпонентными системами многокомпонентные среды обладают более разнообразными свойствами и отличаются многообразием структурного строения. В этом случае в основной фазе (матрице) имеется не один, а несколько сортов включений, которые различаются характеристиками, размерами и взаимным расположением в системе. Проведенные в настоящей работе исследования таких сред позволили установить условия, при которых существует дисперсия диэлектрической проницаемости, и дали возможность изучить диэлектрическую спектроскопию характеристических сред, обладающих тем свойством, что поляризационные явления в разнородных фазах скомпенсированы [19]. Получили теоретическое подтверждение экспериментально установленные факты, показывающие, что двух- и трехвременные релаксационные процессы кусочно-однородных материалов зависят от числа компонентов, из которых они составлены.

Вычисления проводятся в квазистационарном приближении [20], при котором считается, что длина волны переменного электрического поля значительно больше характерных размеров системы и процессы поверхностной поляризации успевают следить за изменением поля. Предполагается, что другие виды поляризации в компонентах материала существенного вклада в поляризацию системы не дают.

### Трехкомпонентные среды

Анализ дисперсии диэлектрической проницаемости гетерогенных систем с поляризацией Максвелла-Вагнера удобно начать с простейших двояко- и однопериодических моделей, вторая из которых при осреднении приобретает анизотропные свойства.

**Матричная система.** Исследуется модель трехкомпонентной диэлектрической среды, состоящей из матрицы с диэлектрической проницаемостью  $\epsilon_1$ , в которой с двоякопериодическим чередованием расположены два вида цилиндрических включений кругового сечения с радиусами  $r_1$  и  $r_2$  и проницаемостями  $\epsilon_2$  и  $\epsilon_3$  соответственно (рис. 1). Длинные цилиндрические тела совпадают по направлению, образуя двумерную двоякопериодическую решетку с квадратными периодическими ячейками размером  $h$ . В плоскости, перпендикулярной к осям цилиндрических тел, электрическое поле в такой системе двумерно и его можно рассчитать с помощью методов теории аналитических функций [15,19].

Осреднение поля на шаге периодической ячейки в такой системе позволяет вычислить ее эффективные электрические характеристики. В среднем структура обладает изотропными свойствами. При не очень большой концентрации включений (соответствующие оценки

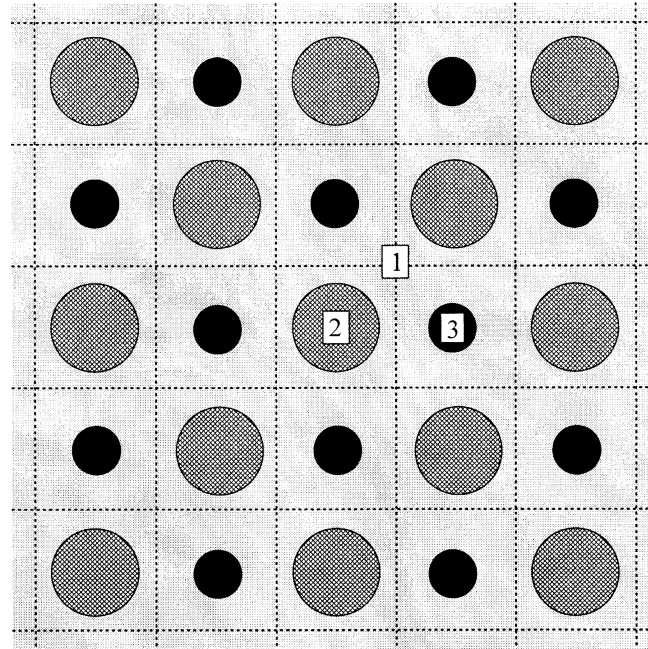


Рис. 1. Фрагмент трехкомпонентного диэлектрического материала с цилиндрическими включениями.

будут даны ниже) эффективная диэлектрическая проницаемость рассматриваемого материала имеет выражение [19]

$$\epsilon_{\text{eff}} = \epsilon_1 \frac{1 - s_1 \Delta_{\epsilon_{12}}/2 - s_2 \Delta_{\epsilon_{13}}/2 + A_1 \Delta_{\epsilon_{12}}^2 + A_2 \Delta_{\epsilon_{13}}^2 + (B_1 + B_2) \Delta_{\epsilon_{12}} \Delta_{\epsilon_{13}}}{1 + s_1 \Delta_{\epsilon_{12}}/2 + s_2 \Delta_{\epsilon_{13}}/2 + A_1 \Delta_{\epsilon_{12}}^2 + A_2 \Delta_{\epsilon_{13}}^2 + (B_1 + B_2) \Delta_{\epsilon_{12}} \Delta_{\epsilon_{13}}}. \quad (1)$$

Здесь

$$s_k = \frac{\pi r_k^2}{h^2} = \pi r_{k*}, \quad r_{k*} = \frac{r_k}{h} \quad (k = 1, 2) \quad (2)$$

— концентрация включений с диэлектрическими проницаемостями  $\epsilon_2$  и  $\epsilon_3$  соответственно;

$$\Delta_{\epsilon_{12}} = \frac{\epsilon_1 - \epsilon_2}{\epsilon_1 + \epsilon_2}, \quad \Delta_{\epsilon_{13}} = \frac{\epsilon_1 - \epsilon_3}{\epsilon_1 + \epsilon_3} \quad (-1 \leq \Delta_{\epsilon_{12}}, \Delta_{\epsilon_{13}} \leq 1) \quad (3)$$

— относительные диэлектрические проницаемости включений. Параметры  $A_k$  и  $B_k$  ( $k = 1, 2$ ), фигурирующие в формуле (1), являются функциями радиусов

$$A_k = 2r_k^2 \left\{ 2r_k^3 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{r_k^4 - 16m^4} + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \left[ \frac{r_k - 2m}{(r_k - 2m)^2 + 4n^2} + \frac{r_k + 2m}{(r_k + 2m)^2 + 4n^2} + \frac{r_k - 2m + 1}{(r_k - 2m + 1)^2 + (2n - 1)^2} + \frac{r_k + 2m - 1}{(r_k + 2m - 1)^2 + (2n - 1)^2} \right] \right\},$$

$$B_k = 2r_{3-k}^2 \left\{ 2r_k^3 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{r_k^4 - (2m-1)^4} + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \left[ \frac{r_k - 2m}{(r_k - 2m)^2 + (2n-1)^2} + \frac{r_k + 2m}{(r_k + 2m)^2 + (2n-1)^2} + \frac{r_k - 2m + 1}{(r_k - 2m + 1)^2 + 4n^2} + \frac{r_k + 2m - 1}{(r_k + 2m - 1)^2 + 4n^2} \right] \right\}. \quad (4)$$

В выражениях (4) радиусы включений  $r_k$  представлены в относительных величинах (см. формулы (2)), причем для краткости письма звездочки опущены.

Формула (1) получена в предположении малой концентрации включений, когда их взаимное влияние друг на друга в системе хорошо описывается приближенным выражением электрического поля, в котором при многодипольном представлении учитываются только первые, главные, индуцированные диполи, расположенные в центрах включений [16]. Учет других диполей, моменты которых быстро уменьшаются с увеличением порядка  $\lambda = 2, 3, \dots$ , как  $\sim (s_k \Delta_{\varepsilon 12} \Delta_{\varepsilon 13})^\lambda$ , вносят при этих условиях малый вклад. Параметры  $\Delta_{\varepsilon 1m}$  ( $m = 2, 3$ ), модули которых в обычных условиях меньше единицы, и концентрации  $s_k$  ( $k = 1, 2$ ) фигурируют в выражении эффективной диэлектрической проницаемости мультипликативно, поэтому формула (1) справедлива и в тех случаях, когда выполняются условия  $|\Delta_{\varepsilon 1m}| \ll 1$  и  $s_k$  конечно, или  $s_k \ll 1$  и  $|\Delta_{\varepsilon 1m}|$  конечно. Точность асимптотически полученной формулы (1) тем выше, чем меньше величины  $|\Delta_{\varepsilon 1m}|$  и  $s_k$ .

Выражение (1) определяет эффективное значение композита, составленного из идеальных диэлектриков. Реальные диэлектрические материалы обладают некоторой электропроводностью. Электрические свойства таких материалов в переменном электрическом поле описываются комплексной диэлектрической проницаемостью

$$\hat{\varepsilon}(\omega) = \varepsilon - i \frac{\sigma}{\varepsilon_0 \omega}, \quad (5)$$

где  $\varepsilon$  — относительная диэлектрическая проницаемость,  $\sigma$  — удельная проводимость,  $\omega$  — круговая частота,  $\varepsilon_0$  — электрическая постоянная; величины  $\sigma$  и  $\varepsilon$  не зависят от частоты  $\omega$  гармонически изменяющегося электрического поля  $\hat{\mathbf{E}} = \hat{\mathbf{E}}_0 \exp(i\omega t)$ .

В квазистационарном приближении формула (1) с комплексными диэлектрическими проницаемостями  $\hat{\varepsilon}_j(\omega)$  ( $j = 1, 2, 3$ ) принимает вид

$$\hat{\varepsilon}_{\text{eff}}(\omega) = \varepsilon'_{\text{eff}}(\omega) - i\varepsilon''_{\text{eff}}(\omega) = \hat{\varepsilon}_1(\omega) \times \frac{1 - s_1 \hat{\Delta}_{12}(\omega)/2 - s_2 \hat{\Delta}_{13}(\omega)/2 + A_1 \hat{\Delta}_{12}^2(\omega) + A_2 \hat{\Delta}_{13}^2(\omega) + (B_1 + B_2) \hat{\Delta}_{12}(\omega) \hat{\Delta}_{13}(\omega)}{1 + s_1 \hat{\Delta}_{12}(\omega)/2 + s_2 \hat{\Delta}_{13}(\omega)/2 + A_1 \hat{\Delta}_{12}^2(\omega) + A_2 \hat{\Delta}_{13}^2(\omega) + (B_1 + B_2) \hat{\Delta}_{12}(\omega) \hat{\Delta}_{13}(\omega)}, \quad (6)$$

где  $\hat{\Delta}_{1m}(\omega)$  — комплексные параметры,

$$\hat{\Delta}_{1m}(\omega) = \Delta'_{1m}(\omega) + i\Delta''_{1m}(\omega) \quad (m = 2, 3), \quad (7)$$

составляющие которых определяются следующими выражениями:

$$\Delta'_{1m}(\omega) = \frac{\Delta_{\varepsilon 1m}(1 - \Delta_{\sigma 1m})^2 + \Gamma_m^2(\omega)\Delta_{\sigma 1m}(1 - \Delta_{\varepsilon 1m})^2}{(1 - \Delta_{\sigma 1m})^2 + \Gamma_m^2(\omega)(1 - \Delta_{\varepsilon 1m})^2},$$

$$\Delta''_{1m}(\omega) = \frac{\Gamma_m(\omega)(\Delta_{\varepsilon 1p} - \Delta_{\sigma 1m})(1 - \Delta_{\sigma 1m})(1 - \Delta_{\varepsilon 1m})}{(1 - \Delta_{\sigma 1m})^2 + \Gamma_m^2(\omega)(1 - \Delta_{\varepsilon 1m})^2}. \quad (8)$$

Здесь  $\Delta_{\sigma 1m}$  — относительная проводимость,

$$\Delta_{\sigma 1m} = \frac{\sigma_1 - \sigma_m}{\sigma_1 + \sigma_m} \quad (-1 \leq \Delta_{\sigma 1m} \leq 1). \quad (9)$$

В выражениях (6)–(8) входят три частотных параметра:

$$\Gamma_j(\omega) = \frac{\omega_{0j}}{\omega} = \frac{\sigma_j}{\varepsilon_0 \varepsilon_j \omega} \quad (0 \leq \Gamma_j \leq \infty); \quad j = 1, 2, 3, \quad (10)$$

представляющие собой отношения максвелловских частот  $\omega_{0j} = \sigma_j / \varepsilon_0 \varepsilon_j$  к круговой частоте  $\omega$ . В энергетической трактовке они определяют тангенсы углов электрических потерь в компонентах материала. Параметры  $\Gamma_j$  независимы, они связаны между собой линейными соотношениями

$$\Gamma_1(\omega) = \frac{\varepsilon_3 \sigma_1}{\varepsilon_1 \sigma_2} \Gamma_2(\omega) = \frac{\varepsilon_3 \sigma_1}{\varepsilon_1 \sigma_3} \Gamma_3(\omega) \quad (11)$$

или в терминах параметров  $\Delta_{\varepsilon 1m}$  и  $\Delta_{\sigma 1m}$  ( $m = 2, 3$ )

$$\Gamma_1(\omega) = \frac{(1 - \Delta_{\varepsilon 12})(1 + \Delta_{\sigma 12})}{(1 + \Delta_{\varepsilon 12})(1 - \Delta_{\sigma 12})} \Gamma_2(\omega) = \frac{(1 - \Delta_{\varepsilon 13})(1 + \Delta_{\sigma 13})}{(1 + \Delta_{\varepsilon 13})(1 - \Delta_{\sigma 13})} \Gamma_3(\omega). \quad (12)$$

В дальнейшем удобно ввести относительную частоту  $\Delta_{\omega j}$ , определенную следующим образом:

$$\Delta_{\omega j} = \frac{\omega}{\omega_{0j} + \omega} \quad (0 \leq \Delta_{\omega j} \leq 1). \quad (13)$$

Когда круговая частота  $\omega$  непрерывно изменяется от 0 до  $\infty$ , относительная величина  $\Delta_{\omega j}$  пробегает соответственно все значения в интервале от 0 до 1.

Возвращаясь к выражению (6), его можно теперь представить в таком виде:

$$\hat{\varepsilon}_{\text{eff}}(\omega) = \varepsilon'_{\text{eff}}(\omega) - i\varepsilon''_{\text{eff}}(\omega) = \varepsilon_1 [1 - i\Gamma_1(\omega)] \frac{U^-(\omega) + iV^+(\omega)}{U^+(\omega) + iV^-(\omega)}. \quad (14)$$

Здесь действительные функции  $U^\pm(\omega)$  и  $V^\pm(\omega)$  определены выражениями

$$U^\pm(\omega) = 1 \pm s_1 \Delta'_{12}(\omega)/2 \pm s_2 \Delta'_{13}(\omega)/2 + A_1 [\Delta_{12}^2(\omega) - \Delta_{12}''^2(\omega)] + A_2 [\Delta_{13}^2(\omega) - \Delta_{13}''^2(\omega)] + (B_1 + B_2) [\Delta'_{12}(\omega)\Delta'_{13}(\omega) - \Delta_{12}''(\omega)\Delta_{13}''(\omega)],$$

$$V^{\pm}(\omega) = \pm s_1 \Delta''_{12}(\omega)/2 \pm s_2 \Delta''_{13}(\omega)/2 - 2A_1 \Delta'_{12}(\omega) \Delta''_{12}(\omega) - 2A_2 \Delta'_{13}(\omega) \Delta''_{13}(\omega) - (B_1 + B_2) [\Delta'_{12}(\omega) \Delta''_{13}(\omega) + \Delta'_{13}(\omega) \Delta''_{12}(\omega)]. \quad (15)$$

Оценки показывают, что при малых радиусах цилиндрических тел и, следовательно, малых концентрациях включений квадратичными членами, содержащих функции  $\Delta'_{12}(\omega)$ ,  $\Delta''_{12}(\omega)$ ,  $\Delta'_{13}(\omega)$  и  $\Delta''_{13}(\omega)$ , в выражениях (15) можно пренебречь. Это можно сделать и в том случае, когда неоднородность материала мала  $|\Delta_{\epsilon 1m}| \ll 1$  и  $|\Delta_{\sigma 1m}| \ll 1$ . Тогда формулу (14) можно представить в таком виде:

$$\begin{aligned} \epsilon'_{\text{eff}}(\omega) &= \epsilon'_{\text{eff}}(\omega) - i\epsilon''_{\text{eff}}(\omega) = \epsilon_1 [1 - i\Gamma_1(\omega)] \\ &\times \frac{1 - s_1 \Delta'_{12}(\omega)/2 - s_2 \Delta'_{13}(\omega)/2 + i[s_1 \Delta''_{12}(\omega)/2 + s_2 \Delta''_{13}(\omega)/2]}{1 + s_1 \Delta'_{12}(\omega)/2 + s_2 \Delta'_{13}(\omega)/2 - i[s_1 \Delta''_{12}(\omega)/2 + s_2 \Delta''_{13}(\omega)/2]}. \quad (16) \end{aligned}$$

Из выражений (8) непосредственно следует, что при выполнении равенств

$$\Delta_{\epsilon 12} = \Delta_{\sigma 12}, \quad \Delta_{\epsilon 13} = \Delta_{\sigma 13}, \quad (17)$$

или, иначе

$$\epsilon_1 \sigma_2 = \epsilon_2 \sigma_1, \quad \epsilon_1 \sigma_3 = \epsilon_3 \sigma_1, \quad (18)$$

параметры  $\Delta'_{1p}(\omega)$  и  $\Delta''_{1p}(\omega)$  принимают значения

$$\begin{aligned} \Delta'_{12}(\omega) &= \Delta_{\epsilon 12}, \quad \Delta'_{13}(\omega) = \Delta_{\epsilon 13}, \\ \Delta''_{12}(\omega) &= \Delta''_{13}(\omega) = 0. \quad (19) \end{aligned}$$

Трехкомпонентная среда при этих условиях характеризуется одним частотным параметром

$$\Gamma_1(\omega) = \Gamma_2(\omega) = \Gamma_3(\omega). \quad (20)$$

Подстановка значений параметров (19) в выражения (14), (15) дает

$$\begin{aligned} \epsilon'_{\text{eff}} &= \epsilon_1 \frac{1 - s_1 \Delta'_{\epsilon 12}/2 - s_2 \Delta'_{\epsilon 13}/2 + A_1 \Delta_{\epsilon 12}^2 + A_2 \Delta_{\epsilon 13}^2 + (B_1 + B_2) \Delta'_{\epsilon 12} \Delta'_{\epsilon 13}}{1 + s_1 \Delta'_{\epsilon 12}/2 + s_2 \Delta'_{\epsilon 13}/2 + A_1 \Delta_{\epsilon 12}^2 + A_2 \Delta_{\epsilon 13}^2 + (B_1 + B_2) \Delta'_{\epsilon 12} \Delta'_{\epsilon 13}}, \\ \epsilon''_{\text{eff}}(\omega) &= \epsilon'_{\text{eff}} \Gamma_1(\omega). \quad (21) \end{aligned}$$

Как видно из первого выражения (21), эффективная диэлектрическая проницаемость  $\epsilon'_{\text{eff}}$  не зависит от частоты. Соотношения (18) определяют, таким образом, условие, при котором не проявляется дисперсия диэлектрической проницаемости рассматриваемого трехкомпонентного матричного композита. В отличие от двухкомпонентного неоднородного материала, для которого имеется только одно соотношение вида (17)

или (18), в трехкомпонентной системе их два и они должны выполняться совместно.

Коэффициент электрических потерь  $\epsilon''_{\text{eff}}$  при этом зависит от частоты и его частотная зависимость определяется только функцией  $\Gamma_1(\omega)$ .

Если концентрации двух сортов включений в композитном материале одинаковы ( $s_1 = s_2$ ) и диэлектрические проницаемости компонентов удовлетворяют соотношению

$$\epsilon_1 = \sqrt{\epsilon_2 \epsilon_3} \quad (\Delta_{\epsilon 12} = -\Delta_{\epsilon 13}), \quad (22)$$

то согласно первому выражению (21) эффективная диэлектрическая проницаемость равна проницаемости матрицы  $\epsilon_{\text{eff}} = \epsilon_1$ . Соотношения (22) выделяют класс так называемых характеристических сред [19]. Их отличительная особенность состоит в том, что векторы поляризации в разнородных включениях имеют противоположные направления и взаимно компенсируют друг друга.

Чтобы проанализировать значения комплексной эффективной диэлектрической проницаемости в предельных случаях, будем исходить из приближенного выражения (16). В этом выражении, как и в других, прежде всего необходимо зафиксировать один из трех частотных параметров  $\Gamma_j(\omega)$  ( $j = 1, 2, 3$ ), относительно которого будут проводиться вычисления. Выбор конкретного параметра не имеет принципиального значения и диктуется лишь удобствами анализа. Для определенности в дальнейшем везде, если специально не оговорено, расчеты ведутся относительно параметра  $\Gamma_2(\omega)$ , причисленного к фазе 2, которая характеризуется электрофизическими параметрами  $\epsilon_2$  и  $\sigma_2$  и максвелловской частотой  $\omega_{02} = \sigma_2/\epsilon_0 \epsilon_2$ . Соответственно в частотных зависимостях в качестве переменной будет использована относительная частота  $\Delta_{\omega 2}$  (см. формулы(10)–(13)).

При  $\omega \rightarrow 0$  ( $\Gamma_2(\omega) \rightarrow \infty$ ,  $\Delta_{\omega 2} \rightarrow 0$ ) из выражения (16) предельным переходом получим следующее значение эффективной диэлектрической проницаемости:

$$\begin{aligned} \epsilon'_{\text{eff}}(0) &= \epsilon_1 \left\{ \frac{1 - s_1 \Delta_{\epsilon 12}/2 - s_2 \Delta_{\epsilon 13}/2}{1 + s_1 \Delta_{\epsilon 12}/2 + s_2 \Delta_{\epsilon 13}/2} + \frac{1}{1 + s_1 \Delta_{\epsilon 12}/2 + s_2 \Delta_{\epsilon 13}/2} \left[ s_1 (\Delta_{\sigma 12} - \Delta_{\epsilon 12}) \frac{1 + \Delta_{\sigma 12}}{1 + \Delta_{\epsilon 12}} + s_2 (\Delta_{\sigma 13} - \Delta_{\epsilon 13}) \frac{1 + \Delta_{\sigma 13}}{1 + \Delta_{\epsilon 13}} \right] \right\}. \quad (23) \end{aligned}$$

Электростатическая величина  $\epsilon'_{\text{eff}}(0)$  зависит, как видно, от концентрации включений и всех электрофизических параметров системы. Коэффициент электрических потерь при этом имеет особенность типа  $\sim 1/\omega$ ,

$$\begin{aligned} \epsilon''_{\text{eff}}(0) &= \epsilon_1 \Gamma_2(0) \\ &\times \frac{(1 - \Delta_{\epsilon 12})(1 + \Delta_{\sigma 12})(1 - s_1 \Delta_{\epsilon 12}/2 - s_2 \Delta_{\epsilon 13}/2)}{(1 + \Delta_{\epsilon 12})(1 - \Delta_{\sigma 12})(1 + s_1 \Delta_{\epsilon 12}/2 + s_2 \Delta_{\epsilon 13}/2)}. \quad (24) \end{aligned}$$

Неограниченный рост  $\varepsilon''_{\text{eff}}(0)$  при  $\omega \rightarrow 0$  обусловлен сквозной проводимостью композитного материала.

В другом предельном случае,  $\omega \rightarrow \infty$  ( $\Gamma_2(\omega) \rightarrow 0$ ,  $\Delta_{\omega 2} \rightarrow 1$ ), оптические значения эффективной диэлектрической проницаемости и коэффициента потерь имеют выражения

$$\varepsilon'_{\text{eff}}(\infty) = \varepsilon_1 \frac{1 - s_1 \Delta_{\varepsilon 12}/2 - s_2 \Delta_{\varepsilon 13}/2}{1 + s_1 \Delta_{\varepsilon 12}/2 + s_2 \Delta_{\varepsilon 13}/2}, \quad \varepsilon''_{\text{eff}}(\infty) = 0. \quad (25)$$

При высоких частотах величина  $\varepsilon'_{\text{eff}}(\infty)$  зависит только от концентрации включений и диэлектрической проницаемости компонентов материала. Потери в композите при этих условиях отсутствуют.

Наглядно об особенностях частотных зависимостей эффективной комплексной диэлектрической проницаемости можно судить, исследуя рассматриваемую неоднородную систему в случае, когда электропроводностью обладают только включения, а матрица представлена идеальным диэлектриком

$$\sigma_1 = 0 \quad (\Delta_{\sigma 12} = \Delta_{\sigma 13} = -1); \quad \sigma_2, \sigma_3 \neq 0. \quad (26)$$

Тогда параметры  $\Delta'_{1m}(\omega)$ ,  $\Delta''_{1m}(\omega)$  ( $m = 2, 3$ ), определенные формулами (8), запишутся так:

$$\Delta'_{1m}(\omega) = \frac{4\Delta_{\varepsilon 1m} - \Gamma_m^2(\omega)(1 - \Delta_{\varepsilon 1m})^2}{4 + \Gamma_m^2(\omega)(1 - \Delta_{\varepsilon 1m})^2},$$

$$\Delta''_{1m}(\omega) = \frac{2\Gamma_m(\omega)(1 - \Delta_{\varepsilon 1m})}{4 + \Gamma_m^2(\omega)(1 - \Delta_{\varepsilon 1m})^2}. \quad (27)$$

При получении предельных значений эффективной комплексной диэлектрической проницаемости будем теперь исходить из общего выражения (14).

При  $\omega \rightarrow 0$  ( $\Gamma_2(\omega) \rightarrow \infty$ ,  $\Delta_{\omega 2} \rightarrow 0$ ) эффективные электростатические величины  $\varepsilon'_{\text{eff}}(0)$ ,  $\varepsilon''_{\text{eff}}(0)$  имеют выражения

$$\varepsilon'_{\text{eff}}(0) = \varepsilon_1 \frac{1 + s_1/2 + s_2/2 + A_1 + A_2 + B_1 + B_2}{1 - s_1/2 - s_2/2 + A_1 + A_2 + B_1 + B_2},$$

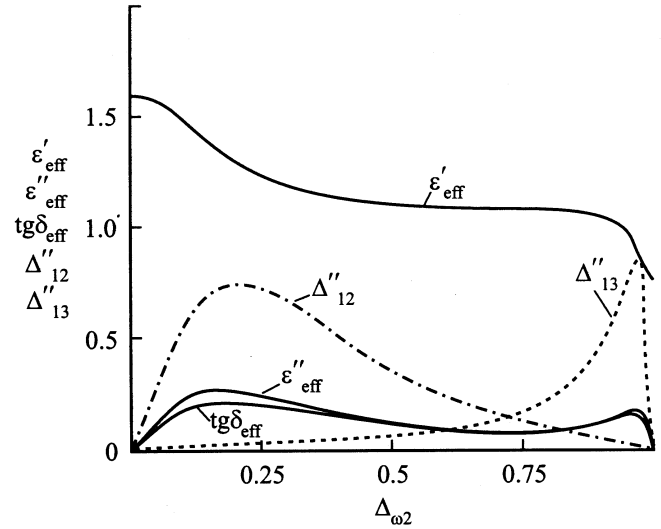
$$\varepsilon''_{\text{eff}}(0) = 0. \quad (28)$$

При  $\omega \rightarrow \infty$  ( $\Gamma_2(\omega) \rightarrow 0$ ,  $\Delta_{\omega 2} \rightarrow 1$ ) получаем оптические значения эффективной диэлектрической проницаемости  $\varepsilon'_{\text{eff}}(\infty)$  и коэффициента электрических потерь  $\varepsilon''_{\text{eff}}(\infty)$

$$\varepsilon'_{\text{eff}}(\infty) = \varepsilon_1 \frac{1 - s_1 \Delta_{\varepsilon 12}/2 - s_2 \Delta_{\varepsilon 13}/2 + A_1 \Delta_{\varepsilon 12}^2 + A_2 \Delta_{\varepsilon 13}^2 + (B_1 + B_2) \Delta_{\varepsilon 12} \Delta_{\varepsilon 13}}{1 + s_1 \Delta_{\varepsilon 12}/2 + s_2 \Delta_{\varepsilon 13}/2 + A_1 \Delta_{\varepsilon 12}^2 + A_2 \Delta_{\varepsilon 13}^2 + (B_1 + B_2) \Delta_{\varepsilon 12} \Delta_{\varepsilon 13}},$$

$$\varepsilon''_{\text{eff}}(\infty) = 0. \quad (29)$$

В рассматриваемом материале эффективная электростатическая диэлектрическая проницаемость  $\varepsilon'_{\text{eff}}(0)$  определяется проницаемостью матрицы с коэффициентом пропорциональности, который является функцией



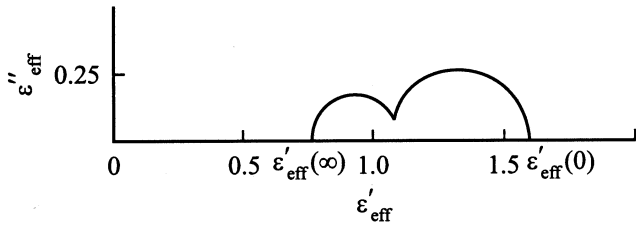
**Рис. 2.** Зависимости эффективной диэлектрической проницаемости, эффективного коэффициента потерь, тангенса эффективного угла электрических потерь и параметров  $\Delta''_{12}$ ,  $\Delta''_{13}$  от относительной частоты  $\Delta_{\omega 2}$  при концентрациях включений  $s_1 = 0.25$ ,  $s_2 = 0.20$  и параметрах  $\Delta_{\varepsilon 12} = 0.5$ ,  $\Delta_{\varepsilon 13} = 0.714$ ,  $\Delta_{\sigma 12} = \Delta_{\sigma 13} = -1.0$ .

только геометрических характеристик системы, причем по величине он больше единицы. Для предельных значений частоты,  $\omega \rightarrow 0$  и  $\omega \rightarrow \infty$ , эффективный коэффициент электрических потерь композита принимает нулевое значение и, следовательно, частотная зависимость  $\varepsilon''_{\text{eff}}(\omega)$  имеет в интервале  $0 \leq \omega < \infty$  по крайней мере один максимум. В действительности, как показывают исследования, для трехкомпонентной матричной системы при определенных соотношениях электрофизических параметров функция  $\varepsilon''_{\text{eff}}(\omega)$  может иметь два максимума, не больше.

Отмеченные особенности эффективной комплексной диэлектрической проницаемости присущи неоднородным матричным системам, у которых матрица не обладает электропроводностью и, таким образом, отсутствует сквозная проводимость системы. Это видно из сравнения формул (28) и (29) с выражениями (23)–(25) для материала с проводящей матрицей, у которой  $\varepsilon''_{\text{eff}}(\omega) \rightarrow \infty$  при  $\omega \rightarrow 0$ .

Значения эффективной диэлектрической проницаемости  $\varepsilon'_{\text{eff}}(\omega)$  при  $\omega \rightarrow \infty$  в двух случаях  $\sigma_1 \neq 0$  и  $\sigma_1 = 0$  определяются только диэлектрическими проницаемостями компонентов и геометрическими характеристиками системы; величина  $\varepsilon'_{\text{eff}}(\infty)$ , таким образом, не зависит от проводящих свойств включений.

Для иллюстрации сказанного на рис. 2 по формулам (28) и (29) построены частотные зависимости эффективной диэлектрической проницаемости  $\varepsilon'_{\text{eff}}(\Delta_{\omega 2})$ , эффективного коэффициента электрических потерь  $\varepsilon''_{\text{eff}}(\Delta_{\omega 2})$  и тангенса эффективного угла электрических потерь  $\text{tg} \delta_{\text{eff}}(\Delta_{\omega 2})$  от относительной ча-



**Рис. 3.** Диаграмма эффективной комплексной диэлектрической проницаемости трехкомпонентного диэлектрика с параметрами, указанными на рис. 2.

стоты  $\Delta_{\omega 2}$  для следующих безразмерных параметров:  $s_1 = 0.25$ ,  $s_2 = 0.20$ ,  $\epsilon_1 = 12$ ,  $\epsilon_2 = 4$ ,  $\epsilon_3 = 2$ ,  $\sigma_1 = 0$ ,  $\sigma_2 = 1$ ,  $\sigma_3 = 100$  ( $\Delta_{\epsilon 12} = 0.5$ ,  $\Delta_{\epsilon 13} = 0.714$ ,  $\Delta_{\sigma 12} = \Delta_{\sigma 13} = -1$ ). Графики построены для относительных величин  $\epsilon''_{\text{eff}*} = \epsilon''_{\text{eff}}/\epsilon_1$  и  $\epsilon'_{\text{eff}*} = \epsilon'_{\text{eff}}/\epsilon_1$ , и звездочки, как обычно, опущены. Для рассматриваемых условий на рис. 3 приведена диаграмма комплексной диэлектрической проницаемости, представленная двумя полуокружностями, которые пересекаются в точке, где эффективный коэффициент электрических потерь принимает минимальное значение между двумя экстремумами.

Кривые  $\epsilon''_{\text{eff}}(\Delta_{\omega 2})$  и  $\epsilon'_{\text{eff}}(\epsilon'_{\text{eff}})$  на рис. 2 и 3 имеют два максимума. В соответствии с теорией Дебая [17] это означает, что для принятых условий система характеризуется наличием двух времен релаксации. Максимумы зависимости  $\epsilon''_{\text{eff}}(\Delta_{\omega 2})$  совпадают с точками перегиба зависимости  $\epsilon'_{\text{eff}}(\Delta_{\omega 2})$ .

Непосредственное нахождение частот, при которых функция  $\epsilon''_{\text{eff}}(\Delta_{\omega 2})$  принимает экстремальные значения, из выражений (14), (15) приводит к громоздким и плохо обозримым результатам. Поэтому для определения частот максимумов можно воспользоваться приближенной оценкой, обладающей тем преимуществом, что она позволяет сократить объем вычислений и представить результаты в физически наглядном виде. Исходные предпосылки при получении приближенных оценок таковы.

При  $\sigma_1 = 0$  ( $\Delta_{\sigma 12} = -1$ ) на основании выражений (14) и (15) эффективный коэффициент электрических потерь можно представить в виде

$$\epsilon''_{\text{eff}}(\Delta_{\omega 2}) = \frac{-s_1 \Delta'_{12}(\Delta_{\omega 2}) - s_2 \Delta'_{13}(\Delta_{\omega 2}) + \dots}{1 + s_1 \Delta'_{12}(\Delta_{\omega 2}) + s_2 \Delta'_{13}(\Delta_{\omega 2}) + \dots}, \quad (30)$$

где последующие члены в числителе и знаменателе дроби содержат двучленные произведения вида  $\Delta'^2_{12}(\Delta_{\omega 2})$ ,  $\Delta'_{12}(\Delta_{\omega 2})\Delta'_{13}(\Delta_{\omega 2})$ ,  $\Delta'_{13}(\Delta_{\omega 2})\Delta'_{12}(\Delta_{\omega 2})$  и другие. Здесь параметры  $\Delta'_{1m}(\Delta_{\omega 2})$  и  $\Delta''_{1m}(\Delta_{\omega 2})$  ( $m = 2, 3$ ) определены формулами (27). Модули величин всех последующих членов всегда меньше по абсолютной величине первых двух членов, указанных в выражении (30). Причем разница между ними тем больше, чем меньше неоднородность электрофизических характеристик материала и чем меньше концентрации включений каждого типа. Исходя из этих положений можно заключить, что

основной вклад в величину эффективного коэффициента электрических потерь вносят первые члены числителя дроби (30), которые содержат параметры  $\Delta''_{12}(\Delta_{\omega 2})$  и  $\Delta''_{13}(\Delta_{\omega 2})$  первой степени. Поскольку эти параметры как функции относительной частоты  $\Delta_{\omega 2}$  имеют максимумы, то можно ожидать, что последние определяют максимумы функции  $\epsilon''_{\text{eff}}(\Delta_{\omega 2})$ . Это предположение действительно оправдывается и подтверждается многими конкретными расчетами. Применительно к рассматриваемому случаю результаты вычислений графически представлены на рис. 2. Как видно из графиков, максимумы эффективного коэффициента электрических потерь  $\epsilon''_{\text{eff}}(\Delta_{\omega 2})$  действительно приблизительно совпадают с экстремумами параметров  $\Delta''_{12}(\Delta_{\omega 2})$  и  $\Delta''_{13}(\Delta_{\omega 2})$ , более точно при высоких частотах и менее точно при низких. Таким образом, при объяснении спектральных свойств эффективного коэффициента электрических потерь  $\epsilon''_{\text{eff}}(\Delta_{\omega 2})$  качественный анализ можно провести, исследуя частотные зависимости параметров  $\Delta''_{12}(\Delta_{\omega 2})$  и  $\Delta''_{13}(\Delta_{\omega 2})$ .

Параметр  $\Delta''_{12}(\Delta_{\omega 2})$  достигает максимальной величины при

$$\Delta_{\omega 2}^{(1)} = \frac{1 - \Delta_{\epsilon 12}}{3 - \Delta_{\epsilon 12}} = \frac{\epsilon_2}{\epsilon_1 + 2\epsilon_2}. \quad (31)$$

Теоретически частота  $\Delta_{\omega 2}^{(1)}$  может принимать значения в интервале  $0 \leq \Delta_{\omega 2}^{(1)} \leq 1/2$ .

Другой параметр,  $\Delta''_{13}(\Delta_{\omega 2})$ , имеет экстремум при

$$\Delta_{\omega 2}^{(2)} = \frac{1 - \Delta_{\epsilon 13}}{1 + 2\epsilon_3\sigma_2/\epsilon_2\sigma_3 - \Delta_{\epsilon 13}} = \frac{\epsilon_2\sigma_3}{\epsilon_2\sigma_3 + \sigma_2(\epsilon_1 + \epsilon_3)}, \quad (32)$$

причем возможная область изменения частоты  $\Delta_{\omega 2}^{(2)}$  не ограничена  $0 \leq \Delta_{\omega 2}^{(2)} \leq 1$ .

Частоты  $\Delta_{\omega 2}^{(1)}$  и  $\Delta_{\omega 2}^{(2)}$ , при которых эффективный коэффициент электрических потерь  $\epsilon''_{\text{eff}}(\Delta_{\omega 2})$  принимает максимальные значения, находятся обычными методами математического анализа. Общее условие наличия экстремума следует из второго выражения (27)

$$\Gamma_m^{(m-1)} = \frac{2}{1 - \Delta_{\epsilon 1m}} \quad (m = 2, 3). \quad (33)$$

Отсюда, используя формулы (10), (13) и соотношение (11), получаем выражения (31) и (32).

Для того чтобы максимумы эффективного коэффициента электрических потерь  $\epsilon''_{\text{eff}}(\Delta_{\omega 2})$  были явно различимы и не сливались, они должны быть удалены друг от друга на достаточно большой частотный интервал. Это требование можно обеспечить, если, например, частота первого экстремума  $\Delta_{\omega 2}^{(1)}$  смещена в низкие частоты, а частота второго максимума  $\Delta_{\omega 2}^{(2)}$  — в высокие. Согласно формулам (31) и (32), такие условия выполняются, когда электрофизические параметры композитного материала удовлетворяют следующим соотношениям :

$$\epsilon_1 \gg \epsilon_2 \quad (\Delta_{\epsilon 12} \rightarrow 1), \quad \epsilon_2\sigma_3 \gg \epsilon_3\sigma_2. \quad (34)$$

Отметим, что параметры, которые были использованы при построении графических зависимостей на рис. 2 и 3, удовлетворяют соотношениям (34).

**Слоистая система.** Изучение спектральных характеристик неоднородной среды, образованной цилиндрическими включениями двух разновидностей, распределенных в матрице с двоякопериодическим чередованием, позволило установить условия, при которых дисперсия диэлектрического материала не проявляется. Показано, что в трехкомпонентной среде эффективный коэффициент диэлектрических потерь может иметь два экстремума. Естественно возникает вопрос, насколько общими могут быть эти результаты и в какой мере они могут быть распространены на другие, не матричные, системы. Ответ на этот вопрос можно получить, исследуя частотные зависимости комплексной диэлектрической проницаемости различных по текстуре неоднородных систем. Здесь в качестве одной из простейших неоднородных систем рассмотрен слоистый материал, состоящий из трех разнородных периодически чередующихся слоев одинаковых размеров. Интегрально такая среда приобретает анизотропные свойства и ее эффективный тензор диэлектрической проницаемости имеет компоненты

$$\varepsilon_{\text{eff}xx} = \frac{3\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3}{\varepsilon_1\varepsilon_2 + \varepsilon_1\varepsilon_3 + \varepsilon_2\varepsilon_3}, \quad \varepsilon_{\text{eff}yy} = \frac{1}{3}(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3). \quad (35)$$

Принято, что ось  $x$  направлена нормально к слоям, имеющим одинаковые размеры.

Для среды, компоненты которой обладают комплексной диэлектрической проницаемостью вида (5), выражения (35) в терминах комплексных параметров  $\hat{\Delta}_{1m}(\omega)$  ( $m = 2, 3$ ), определенных формулами (7) и (8), записываются так:

$$\hat{\varepsilon}_{\text{eff}xx}(\omega) = 3\hat{\varepsilon}_1(\omega) \frac{F^-(\omega)}{G^-(\omega)}, \quad \hat{\varepsilon}_{\text{eff}yy}(\omega) = \frac{1}{3}\hat{\varepsilon}_1(\omega) \frac{G^+(\omega)}{F^+(\omega)}. \quad (36)$$

Здесь обозначено

$$F^\pm(\omega) = [\pm\hat{\Delta}_{12}(\omega)] [1 \pm \hat{\Delta}_{13}(\omega)], \\ G^\pm(\omega) = [\pm\hat{\Delta}_{12}(\omega)] [1 \mp \hat{\Delta}_{13}(\omega)] + [1 \mp \hat{\Delta}_{12}(\omega)] [1 \pm \hat{\Delta}_{13}(\omega)] + [1 \pm \hat{\Delta}_{12}(\omega)] [1 \pm \hat{\Delta}_{13}(\omega)]. \quad (37)$$

В развернутой форме выражения (36), (37) принимают вид

$$\hat{\varepsilon}_{\text{eff}xx}(\omega) = 3\hat{\varepsilon}_1(\omega) \frac{X^-(\omega) + iY^-(\omega)}{Z^-(\omega) + iY^+(\omega)}, \\ \hat{\varepsilon}_{\text{eff}yy}(\omega) = \frac{\hat{\varepsilon}_1(\omega)}{3} \frac{Z^+(\omega) - iY^-(\omega)}{X^+(\omega) - iY^+(\omega)}, \quad (38)$$

где функции  $X^\pm(\omega)$ ,  $Y^\pm(\omega)$  и  $Z^\pm(\omega)$  определены выражениями

$$X^\pm(\omega) = 1 \pm \Delta'_{12}(\omega) \pm \Delta'_{13}(\omega) + \Delta'_{12}(\omega)\Delta'_{13}(\omega) - \Delta''_{12}(\omega)\Delta''_{13}(\omega),$$

$$Y^\pm(\omega) = \Delta''_{12}(\omega)[1 \pm \Delta'_{13}(\omega)] + \Delta''_{13}(\omega)[1 \pm \Delta'_{12}(\omega)],$$

$$Z^\pm(\omega) = 3 \pm \Delta'_{12}(\omega) \pm \Delta'_{13}(\omega) - \Delta'_{12}(\omega)\Delta'_{13}(\omega) + \Delta''_{12}(\omega)\Delta''_{13}(\omega). \quad (39)$$

Если выполняются условия (17), (18), то справедливы соотношения (19) и система характеризуется одним частотным параметром (20). Тогда из выражений (38) и (39) следует, что действительные части компонент эффективного тензора проницаемости,  $\varepsilon'_{\text{eff}xx}$  и  $\varepsilon'_{\text{eff}yy}$ , сохраняют постоянные значения, а мнимые части зависят от частоты пропорционально параметру  $\Gamma_1(\omega)$

$$\varepsilon'_{\text{eff}xx} = 3\varepsilon_1 \frac{1 - \Delta_{\varepsilon 12} - \Delta_{\varepsilon 13} + \Delta_{\varepsilon 12}\Delta_{\varepsilon 13}}{3 - \Delta_{\varepsilon 12} - \Delta_{\varepsilon 13} - \Delta_{\varepsilon 12}\Delta_{\varepsilon 13}}, \\ \varepsilon''_{\text{eff}xx}(\omega) = \varepsilon'_{\text{eff}xx}\Gamma_1(\omega); \\ \varepsilon'_{\text{eff}yy} = \frac{\varepsilon_1}{3} \frac{3 + \Delta_{\varepsilon 12} + \Delta_{\varepsilon 13} - \Delta_{\varepsilon 12}\Delta_{\varepsilon 13}}{1 + \Delta_{\varepsilon 12} + \Delta_{\varepsilon 13} + \Delta_{\varepsilon 12}\Delta_{\varepsilon 13}}, \\ \varepsilon''_{\text{eff}yy}(\omega) = \varepsilon'_{\text{eff}yy}\Gamma_1(\omega). \quad (40)$$

Соотношения (18) определяют, таким образом, условия, при которых и для однопериодической системы дисперсия эффективной диэлектрической проницаемости не проявляется.

Выражения для компонент  $\varepsilon''_{\text{eff}xx}$  и  $\varepsilon'_{\text{eff}yy}$  совпадают соответственно с формулами (35); в этом можно легко убедиться, раскрывая параметры  $\Delta_{\varepsilon 12}$  и  $\Delta_{\varepsilon 13}$  с помощью формул (3).

Если один из слоев не обладает электропроводностью (например, слой, фиксированный индексом 1),  $\sigma_1 = 0$  ( $\Delta_{\sigma 12} = \Delta_{\sigma 13} = -1$ ), то в предельных случаях получаем (как и в случае матричной системы, в качестве переменных величин принимается относительная частота  $\Delta_{\omega 2}$  и частотный параметр  $\Gamma_2(\Delta_{\omega 2})$ , соотношенные с фазой, имеющей индекс 2): при  $\omega \rightarrow 0$  ( $\Gamma_2(\omega) \rightarrow \infty$ ,  $\Delta_{\omega 2} \rightarrow 0$ )

$$\varepsilon'_{\text{eff}xx}(0) = 3\varepsilon_1, \quad \varepsilon''_{\text{eff}xx}(0) = 0;$$

$$\varepsilon''_{\text{eff}yy}(0) = \frac{\varepsilon_1}{3} \frac{3 + \Delta_{\varepsilon 12} + \Delta_{\varepsilon 13} - \Delta_{\varepsilon 12}\Delta_{\varepsilon 13}}{1 + \Delta_{\varepsilon 12} + \Delta_{\varepsilon 13} + \Delta_{\varepsilon 12}\Delta_{\varepsilon 13}},$$

$$\varepsilon''_{\text{eff}yy}(0) = \frac{1}{3}\varepsilon_1\Gamma_2(0) \left(1 + \frac{\sigma_3}{\sigma_2}\right) \frac{1 - \Delta_{\varepsilon 12}}{1 + \Delta_{\varepsilon 12}}, \quad (41)$$

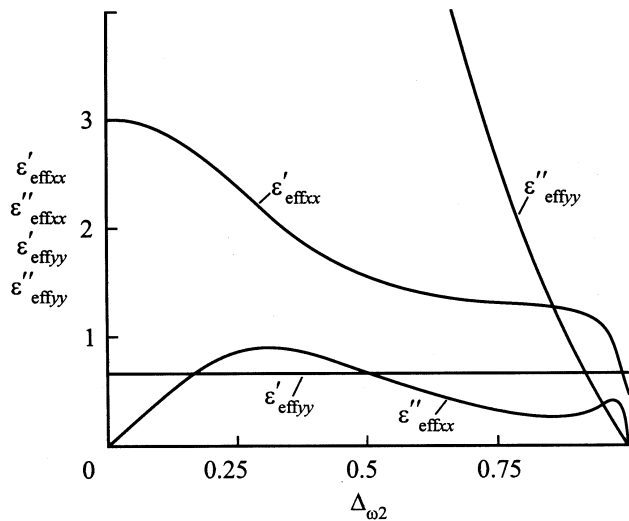
при  $\omega \rightarrow \infty$  ( $\Gamma_2(\omega) \rightarrow 0$ ,  $\Delta_{\omega 2} \rightarrow 1$ )

$$\varepsilon'_{\text{eff}xx}(\infty) = 3\varepsilon_1 \frac{1 - \Delta_{\varepsilon 12} - \Delta_{\varepsilon 13} + \Delta_{\varepsilon 12}\Delta_{\varepsilon 13}}{3 - \Delta_{\varepsilon 12} - \Delta_{\varepsilon 13} - \Delta_{\varepsilon 12}\Delta_{\varepsilon 13}},$$

$$\varepsilon''_{\text{eff}xx}(\infty) = 0;$$

$$\varepsilon'_{\text{eff}yy}(\infty) = \frac{\varepsilon_1}{3} \frac{3 + \Delta_{\varepsilon 12} + \Delta_{\varepsilon 13} - \Delta_{\varepsilon 12}\Delta_{\varepsilon 13}}{1 + \Delta_{\varepsilon 12} + \Delta_{\varepsilon 13} + \Delta_{\varepsilon 12}\Delta_{\varepsilon 13}},$$

$$\varepsilon''_{\text{eff}yy}(\infty) = 0. \quad (42)$$



**Рис. 4.** Частотные зависимости эффективной диэлектрической проницаемости слоистой среды с параметрами  $\Delta_{\epsilon 12} = 0.333$ ,  $\Delta_{\epsilon 13} = 0.6$ ,  $\Delta_{\sigma 12} = \Delta_{\sigma 13} = -1.0$ .

Из выражений (41) и (42) видно, что электростатические и оптические значения компонент эффективного тензора диэлектрической проницаемости существенно различны. Имеется по крайней мере два отличительных момента. Во-первых, при  $\omega \rightarrow 0$  эффективный коэффициент электрических потерь продольной компоненты  $\epsilon''_{effyy}(0)$  имеет сингулярность, причем она существует, даже если материал двух слоев из трех не имеет электропроводных свойств. Действительно, в формуле (41) для  $\epsilon''_{effyy}(0)$  можно положить  $\sigma_3 = 0$ , что не изменит характер особенности. Это объясняется тем, что продольная составляющая эффективного тензора диэлектрической проницаемости в отличие от поперечной компоненты имеет сквозную проводимость, если хотя бы материал одного из слоев обладает электропроводностью. Во-вторых, эффективная диэлектрическая проницаемость продольной компоненты  $\epsilon'_{effyy}$  не зависит от частоты и, следовательно, дисперсия диэлектрической проницаемости этой составляющей не проявляется при любых условиях.

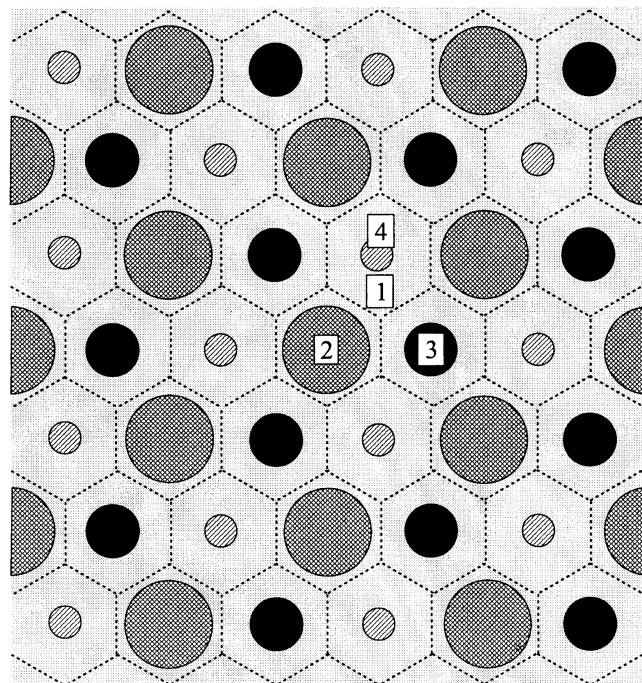
Для компоненты  $\hat{\epsilon}_{effxx}(\omega)$  диэлектрический спектр слоистого материала такой же, как и в случае двоякопериодической матричной структуры с круговыми включениями, рассмотренной в предыдущем разделе. Наглядно в этом можно убедиться, сравнивая зависимости на рис. 2 и 4.

Таким образом, поперечная компонента однопериодической структуры имеет частотные характеристики диэлектрической проницаемости, сходные с теми, которыми обладает двоякопериодическая система с малой концентрацией включений. Причем при описании их диэлектрических спектров используются одинаковые теоретические положения.

### Четырехкомпонентная среда с гексагональной структурой

Простейшая модель такой среды представляет собой матрицу с диэлектрической проницаемостью  $\epsilon_1$ , в которую погружены цилиндрические круговые включения трех разновидностей: с проницаемостями  $\epsilon_2$ ,  $\epsilon_3$  и  $\epsilon_4$  и радиусами  $r_1$ ,  $r_2$  и  $r_3$  соответственно (рис. 5). Однонаправленные цилиндрические включения расположены с двоякопериодическим чередованием в центрах шестиугольных ячеек, непрерывно, без разрывов, заполняющих всю плоскость. Геометрически эта структура имеет ось симметрии шестого порядка. При осреднении неоднородная среда с таким строением приобретает анизотропные свойства и ее электрофизические характеристики в поперечном сечении описываются эффективным тензором диэлектрической проницаемости  $\tilde{\epsilon}_{eff}$ , который, будучи приведенным к главным осям, имеет две компоненты  $\tilde{\epsilon}_{eff} = \{\epsilon_{effxx}, \epsilon_{effyy}\}$ . Исследуемая среда, как и первая из двух рассмотренных систем, имеет матричное строение и, как вторая из них, слоистая среда в целом анизотропна. Система состоит теперь из четырех компонентов.

Для установления основных особенностей диэлектрического спектра такого рода структур достаточно рассмотреть систему с малой суммарной концентрацией включений ( $s_1 + s_2 + s_3 \leq 0.5$ ). Составляющие эффективного тензора диэлектрической проницаемости для



**Рис. 5.** Фрагмент четырехкомпонентной среды с гексагональной структурой.



этих условий имеют следующие выражения [21]:

$$\begin{aligned}\varepsilon_{\text{eff}xx} &= \varepsilon_1 \frac{1 - \alpha(s_1\Delta_{\varepsilon12} + s_2\Delta_{\varepsilon13} + s_3\Delta_{\varepsilon14})}{1 + \beta(s_1\Delta_{\varepsilon12} + s_2\Delta_{\varepsilon13} + s_3\Delta_{\varepsilon14})}, \\ \varepsilon_{\text{eff}yy} &= \varepsilon_1 \frac{1 - \beta(s_1\Delta_{\varepsilon12} + s_2\Delta_{\varepsilon13} + s_3\Delta_{\varepsilon14})}{1 + \alpha(s_1\Delta_{\varepsilon12} + s_2\Delta_{\varepsilon13} + s_3\Delta_{\varepsilon14})}.\end{aligned}\quad (43)$$

Здесь  $\alpha$  и  $\beta$  — численные коэффициенты, отражающие анизотропные свойства структуры:  $\alpha = 4/3$ ,  $\alpha + \beta = 2$ ; параметры  $\Delta_{\varepsilon1g}$  ( $g = 2, 3, 4$ ) определены формулами (3) с очевидным дополнением. Составляющие тензора  $\tilde{\varepsilon}_{\text{eff}}$  удовлетворяют соотношению взаимности

$$\varepsilon_{\text{eff}xx}(\Delta_{\varepsilon12}, \Delta_{\varepsilon13}, \Delta_{\varepsilon14})\varepsilon_{\text{eff}yy}(\Delta_{\varepsilon21}, \Delta_{\varepsilon31}, \Delta_{\varepsilon41}) = \varepsilon_1^2, \quad (44)$$

поэтому достаточно проанализировать свойства одной из них; пусть для определенности это будет компонента  $\varepsilon_{\text{eff}xx}$ .

В случае комплексной диэлектрической проницаемости (5) первое выражение (43) преобразуется к виду

$$\hat{\varepsilon}_{\text{eff}xx}(\omega) = \hat{\varepsilon}_1 \frac{1 - \alpha[s_1\hat{\Delta}_{12}(\omega) + s_2\hat{\Delta}_{13}(\omega) + s_3\hat{\Delta}_{14}(\omega)]}{1 + \beta[s_1\hat{\Delta}_{12}(\omega) + s_2\hat{\Delta}_{13}(\omega) + s_3\hat{\Delta}_{14}(\omega)]}, \quad (45)$$

где комплексные параметры  $\hat{\Delta}_{14}(\omega)$  по-прежнему определены выражениями (7)–(10) с естественной заменой индексов  $m$  на  $g$ .

В эти выражения входят теперь четыре частотных параметра  $\Gamma_\nu(\omega)$  ( $\nu = 1, \dots, 4$ ), которые связаны между собой линейными соотношениями

$$\Gamma_1(\omega) = \frac{\varepsilon_2\sigma_1}{\varepsilon_1\sigma_2}\Gamma_2(\omega) = \frac{\varepsilon_3\sigma_1}{\varepsilon_1\sigma_3}\Gamma_3(\omega) = \frac{\varepsilon_4\sigma_1}{\varepsilon_1\sigma_4}\Gamma_4(\omega). \quad (46)$$

С помощью формул (3) и (9) соотношения (46) можно привести к виду

$$\begin{aligned}\Gamma_1(\omega) &= \frac{(1 - \Delta_{\varepsilon12})(1 + \Delta_{\sigma12})}{(1 + \Delta_{\varepsilon12})(1 - \Delta_{\sigma12})}\Gamma_2(\omega) \\ &= \frac{(1 - \Delta_{\varepsilon13})(1 + \Delta_{\sigma13})}{(1 + \Delta_{\varepsilon13})(1 - \Delta_{\sigma13})}\Gamma_3(\omega) \\ &= \frac{(1 - \Delta_{\varepsilon14})(1 + \Delta_{\sigma14})}{(1 + \Delta_{\varepsilon14})(1 - \Delta_{\sigma14})}\Gamma_4(\omega).\end{aligned}\quad (47)$$

Соотношения (46) и (47) обобщают равенства (11) и (12) на случай среды с четырьмя компонентами.

Отделяя действительную и мнимую части комплексного выражения (45), получим

$$\begin{aligned}\varepsilon'_{\text{eff}xx}(\omega) &= \varepsilon_1 \frac{1 - (\alpha - \beta)\Delta' - \alpha\beta(\Delta' + \Delta'') + (\alpha + \beta)\Gamma_1(\omega)\Delta''}{(1 + \beta\Delta')^2 + (\beta\Delta'')^2}, \\ \varepsilon''_{\text{eff}xx}(\omega) &= \varepsilon_1 \\ &\times \frac{\Gamma_1(\omega)[1 - (\alpha - \beta)\Delta' - \alpha\beta(\Delta' + \Delta'')] - (\alpha + \beta)(\omega)\Delta''}{(1 + \beta\Delta')^2 + \beta(\Delta'')^2}.\end{aligned}\quad (48)$$

Здесь обозначено

$$\begin{aligned}\Delta' &= s_1\Delta'_{12} + s_2\Delta'_{13} + s_3\Delta'_{14}, \\ \Delta'' &= s_1\Delta''_{12} + s_2\Delta''_{13} + s_3\Delta''_{14}.\end{aligned}\quad (49)$$

Из выражений (48) и (49) с учетом формул (7)–(10) следует, что при совместном выполнении трех соотношений

$$\Delta_{\varepsilon12} = \Delta_{\sigma12}, \quad \Delta_{\varepsilon13} = \Delta_{\sigma13}, \quad \Delta_{\varepsilon14} = \Delta_{\sigma14}, \quad (50)$$

или, что равносильно,

$$\varepsilon_1\sigma_2 = \varepsilon_2\sigma_1, \quad \varepsilon_1\sigma_3 = \varepsilon_3\sigma_1, \quad \varepsilon_1\sigma_4 = \varepsilon_4\sigma_1, \quad (51)$$

действительная часть компоненты  $\hat{\varepsilon}_{\text{eff}xx}(\omega)$  не зависит от частоты

$$\varepsilon'_{\text{eff}xx} = \varepsilon_1 \frac{1 - \alpha(s_1\Delta_{\varepsilon12} + s_2\Delta_{\varepsilon13} + s_3\Delta_{\varepsilon14})}{1 + \beta(s_1\Delta_{\varepsilon12} + s_2\Delta_{\varepsilon13} + s_3\Delta_{\varepsilon14})}, \quad (52)$$

принимая то значение, которое она имеет в электростатике (43). Мнимая часть изменяется пропорционально частотному параметру  $\Gamma_1(\omega)$

$$\varepsilon''_{\text{eff}xx}(\omega) = \varepsilon'_{\text{eff}xx}\Gamma_1(\omega). \quad (53)$$

Соотношения (50), или (51), определяют, как и аналогичные равенства в предыдущих случаях, условия, при которых дисперсия эффективной диэлектрической проницаемости не проявляется. Отметим, что соотношения (51) можно получить из граничных условий при отсутствии свободных зарядов. По сравнению с ранее рассмотренными структурами для данной системы число определяющих соотношений увеличивается на единицу и их общее число равно количеству включений в матричном композите. Согласно равенствам (46), материал при этом характеризуется одним частотным параметром

$$\Gamma_1(\omega) = \Gamma_2(\omega) = \Gamma_3(\omega) = \Gamma_4(\omega). \quad (54)$$

В общем случае, когда условия (50) невыполняются, эффективная величина  $\hat{\varepsilon}_{\text{eff}xx}(\omega)$  при  $\omega \rightarrow 0$  ( $\Gamma_2(\omega) \rightarrow \infty$ ,  $\Delta_{\omega 2} \rightarrow 0$ ) принимает следующие электростатические значения (в качестве переменных величин приняты, как и везде ранее,  $\Gamma_2(\omega)$  и  $\Delta_{\omega 2}$ ):

$$\begin{aligned}\varepsilon'_{\text{eff}xx}(0) &= \varepsilon_1 \frac{1 - \alpha(s_1\Delta_{\sigma12} + s_2\Delta_{\sigma13} + s_3\Delta_{\sigma14})}{1 + \beta(s_1\Delta_{\sigma12} + s_2\Delta_{\sigma13} + s_3\Delta_{\sigma14})} \\ &+ \frac{2\varepsilon_1}{[1 + \beta(s_1\Delta_{\varepsilon12} + s_2\Delta_{\varepsilon13} + s_3\Delta_{\varepsilon14})]^2} \\ &\times \left[ s_1(\Delta_{\sigma12} - \Delta_{\varepsilon12}) \frac{1 + \Delta_{\sigma12}}{1 + \Delta_{\varepsilon12}} \right. \\ &+ s_2(\Delta_{\sigma13} - \Delta_{\varepsilon13}) \frac{1 + \Delta_{\sigma13}}{1 + \Delta_{\varepsilon13}} \\ &\left. + s_3(\Delta_{\sigma14} - \Delta_{\varepsilon14}) \frac{1 + \Delta_{\sigma14}}{1 + \Delta_{\varepsilon14}} \right],\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varepsilon''_{\text{eff}xx}(0) &= \varepsilon_1 \Gamma_2(0) \\ &\times \frac{(1 - \Delta_{\varepsilon 12})(1 + \Delta_{\sigma 12}) \times [1 - \alpha(s_1 \Delta_{\sigma 12} + s_2 \Delta_{\sigma 13} + s_3 \Delta_{\sigma 14})]}{(1 + \Delta_{\varepsilon 12})(1 - \Delta_{\sigma 12}) \times [1 + \beta(s_1 \Delta_{\sigma 12} + s_2 \Delta_{\sigma 13} + s_3 \Delta_{\sigma 14})]}. \end{aligned} \quad (55)$$

При низких частотах эффективные параметры среды существенно зависят, как видно, от электропроводности компонентов.

Из второй формулы (55) следует, что эффективный коэффициент электрических потерь имеет сингулярность при  $\omega \rightarrow 0$ . Неограниченный рост  $\varepsilon''_{\text{eff}xx}(0)$  (как  $\sim 1/\omega$ ) связан с наличием электропроводности матричной фазы, что приводит к сквозной проводимости композитного материала.

В высокочастотной области при  $\omega \rightarrow \infty$  ( $\Gamma_2(\omega) \rightarrow 0$ ,  $\Delta_{\omega 2} \rightarrow 1$ ) эффективные параметры среды (речь везде идет о компоненте  $\hat{\varepsilon}_{\text{eff}xx}(\omega)$  тензора  $\hat{\varepsilon}_{\text{eff}xx}(\omega)$ ) принимают значения

$$\begin{aligned} \varepsilon'_{\text{eff}xx}(\infty) &= \varepsilon_1 \frac{1 - \alpha(s_1 \Delta_{\varepsilon 12} + s_2 \Delta_{\varepsilon 13} + s_3 \Delta_{\varepsilon 14})}{1 + \beta(s_1 \Delta_{\varepsilon 12} + s_2 \Delta_{\varepsilon 13} + s_3 \Delta_{\varepsilon 14})}, \\ \varepsilon''_{\text{eff}xx}(\infty) &= 0. \end{aligned} \quad (56)$$

Формулы (56) характеризуют поляризационные процессы Максвелла-Вагнера при высоких частотах.

Как и в случае ранее рассмотренных систем, удобно исследовать особенности частотных зависимостей в среде, у которой матрица представлена идеальным диэлектриком

$$\hat{\varepsilon}_1 = \varepsilon_1, \quad \sigma_1 = 0, \quad (\Delta_{\sigma 12} = \Delta_{\sigma 13} = \Delta_{\sigma 14} = -1). \quad (57)$$

Электростатические характеристики такой системы получаем из общего выражения (45) при  $\omega \rightarrow 0$  ( $\Gamma_2(\omega) \rightarrow \infty$ ,  $\Delta_{\omega 2} \rightarrow 0$ ), что дает

$$\varepsilon'_{\text{eff}xx}(0) = \varepsilon_1 \frac{1 + \alpha(s_1 + s_2 + s_3)}{1 - \beta(s_1 + s_2 + s_3)}, \quad \varepsilon''_{\text{eff}xx}(0) = 0. \quad (58)$$

Формулы (58) можно также получить из выражений (55), принимая во внимание условие (57).

При  $\omega \rightarrow \infty$  ( $\Gamma_2(\omega) \rightarrow 0$ ,  $\Delta_{\omega 2} \rightarrow 1$ ) выражения  $\varepsilon'_{\text{eff}xx}(\infty)$  и  $\varepsilon''_{\text{eff}xx}(\infty)$  полностью совпадают с (56). Таким образом, при высоких частотах система ведет себя одинаково с произвольными значениями проводимости компонентов.

Сравнивая полученные выражения с аналогичными выражениями в предыдущих задачах, можно отметить, что эффективные параметры четырехкомпонентной системы в предельных случаях обладают свойствами, которые присущи таким же параметрам трехкомпонентного материала. Разница между ними существуют только в количественных отношениях, что обусловлено различным составом компонентов двух систем и анизотропией, которую в силу гексагональной структуры приобретает при осреднении характеристик четырехкомпонентная система.

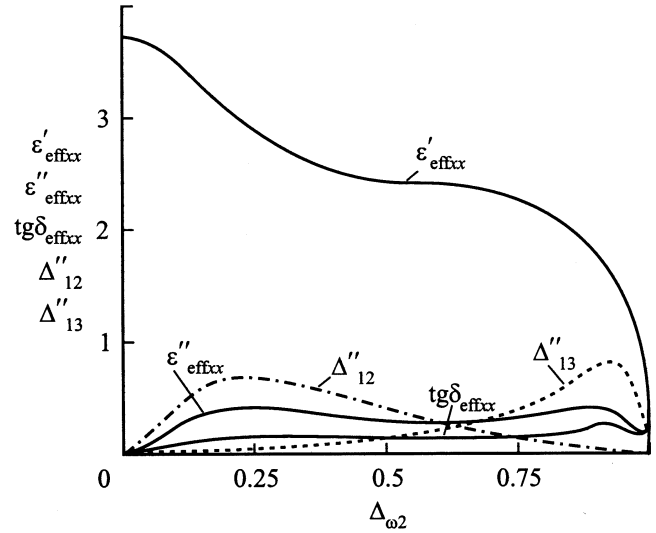


Рис. 6. То же, что на рис. 2, при концентрациях включений  $s_1 = 0.25$ ,  $s_2 = 0.20$ ,  $s_3 = 0.20$  и параметрах  $\Delta_{\varepsilon 12} = 0.5$ ,  $\Delta_{\varepsilon 13} = 0.714$ ,  $\Delta_{\varepsilon 14} = 0.714$ ,  $\Delta_{\sigma 12} = \Delta_{\sigma 13} = \Delta_{\sigma 14} = -1.0$ .

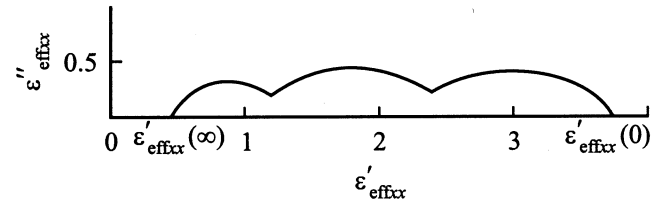
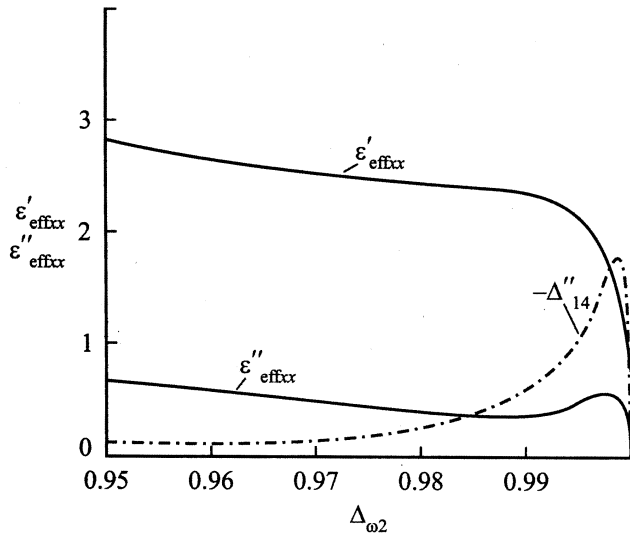


Рис. 7. Диаграмма эффективной комплексной диэлектрической проницаемости четырехкомпонентной среды (параметры те же, что и на рис. 6).

Более существенное различие двух сравниваемых систем состоит в том, что при увеличении числа компонентов пропорционально увеличивается количество экстремумов функции  $\varepsilon''_{\text{eff}xx}(\omega)$ , которое она может иметь при определенных соотношениях локальных характеристик компонентов.

Для примера на рис. 6 приведены частотные зависимости эффективных величин диэлектрической проницаемости, коэффициента электрических потерь и тангенса угла электрических потерь. Диаграмма эффективной комплексной диэлектрической проницаемости для этого случая построена на рис. 7. Графические зависимости даны для системы, имеющей следующие параметры (в относительных величинах):  $s_1 = 0.1$ ,  $s_2 = 0.15$ ,  $s_3 = 0.2$ ,  $\varepsilon_1 = 19$ ,  $\varepsilon_2 = 9$ ,  $\varepsilon_3 = 4$ ,  $\varepsilon_4 = 2$ ,  $\sigma_1 = 0$ ,  $\sigma_2 = 1$ ,  $\sigma_3 = 30$ ,  $\sigma_4 = 1500$  ( $\Delta_{\varepsilon 12} = 0.357$ ,  $\Delta_{\varepsilon 13} = 0.652$ ,  $\Delta_{\varepsilon 14} = 0.810$ ,  $\Delta_{\sigma 12} = \Delta_{\sigma 13} = \Delta_{\sigma 14} = -1$ ). При этих параметрах зависимость  $\varepsilon''_{\text{eff}xx}(\Delta_{\omega 2})$  имеет три максимума, один из которых, примаыкающий к значению параметра  $\Delta_{\omega 2} \rightarrow 1$ , на рис. 6 выражен на явню. Более четко наличие трех максимумов фиксируется на диаграмме эффективной комплексной диэлектрической проницаемости, представ-



**Рис. 8.** Зависимости эффективной диэлектрической проницаемости, эффективного коэффициента потерь и параметра  $-\Delta''_{14}$  от относительной частоты  $\Delta\omega_{12}$  при высоких частотах (параметры среды те же, что и на рис. 6).

ленной на рис. 7, что говорит об удобстве анализа дисперсии диэлектрической проницаемости с помощью комплексной диаграммы. Для принятых параметров диаграмма состоит из дуг окружностей с центрами ниже оси абсцисс.

Чтобы явно представить наличие максимума функции  $\varepsilon''_{\text{eff}xx}(\Delta\omega_2)$  в области частот, примыкающих к значению параметра  $\Delta\omega_2 \rightarrow 1$  ( $\omega \rightarrow 1$ ), частотные зависимости диэлектрической проницаемости приведены отдельно в растянутом масштабе на отрезке  $0.95 \leq \Delta\omega_2 \leq 1.0$  с явно выраженным максимумом функции  $\varepsilon''_{\text{eff}xx}(\Delta\omega_2)$  (рис. 8).

Непосредственное применение методов анализа для нахождения частот максимумов функции  $\varepsilon''_{\text{eff}xx}(\Delta\omega_2)$  приводит к громоздким вычислениям, поэтому, как и в ранее рассмотренных задачах, частоты, при которых эффективный коэффициент диэлектрических потерь имеет экстремумы, можно определить приближенно по частоте максимумов параметров  $\Delta'_{1g}(\Delta\omega_2)$  ( $g = 2, 3, 4$ ). Это существенно упрощает вычисления.

В порядке возрастания частоты (точнее, относительно параметра  $\Delta\omega_2$ ) первые две частоты максимумов  $\Delta_{\omega_2}^{(1)}$  и  $\Delta_{\omega_2}^{(2)}$  определяются формулами (31) и (32), а третья частота находится из следующего выражения:

$$\Delta_{\omega_2}^{(3)} = \frac{1 - \Delta_{\varepsilon 14}}{1 + 2\varepsilon_4\sigma_2/\varepsilon_2\sigma_4 - \Delta_{\varepsilon 14}} = \frac{\varepsilon_2\sigma_4}{\varepsilon_2\sigma_4 + \sigma_2(\varepsilon_1 + \varepsilon_4)}. \quad (59)$$

Зависимости параметров  $\Delta'_{1g}$  ( $g = 2, 3, 4$ ) от относительной частоты  $\Delta\omega_2$  представлены штрихпунктиром и пунктиром на рис. 6 и 8. Из этих кривых следует, что частоты  $\Delta_{\omega_2}^{(j)}$  ( $j = 1, 2, 3$ ) действительно довольно хорошо определяют максимумы функции  $\varepsilon''_{\text{eff}xx}(\Delta\omega_2)$  (погрешность составляет около одного процента). Отметим

в этой связи, что корреляция между максимумами параметров  $\Delta'_{1g}(\Delta\omega_2)$  и функции  $\varepsilon''_{\text{eff}xx}(\Delta\omega_2)$  существует только при малой или умеренной концентрации включений ( $s_1 + s_2 + s_3 \leq 0.5$ ). При этих условиях комплексная диэлектрическая проницаемость существенно зависит от комплексных параметров  $\Delta_{1g}(\Delta\omega_2)$ .

В заключение отметим следующий момент. В теории дисперсии диэлектрической проницаемости гетерогенных сред важную роль играют комплексные параметры (7). Они зависят от частоты, проводимости и диэлектрической проницаемости. Их удобно анализировать на комплексной плоскости. Исключая из выражений (8) частотный параметр  $\Gamma_m(\omega)$ , получаем на комплексной плоскости уравнение окружности

$$\left[ \Delta'_{1m}(\omega) - \frac{1}{2}(\Delta_{\varepsilon 1m} + \Delta_{\sigma 1m}) \right]^2 + \Delta'^2_{1m}(\omega) = \frac{1}{4}(\Delta_{\varepsilon 1m} - \Delta_{\sigma 1m})^2. \quad (60)$$

Центр окружности с радиусом  $|\Delta_{\varepsilon 1m} - \Delta_{\sigma 1m}|/2$  лежит на оси  $x$  в точке  $(\Delta_{\varepsilon 1m} + \Delta_{\sigma 1m})/2$ .

Для предельных значений частоты  $\omega \rightarrow 0$  ( $\Gamma_m(\omega) \rightarrow \infty$ ) и  $\omega \rightarrow \infty$  ( $\Gamma_m(\omega) \rightarrow 0$ ) действительная часть комплексного параметра  $\Delta'_{1m}(\omega)$  принимает соответственно значения

$$\Delta'_{1m}(0) = \Delta_{\sigma 1m}, \quad \Delta'_{1m}(\infty) = \Delta_{\varepsilon 1m}, \quad (61)$$

поэтому соотношение (60) можно представить в виде

$$\left[ \Delta'_{1m}(\omega) - \frac{1}{2}(\Delta'_{1m}(\infty) + \Delta'_{1m}(0)) \right]^2 + \Delta'^2_{1m}(\omega) = \frac{1}{4}(\Delta'_{1m}(\infty) - \Delta'_{1m}(0))^2. \quad (62)$$

Физический смысл имеет не полная окружность, а только ее часть — полуокружность, которая расположена в верхней или нижней полуплоскости соответственно при  $\Delta_{\varepsilon 1m} > \Delta_{\sigma 1m}$  и  $\Delta_{\varepsilon 1m} < \Delta_{\sigma 1m}$ .

## Заключение

Проведенные исследования позволяют сделать несколько общих замечаний.

При наличии в гетерогенной матричной среде разнотипных по свойствам включений частотные зависимости эффективной комплексной диэлектрической проницаемости усложняются. В этом случае эффективный коэффициент электрических потерь может иметь не один, а несколько максимумов. Существует, следовательно, набор времен релаксации, обусловленных поляризацией Максвелла–Вагнера. Диаграмма эффективной диэлектрической проницаемости на комплексной плоскости состоит из дуг окружностей, последовательно соединенных между собой. Наибольшее число максимумов мнимой части комплексной эффективной диэлектрической проницаемости равно числу разнотипных включений.

Образцами гетерогенных материалов, у которых комплексная диаграмма имеет несколько максимумов, могут служить некоторые полимеры, силикагели и поликонденсационные смолы (иониты). Например, многофункциональный ионит АВ-18 представляет собой диэлектрический материал с включениями в виде зерен двух типов с повышенной проводимостью [4]. Комплексная диаграмма такого материала имеет два максимума, каждый из которых отвечает соответствующему типу неоднородности.

Чтобы не загромождать изложение сложными выражениями, характерными для многофазных сред, описание которых изобилует обычно большим числом параметров, анализируются матричные системы с относительно малой концентрацией включений. Это предположение не может, по всей видимости, сколько-нибудь существенно повлиять на сделанные выводы и заключения относительно свойств дисперсии эффективной диэлектрической проницаемости гетерогенных материалов. Однако для не матричных многокомпонентных сред такой ясности нет и необходимы отдельные исследования. Это относится, например, к сплошь неоднородным системам с симметрией типа цветных мозаик и паркетных укладок, когда с каждым цветом отождествлены определенные свойства компонентов. При исследовании эффективных параметров таких систем возникают серьезные проблемы, связанные с решением краевых задач о формировании физических полей в составных элементах структур.

## Список литературы

- [1] Максвелл Дж.К. Трактат об электричестве и магнетизме. Т. I. М.: Наука, 1989. 416 с.
- [2] Wagner K.W. Die Isolierstoffe der Electrotechnik. Berlin: Springer, 1924.
- [3] Челюдзе Т.Л., Деревянко А.И., Куриленко О.Д. Электрическая спектроскопия гетерогенных систем. Киев: Наукова думка, 1977. 232 с.
- [4] Гороховатский Ю.В., Бордовский Г.А. Термоактивационная токовая спектроскопия высокоомных полупроводников и диэлектриков. М.: Наука, 1991. 248 с.
- [5] Балагуров Б.Я., Кашин В.А. // ЖЭТФ. 2000. Т. 117. Вып. 5. С. 978–989.
- [6] Obnosov Y.V. // SIAM J. Appl. Math. 1999. Vol. 59. N 4. P. 1267–1287.
- [7] Балагуров Б.Я. // ЖЭТФ. 2001. Т. 120. Вып. 3. С. 668–677.
- [8] Obnosov Y.V. // Proc. R. Soc. London, Ser. A. 1996. Vol. 452. P. 2423–2442.
- [9] Емец Ю.П. // ЖЭТФ. 2002. Т. 121. Вып. 6. С. 1339–1351.
- [10] Емец Ю.П. Электрические характеристики композиционных материалов. Киев: Наукова думка, 1986. 191 с.
- [11] Keller J.B. // J. Math. Phys. 1964. Vol. 5. N 4. P. 548–549.
- [12] Фокин А.Г. // УФН. 1996. Т. 166. № 10. С. 1071–1093.
- [13] Mendelson K.S. // J. Appl. Phys. 1975. Vol. 46. P. 4740–4741.
- [14] Емец Ю.П. // ЖЭТФ. 2000. Т. 118. Вып. 5. С. 1207–1221.
- [15] Балагуров Б.Я. // ЖЭТФ. 2001. Т. 119. Вып. 1. С. 142–153.
- [16] Emets Yu.P., Onofrichuk Yu.P. // IEEE Trans. DEI. 1996. Vol. 3. N 1. P. 87–97.

- [17] Дебай П. Полярные молекулы. М.; Л.: ГНТИ, 1931. 247 с.
- [18] Sillars R.W. // J. Inst. Electr. Eng. 1937. Vol. 80. P. 378.
- [19] Емец Ю.П. // ЖЭТФ. 1998. Т. 114. Вып. 3. С. 1121–1136.
- [20] Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. // Электродинамика сплошных сред. М.: Наука, 1982. 620 с.
- [21] Емец Ю.П. // ЖТФ. 2002. Т. 72. Вып. 1. С. 51–59.