01;05

Мартенситная релаксация напряжений и деформационные эффекты в мембранах из материалов с памятью формы

© Г.А. Малыгин

Физико-технический институт им. А.Ф. Иоффе Российской академии наук,
194021 Санкт-Петербург, Россия
e-mail: malygin.ga@mail.ioffe.ru

(Поступило в Редакцию 9 сентября 2002 г.)

С помощью теории размытых мартенситных переходов теоретически проанализированы мартенситное превращение и релаксация напряжений в нагруженной постоянным давлением плоской круглой мембране из материала с памятью формы. В результате расчета найден пластический прогиб мембраны в зависимости от температуры и величины приложенного к мембране давления.

Введение

Металлические сплавы с эффектом памяти формы (ЭПФ) обладают уникальными деформационными свойствами, а именно способностью обратимо пластически деформироваться и восстанавливать исходную (до деформации) форму [1–3]. Вследствие указанных свойств они нашли применение в ортомедицине [4] и при создании различных технических устройств [5]. В последнее время сплавы с ЭПФ стали рассматриваться также на предмет их использования в качестве активных элементов микродатчиков и микроприводов (актуаторов) [6–9], например в микроэлектромеханических системах [10].

Необычные свойства материалов с памятью формы обусловлены протекающими в них структурными превращениями мартенситного типа и чувствительностью превращений к температуре и механическим напряжениям. Для расчета функциональных характеристик устройств и элементов из материалов с ЭПФ необходимо знать связь между деформациями материала и приложенными к нему механическими напряжениями при разных температурах. Эта связь может быть установлена эмпирически или с помощью соответствующей теории структурных превращений мартенситного типа. Поскольку указанные превращения относятся к фазовым переходам первого рода, полномасштабная теория которых в настоящее время отсутствует, то расчет характеристик устройств из материалов с ЭПФ производится обычно на основе полуэмпирических моделей [11].

В настоящей работе расчет мартенситной релаксации напряжений и обратимой пластической деформации (прогиба) нагруженных постоянным давлением мембран из сплавов с ЭПФ сделан с помощью развитой недавно феноменологической теории размытых мартенситных превращений в этих материалах [12–14]. Теория базируется на термодинамических аргументах и рассматривает мартенситный переход как последовательность фазовых равновесий, зависящих от температуры и приложенного к материалу механического напряжения. Это позволяет найти объемную долю мартенсита в материале и его пластическую деформацию в зависимости от температуры и напряжения во всем диапазоне их изменения, в том числе и при неоднородном характере распределения напряжений в материале. В работе с помощью теории размытых мартенситных переходов теоретически рассчитан пластический прогиб мембраны в зависимости от ее радиуса, температуры и давления.

Упругий изгиб мембраны

Рассмотрим защемленную по контуру круглую плоскую мембрану толщиной h и радиусом $R \gg h$. Уравнение для углов поворота ω_e ее плоских сечений при упругом изгибе мембраны под действием приложенного к ней постоянного давления P имеет вид [15,16]

$$\frac{d}{dr}\left[\frac{1}{r}\frac{d}{dr}(\omega_e r)\right] = -\frac{r}{2D}P, \quad D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}, \tag{1}$$

где r — расстояние от центра мембраны, E — модуль упругости, ν – коэффициент Пуассона.

Интегрируя уравнение (1) дважды, получаем зависимость угла поворота от радиуса

$$\omega_e(r) = C_1 r + C_2 r^{-1} - \frac{r^3}{16D}P = \frac{P}{16D}r(R^2 - r^2). \tag{2}$$

Здесь $C_1 = PR^2/16D$ и $C_2 = 0$ — постоянные интегрирования, определяемые из условий $\omega_e(0) = \omega_e(R) = 0$. Поскольку $\omega_e = dw_e/dr$, то упругий прогиб мембраны равен

$$w_e(r) = C_3 + \int \omega_e\, dr = -\frac{P}{64D}(R^2 - r^2)^2. \tag{3}$$

Постоянная интегрирования $C_3 = -PR^4/64D$ находится из условия $w_e(R) = 0$.

Принимая во внимание выражения для радиальных и тангенциальных деформаций в мембране

$$\varepsilon_r = (d\omega_e/dr)z = -\frac{3}{4}P\left(\frac{R}{h}\right)^2\left[1 - 3\frac{r^2}{R^2}\right]\frac{z}{h},$$

$$\varepsilon_t = (\omega_e/r)z = -\frac{3}{4}P\left(\frac{R}{h}\right)^2\left[1 - \frac{r^2}{R^2}\right]\frac{z}{h}, \tag{4}$$

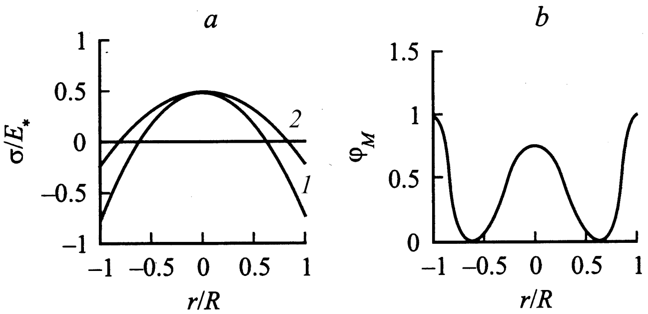

Рис. 1. Распределение радиальных (*1*) и тангенциальных (*2*) изгибных напряжений (*a*) и мартенсита (*b*) в нижнем поверхностном слое нагруженной давлением мембраны.

где z — расстояние от нейтральной плоскости мембраны, получаем распределения в ней соответствующих напряжений [16]

$$\sigma_r = \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_r + \nu\varepsilon_t)$$

$$= -\frac{3}{4}P\left(\frac{R}{h}\right)^2\left[1+\nu-(3+\nu)\frac{r^2}{R^2}\right]\frac{z}{h},$$

$$\sigma_t = \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_t + \nu\varepsilon_r)$$

$$= -\frac{3}{4}P\left(\frac{R}{h}\right)^2\left[1+\nu-(1+3\nu)\frac{r^2}{R^2}\right]\frac{z}{h}. \qquad (5)$$

На рис. 1, *a* показано распределение радиальных (кривая *1*) и тангенциальных (кривая *2*) напряжений в нижнем поверхностном слое мембраны ($z = -h/2$) в координатах $\sigma_r/E_* - r/R$ при $h/R = 0.1$, $P/E_* = 10^{-2}$, $\nu = 0.3$, где $E_* = (h/R)^2E$ — эффективный модуль упругости мембраны. Поскольку давление приложено в направлении отрицательных значений z, то центральная часть нижней поверхности мембраны растянута, а периферийная сжата. Положенные в основу вывода уравнений (1)–(5) гипотеза плоских сечений и доминирования изгибных деформаций предполагает, что прогиб мембраны должен быть значительно меньше ее толщины $w_e(R) \ll h$. Это условие определяет рабочий диапазон прикладываемых к мембране давлений $P \ll (16/3)(h/R)^2E_*$. При $h/R = 0.1$ получаем $P/E_* \ll 5\cdot10^{-2}$ или $P/E \ll 5\cdot10^{-4}$.

Мартенситная релаксация напряжений в мембране

Если мембрана изготовлена из сплава с ЭПФ, то приложение к ней давления P в диапазоне температур мартенситного превращения приведет к релаксации в ней упругих напряжений и к пластической деформации мембраны, т.е. к ее дополнительному пластическому (но обратимому при снятии давления) прогибу. Задача работы состоит в нахождении закона распределения этого прогиба в зависимости от радиуса мембраны. Для этого необходимо знать связь между пластической деформацией мембраны и приложенным к ней напряжением (давлением).

Эта связь, согласно теории размытых мартенситных переходов, определяется законом фазового равновесия [12–14]

$$\varphi_M(T,\tau) = \left[1+\exp\left(\frac{\Delta U}{kT}\right)\right]^{-1}. \qquad (6)$$

Здесь φ_M — объемная доля мартенсита в материале, претерпевающем мартенситное превращение; $\Delta U = \omega\Delta u$ — изменение внутренней энергии материала при переходе его элементарного объема ω из аустенитного в мартенситное состояние;

$$\Delta u = q\frac{T-T_c}{T_c} - \xi_{ik}\tau_{ik} \qquad (7)$$

— изменение внутренней энергии единицы объема материала мембраны при таком переходе; q — теплота перехода; T — температура; T_c — критическая (характеристическая) температура мартенситного превращения в отсутствие механического напряжения τ_{ik}; ξ_{ik} — спонтанные сдвиговые деформации решетки при ее структурной перестройке; k — постоянная Больцмана. Предполагая, что пластическая (мартенситная) релаксация напряжений в мембране определяется максимальными касательными напряжениями $\tau = (\sigma_1 - \sigma_3)/2$, где $\sigma_1 = \sigma_r$, $\sigma_2 = \sigma_t$, $\sigma_3 = \sigma_z = 0$ — главные напряжения, получаем при доминировании одного варианта мартенсита в материале ($\xi_{ik} \equiv \xi$) распределение его в мембране

$$\varphi_M(r,z,P,T)$$

$$= \left\{1+\exp\left[B\left(\frac{T-T_c}{T_c} - \frac{m\xi|\sigma_r(r,z,P)|}{2q}\right)\right]\right\}^{-1}, \qquad (8)$$

где $B = \omega q/kT \approx \omega q/kT$; m — ориентационный фактор, зависящий от угла между плоскостью и направлением сдвига ξ и нормалью к плоскости действия напряжений σ_r; при записи (8) были приняты во внимание выражения (5)–(7).

Для дальнейших расчетов удобнее записать соотношение (8) в безразмерных переменных

$$\varphi_M(\bar r,\bar z,p,t) = \left\{1+\exp\left[B\left(t-1-ma|S_r(\bar r,\bar z,p)|\right)\right]\right\}^{-1},$$

$$\bar r = \frac{r}{R},\quad \bar z = \frac{z}{h},\quad p = \frac{P}{E_*},\quad t = \frac{T}{T_c},\quad a = \frac{\xi E_*}{2q},$$

$$\frac{\sigma_r}{E_*} = S_r(\bar r,\bar z,p) = -\frac{3}{4}p\left(\frac{R}{h}\right)^2\left[1+\nu-(3+\nu)\bar r^2\right]z. \qquad (9)$$

На рис. 1, *b* показано распределение мартенсита в поверхностном слое мембраны ($z/h = -0.5$) в зависимости от радиуса согласно (9) ($B = 50$, $a = 1$, $m = 0.5$,

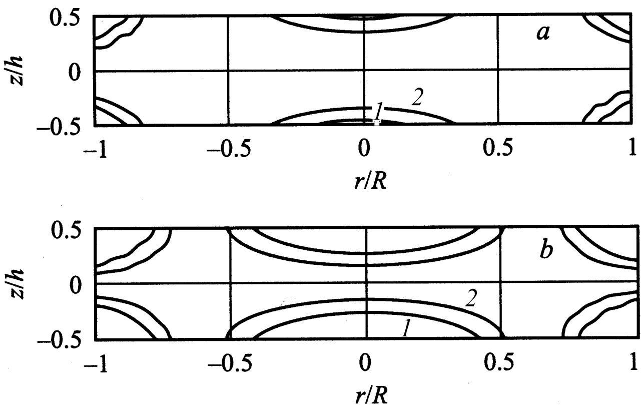

Рис. 2. Распределение мартенсита в радиальном сечении мембраны при температурах $T = 1.1T_c$ (a) и $1.05T_c$ (b) и давлении $P = 10^{-2}E_*$. Сечение показано в соотношении $h/R = 0.2$.

$t = 1.1$, $p = 10^{-2}$, $h/R = 0.1$), соответствующее распределению в ней радиальных напряжений (рис. 1, a). Видно, что мартенсит образуется в местах максимальных значений напряжений в центральной части мембраны и на ее периферии, где она защемлена. На рис. 2, a и b показано распределение мартенсита в радиальном сечении мембраны при указанных параметрах и двух температурах $T = 1.1T_c$ и $1.05T_c$. Контуры *1* и *2* на этих рисунках соответствуют объемным долям мартенсита $\varphi_M = 0.67$ и 0.33. Очевидно, что понижение температуры и повышение давления приводят к переходу все большего объема материала мембраны в мартенситное состояние.

Пластический прогиб мембраны

Связанная с образованием мартенсита локальная пластическая деформация мембраны равна

$$\varepsilon_r^M(r, z, P, T) = \big[m\xi\varphi_M(r, z, P, T, m) - m\xi\varphi_M(r, z, P, T, -m)\big]\operatorname{sign}(\sigma_r). \quad (10)$$

Формула (10) написана с учетом того, что в отсутствие напряжения (давления) пластическая деформация мембраны также отсутствует несмотря на образование в ней мартенсита, поскольку мартенсит находится в сдвойникованном состоянии. Приложение напряжения, согласно (10), приводит к раздвойникованию мартенсита, т. е. к увеличению варианта мартенсита с ориентацией m и к исчезновению мартенсита с ориентацией $-m$. В результате возникает пластическая деформация мембраны дополнительно к ее упругой деформации.

На рис. 3 кривая *1* показывает зависимость упругой деформации ε_r^e от радиуса r в поверхностном слое мембраны ($z = -h/2$) согласно (4) при указанных выше параметрах. Кривые *2–4* демонстрируют соответствующее распределение в поверхностном слое пластических деформаций согласно (10) при различных температурах и $\xi = 0.1$. Пластические деформации максимальны в местах, где радиальные напряжения имеют максимальные значения, т. е. в центре мембраны и на ее контуре. Согласно (10), пластическая деформации мембраны ограничена величиной $m\xi = 0.05$. Из рис. 3 видно, что при давлении $P = 10^{-2}E_*$ и температуре $T = 1.05T_c$ она в указанных областях достигает предельного значения и существенно превышает упругую деформацию мембраны в этих местах.

Для нахождения пластического прогиба мембраны в целом усредним радиальные деформации по толщине мембраны. Используя обозначения (9) и интегрируя, получаем

$$\varepsilon_r^M(\bar r, p, t) = 2\int_0^{1/2} \varepsilon_r^M(\bar r, \bar z, p, t)d\bar z = \frac{2\xi}{aB|S_r(\bar r, p)|} \times \ln\left[1 + \left(\frac{\operatorname{sh}\big(maB|S_r(\bar r, p)|/4\big)}{\operatorname{ch}\big(B(t-1)/2\big)}\right)^2\right]\operatorname{sign}(\sigma_r). \quad (11)$$

Далее, используя связь между углами поворота сечений мембраны и радиальными деформациями $\xi_r^M(\bar r, p, t) = (h/2)d\omega_M/dr$, находим зависимость пластического угла поворота мембраны ω_M от ее радиуса

$$\omega_M(\bar r, p, t) = \left(\frac{R}{h}\right)\int_0^{\bar r} \varepsilon_r^M(\bar r, p, t)d\bar r. \quad (12)$$

При записи (12) использовано граничное условие $\omega_M = 0$ при $r = 0$. На рис. 4, a представлены зависимости $\omega_M(\bar r)$ при двух температурах $T = 1.1T_c$ и

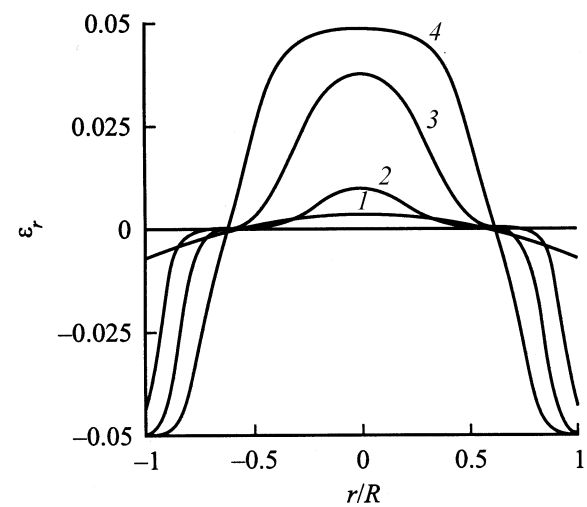

Рис. 3. Зависимость от радиуса упругих (*1*) и пластических (*2–4*) радиальных деформаций в нижнем поверхностном слое мембраны при температурах $T = 1.1T_c$ (*2*), $1.05T_c$ (*3*) и T_c (*4*).

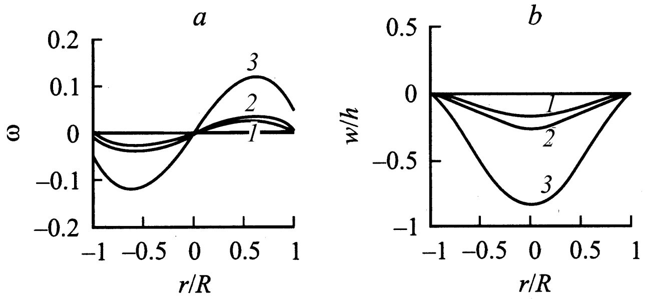

Рис. 4. Зависимости от радиуса упругих (*1*) и пластических (*2, 3*) углов поворота сечений (*a*) и прогибов (*b*) мембраны при температурах $T = 1.1T_c$ (*2*) и $1.05T_c$ (*3*).

$1.05T_c$ и давлении $P = 10^{-2}E_*$. Кривая *1* демонстрирует зависимость угла упругого поворота сечений мембраны от радиуса $\omega_e(\bar{r})$ согласно (2) при указанном давлении. В отличие от упругого поворота пластический поворот на контуре мембраны не равен нулю, так как на краях мембраны вследствие мартенситного превращения образуется пластический шарнир.

Поскольку $\omega_M = dw_M/dr$, то зависимость пластического прогиба мембраны w_M от радиуса мембраны определяется интегралом

$$\bar{w}_M(\bar{r}, p, t) = \frac{w_M(\bar{r}, p, t)}{h} = \left(\frac{R}{h}\right) \int\limits_0^{\bar{r}} \omega_M(\bar{r}, p, t) d\bar{r}. \tag{13}$$

При его записи принято во внимание, что на контуре мембраны $w_M = 0$. На рис. 4, *b* показаны зависимости $\omega_M(r)$, соответствующие зависимостям углов пластического поворота от радиуса, приведенным на рис. 4, *a*. Для сравнения показана также зависимость упругого прогиба мембраны от радиуса согласно формуле (3) (кривая *1*).

Образование пластического шарнира на краях мембраны значительно (в несколько раз) увеличивает прогиб центральной части мембраны по сравнению с ее упругим прогибом в этом месте. В связи с этим интересно сравнить величину максимального пластического прогиба центра мембраны $w_M^{\max} = \bar{w}(0, p, t)h$ с величиной максимального упругого прогиба мембраны в случае закрепления краев мембраны на шарнирной опоре. Расчет показывает [15], что упругий прогиб шарнирно закрепленной мембраны в $(5 + \nu)/(1 + \nu) \approx 4$ раза больше максимального упругого прогиба защемленной мембраны $w_e^{\max}$. Эта цифра сопоставима с величиной отношений прогибов $w_M^{\max}/w_e^{\max} = 1.5$ и 4.9 на рис. 4, *b*. Расчет показывает, что при температуре $T = T_c$ и давлении $P = 10^{-2}E_*$ более половины материала мембраны переходит в мартенситное состояние. Величина отношения $w_M^{\max}/w_e^{\max}$ при этом равна 7.4.

Деформационные характеристики мембраны

Величина пластического прогиба мембраны зависит не только от приложенного к ней давления, но и от температуры. На рис. 5 показаны температурные зависимости относительного пластического прогиба мембраны $w_M^{\max}/h$ согласно (13) при давлениях $P = 2 \cdot 10^{-3}E_*$ (кривая *1*) и $10^{-2}E_*$ (кривая *2*). Видно, что прогиб максимален при критической температуре T_c и стремится к нулю при переходе материала как в чисто мартенситное, так и аустенитное состояния.

Рис. 6, *a* демонстрирует зависимости максимальных упругого (кривая *1*), пластического (кривая *2*) и суммарного (кривая *3*) прогибов мембраны от величины давления при температуре $1.05T_c$ и изменении давления в широких пределах. Начальные участки кривых при меньших давлениях показаны на рис. 6, *b*. Как видно из рис. 6, *a*, при давлениях выше $0.03E_*$ пластический прогиб мембраны достигает насыщения и перестает зависеть от величины давления. Из результатов расчета,

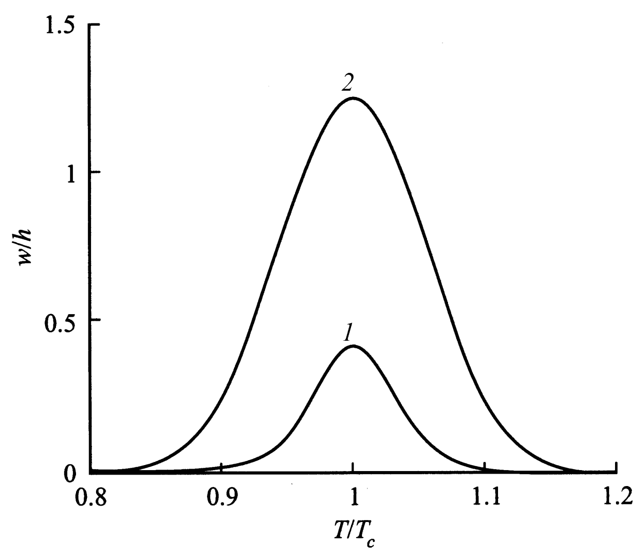

Рис. 5. Температурные зависимости пластических прогибов мембраны при давлениях $P = 2 \cdot 10^{-3}E_*$ (*1*) и $10^{-2}E_*$ (*2*).

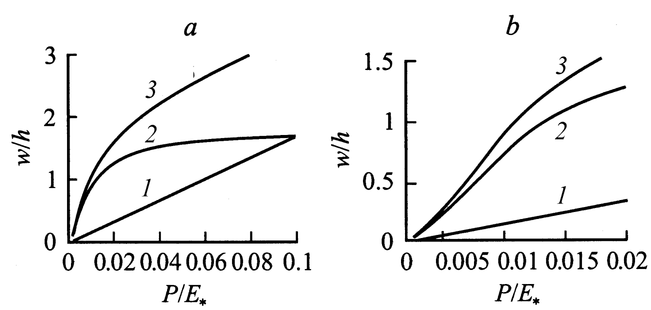

Рис. 6. Зависимости упругого (*1*), пластического (*2*) и суммарного (*3*) прогибов мембраны от давления при температуре $T = 1.05T_c$ (*a*). Начальные участки кривых (*1–3*) (*b*).

приведенных на рис. 6, *b*, следует, что при температурах, близких к критической, пластический прогиб мембраны при сколь угодно малых давлениях превышает ее упругий прогиб.

Другая особенность пластического прогиба — нелинейная зависимость его от давления и большая величина при относительно малой величине давления. Как видно из рис. 4, *b*, 5 и 6, пластические прогибы при температурах, близких к критическим, по своей величине становятся сопоставимыми с толщиной мембраны. При таких прогибах в мембране наряду с изгибающими возникают радиальные растягивающие напряжения, зависящие от величины прогиба мембраны [15–17]. Это обстоятельство вносит дополнительные и значительные (нелинейные) коррективы в зависимость упругих прогибов мембраны от давления и требует специального расчета. Это замечание касается и больших пластических прогибов мембран из материалов с памятью формы.

Таким образом, теория размытых мартенситных переходов позволяет произвести полный расчет деформационных характеристик мембраны из материала с памятью формы и найти их зависимость от температуры и приложенного к мембране давления.

Список литературы

[1] *Шимизу К., Оцука К.* Эффекты памяти формы в сплавах. М.: Наука, 1979. 232 с.
[2] *Лихачев В.А., Кузмин С.Л., Каменцева З.П.* Эффект памяти формы. Л.: ЛГУ, 1987.
[3] *Пушин В.Г., Кондратьев В.В., Хачин В.Н.* Никелид титана. М.: Наука, 1992. 161 с.
[4] Эффекты памяти формы и их применение в медицине / Под ред. В.Р. Гюнтер. Новосибирск: Наука, 1992. 567 с.
[5] Shape Memory Alloys / Ed. H. Funakabo. Vol. 1–2. New York: Gordon and Breach, 1984.
[6] Materials for Smart Systems II / Ed. E.P. George, R. Gotthardt, K. Otsuka et al. Vol. 459. Pittsburg: MRS, 1997.
[7] *Roytburd A.L., Kim T.A., Su Q., Slutsker J., Wuttig M.* // Acta Mater. 2000. Vol. 46. N 14. P. 5095–5107.
[8] *Малыгин Г.А.* // ФТТ. 2001. Т. 43. Вып. 7. С. 1286–1291.
[9] *Малыгин Г.А.* // ЖТФ. 2001. Т. 71. Вып. 9. С. 33–37.
[10] *Spearing S.M.* // Acta Mater. 2000. Vol. 48. N 1. P. 179–196.
[11] *Волков А.Е., Евард М.Е., Курзенева Л.Н., Лихачев В.А.* и др. // ЖТФ. 1996. Т. 71. Вып. 9. С. 3–35.
[12] *Малыгин Г.А.* // ФТТ. 1994. Т. 36. Вып. 5. С. 1489–1501.
[13] *Малыгин Г.А.* // ЖТФ. 1996. Т. 71. Вып. 9. С. 112–123.
[14] *Малыгин Г.А.* // УФН. 2001. Т. 171. Вып. 2. С. 187–212.
[15] *Федосеев В.И.* Сопротивление материалов. М.: Наука, 1972. 544 с.
[16] *Андреева Л.Е.* Упругие элементы приборов. М.: Машиностроение, 1981. 144 с.
[17] *Вольмир А.С.* Устойчивость деформируемых систем. М.: Наука, 1967. 984 с.