

01;07

## Сравнение разрешающей способности двух типов квантовых дискриминаторов частоты, основанных на схеме двойного резонанса

© Е.Б. Александров, А.С. Пазгалев

Всероссийский научный центр „ГОИ им. С.И. Вавилова“,  
199034 Санкт-Петербург, Россия  
e-mail: ealex@online.ru

(Поступило в Редакцию 2 сентября 2002 г.)

Представлено сравнение разрешающей способности двух схем квантовых дискриминаторов частоты на основе аналитических и численных расчетов. Показано, что схема с использованием двух когерентных полей не обладает существенными преимуществами перед обычной схемой двойного резонанса в отношении достижимого качества дискриминации частоты.

### Введение

Под квантовым дискриминатором частоты (КДЧ) понимается квантовая система (в простейшем случае двухуровневая), отвечающая резонансным откликом на пробное переменное поле, этот отклик используется для сравнения частоты пробного поля с собственной частотой системы. КДЧ получили широкое распространение в системах измерения частоты (времени) и магнитного поля. Дискриминаторы характеризуются разрешающей способностью, т.е. минимальным регистрируемым (с тем или иным критерием надежности) отклонением частоты пробного поля от номинального значения.

Необходимым условием работы КДЧ является разность населенностей комбинирующих состояний или в общем случае отличие матрицы плотности системы от единичной. Это условие автоматически выполняется под действием релаксационных процессов, избыточно заселяющих нижний энергетический подуровень. Однако, когда собственная частота дискриминатора мала по сравнению с тепловой энергией, разность населенностей мала, как и пропорциональная ей эффективность КДЧ. Эта трудность преодолевается приемом, называемым „накачкой“. Он применим в случае многоуровневой схемы, когда имеется по крайней мере один дополнительный уровень, далеко превосходящий по энергии оба рабочих уровня КДЧ. В частности, когда энергия третьего уровня многократно превышает тепловую энергию, этот уровень в условиях равновесия пуст, тогда накачка протекает максимально эффективно. Это случай так называемой „оптической накачки“ [1]. Ее простейшая схема приведена на рис. 1. Рабочие уровни 1 и 2 предполагаются долгоживущими (скорость релаксации  $\gamma = 2\pi T_1^{-1}$ ,  $T_1$  — время продольной релаксации), в то время как высоко лежащий уровень 3 короткоживущий, спонтанно распадающийся с возвратом на уровни 1 и 2. Селективно возбуждая с помощью вспомогательного поля накачки  $I_p$  переход, например, 1–3, можно создать преимущественное заселение уровня 2. Теперь пробное поле  $V$  на частоте  $\omega$  в окрестности частоты  $\omega_{12}$  перехода 1–2 вызовет уменьшение насе-

ленности уровня 2 и появление когерентности  $\rho_{12}$ , что может быть использовано в качестве резонансного отклика. Существенно, что такой отклик можно наблюдать в канале оптической накачки с высокой квантовой эффективностью. Описанная схема получила название схемы двойного радиооптического резонанса Каствлера–Бросселя. Вскоре после ее изобретения была предложена и продемонстрирована другая модификация двойного резонанса, известная сегодня под несколькими названиями, поскольку многие исследователи приходили к ней независимо. Отсылая за историей вопроса к обзору [2], мы будем пользоваться термином „ $\Lambda$ -резонанс“. Название связано со схемой переходов (рис. 2). Теперь в системе из трех уровней возбуждаются два высокочастотных перехода 1–3 и 2–3 с помощью полей  $V$  с частотами  $\omega_1$  и  $\omega_2$ . В условиях двойного резонанса, т.е. при выполнении равенств  $\omega_1 = \omega_{13}$  и  $\omega_2 = \omega_{23}$ , возникает когерентность  $\rho_{12}$  на комбинационной частоте  $\omega_{12} = \omega_1 - \omega_2$ , кроме того, наблюдается минимум населенности верхнего уровня 3, что дало основание для одного из прочих названий явления — „темный

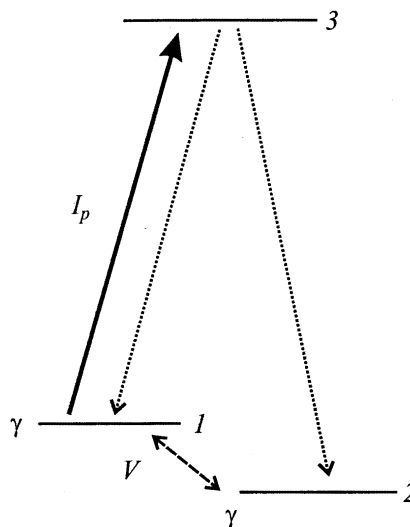


Рис. 1. Схема оптической накачки в трехуровневой системе.

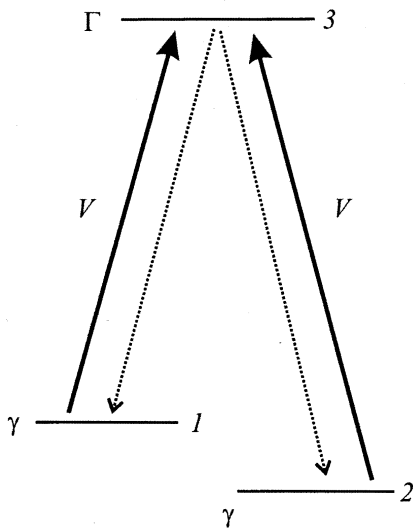


Рис. 2. Трехуровневая  $\Lambda$ -схема.

резонанс», поскольку он проявляется в падении интенсивности люминесценции. К настоящему времени выдвинуто много предложений и проделан ряд демонстраций использования  $\Lambda$ -резонанса в качестве способа точного измерения частоты перехода  $\omega_{12}$ . При этом явно или неявно предполагается, что поскольку в этом случае отсутствует поле, непосредственно связывающее состояния 1 и 2, такое измерение может быть более прецизионным. С другой стороны, очевидный недостаток  $\Lambda$ -резонанса, состоящий в измерении сравнительно низкой частоты  $\omega_{12}$  в виде разности двух высоких частот  $\omega_1$  и  $\omega_2$ , легко преодолевается, если частота  $\omega_2$  готовится методом смещения частоты  $\omega_1$  с низкой опорной частотой  $\Omega$  в окрестности искомой комбинационной частоты  $\omega_{12}$ . Если ширины высокочастотных резонансов  $\omega_{13}$  и  $\omega_{23}$  многократно превышают ширину комбинационного резонанса  $\omega_{12}$ , то нестабильность высокой частоты  $\omega_1$  не сказывается на точности измерения  $\omega_{12}$  (именно такой прием использовался в первой экспериментальной демонстрации возбуждения когерентной прецессии спинов рубидия при поглощении поляризованного света, модулированного на частоте прецессии [3]).

Однако предполагаемые принципиальные преимущества  $\Lambda$ -резонанса до сих пор не были доказаны. Настоящее сообщение содержит попытку количественного сравнения двух схем двойного резонанса с точки зрения достижимой эффективности дискриминации частоты. Мы рассмотрели сначала идеализированную трехуровневую схему и пришли к выводу, что  $\Lambda$ -резонанс позволяет в принципе реализовать вдвое более высокую разрешающую способность дискриминатора. Затем мы сопоставили расчетные эффективности двух типов КДЧ, использующих простейшую реальную среду — атомы  $^4\text{He}$ .

## Сопоставление разрешающей способности $\Lambda$ -резонанса и двойного радиооптического резонанса для модельной трехуровневой схемы

Вернемся к схемам рис. 1 и 2. Они могут быть аналитически исследованы путем решения уравнения для матрицы плотности  $\rho_{ik}$  при некоторых разумных упрощениях. В случае схемы рис. 1 можно ограничиться решением задачи о системе из двух уровней 1 и 2, описывая оптическую накачку в канале 1–3 как релаксационный процесс с темпом  $I_p$ , приводящий к установлению стационарной разности населенностей между подуровнями 1 и 2, исходно равно заселенных. Взаимодействие с когерентным полем частоты  $\omega$  на переходе 1–2 будем рассматривать в традиционном приближении вращающейся волны. В качестве резонансного отклика системы будем использовать когерентность  $\rho_{12}(t)$ . Приведем систему уравнений для матрицы плотности

$$id\rho_{11}/dt = -i\gamma(\rho_{11} - 1/2) - iI_p\rho_{11} + 1/2iI_p\rho_{11} + V(\rho_{21} - \rho_{12}),$$

$$id\rho_{22}/dt = -i\gamma(\rho_{22} - 1/2) + 1/2iI_p\rho_{11} + V(\rho_{12} - \rho_{21}),$$

$$id\rho_{12}/dt = +\delta\rho_{12} - i\Gamma_{12}\rho_{12} + V(\rho_{22} - \rho_{11}).$$

В стационарных условиях когерентность осциллирует с частотой  $\omega$ , а ее комплексная амплитуда имеет вид

$$\rho_{12} = -\frac{VI_p}{2\Gamma_{12}} \frac{\delta + i\Gamma_{12}}{\delta^2 + \Gamma_{12}^2 + 4V^2}.$$

Здесь  $V$  — матричный элемент взаимодействия с переменным полем (частота Раби);  $\delta$  — расстройка резонанса:  $\delta = \omega - \omega_{12}$ ;  $\Gamma_{12}$  — полуширина резонанса:  $\Gamma_{12} = \gamma + I_p/2$ , где  $I_p$  — скорость оптической накачки,  $\gamma$  — скорость релаксации населенности в отсутствие накачки. Предполагается, что уровень 3 с равной вероятностью распадается в состояния 1 и 2. Если вероятности спонтанного распада отличаются, выражение для когерентности приобретает вид

$$\rho_{12} = -V\kappa I_p \frac{\delta + i\Gamma_{12}}{(\delta^2 + \Gamma_{12}^2)(\gamma + \kappa I_p) + 4V^2\Gamma_{12}},$$

где  $\kappa$  — вероятность распада на уровень 2.

Частотный дискриминатор удобно строить на основе регистрации действительной части когерентности, имеющей вид дисперсионной кривой и обращаемой в 0 в точном резонансе. Крутизну  $S$  характеристики дискриминатора в окрестности резонанса

$$S = d(\text{Re}\rho_{12})/d\delta|_{\delta=0}$$

следует оптимизировать по интенсивности накачки  $I_p$  и по полю  $V$ . Максимум достигается при  $V = \gamma$ ,  $\Gamma_{12} = 2\gamma$ ,  $I_p = 2\gamma$ . Максимальное значение крутизны равно  $(16\gamma)^{-1}$ .

Переходя к анализу  $\Lambda$ -схемы, заметим, что в этом случае нужно решать уравнение для матрицы плотности трехуровневой схемы с двумя когерентными полями  $V$  на частотах  $\omega_1$  и  $\omega_2$ . Эта задача также может быть точно решена аналитически в приближении вращающихся волн. Общее решение было получено неоднократно ранее, однако оно настолько громоздко, что в литературе публиковались только частные случаи. Мы также ограничимся частным решением для когерентности  $\rho_{12}$  в условиях равенства величин частот Раби  $V_{13} = V_{23} = V$ . Будем, кроме того, полагать, что радиационная ширина  $\Gamma$  верхнего уровня  $3$  на много порядков больше невозмущенной накачкой ширины  $\gamma$  рабочего перехода  $1-2$ . Система уравнений имеет вид

$$i d\rho_{11}/dt = V(\rho_{31} - \rho_{13}) - i\gamma(\rho_{11} - 1/2) + 1/2i\Gamma\rho_{33},$$

$$i d\rho_{22}/dt = V(\rho_{23} - \rho_{32}) - i\gamma(\rho_{22} - 1/2) + 1/2i\Gamma\rho_{33},$$

$$i d\rho_{33}/dt = V(\rho_{13} - \rho_{31} + \rho_{23} - \rho_{32}) - i\Gamma\rho_{33},$$

$$i d\rho_{13}/dt = +\delta_{31}\rho_{13} - 1/2i\Gamma\rho_{13} + V(\rho_{33} - \rho_{11}) - V_{23}\rho_{12},$$

$$i d\rho_{23}/dt = +\delta_{32}\rho_{23} - 1/2i\Gamma\rho_{23} + V(\rho_{33} - \rho_{22}) - V_{13}\rho_{21},$$

$$i d\rho_{12}/dt = +\delta_{21}\rho_{12} - i\gamma\rho_{12} + V(\rho_{32} - \rho_{12}).$$

Для возникновения когерентности  $\rho_{12}$  существенным является в первую очередь выполнение комбинационного резонанса  $\omega_1 - \omega_2 = \omega_{12}$ , в то время как резонансы на частотах накачки выполняются автоматически за счет большой ширины уровня  $3$ . Вводя симметричные и равные расстройки полей накачки  $\delta_{31} = \omega_1 - \omega_{31} = -\delta_{32} = \omega_{32} - \omega_2 = \delta \gg \Gamma$ , получаем следующее выражение для дисперсионной части  $y_{12}$  когерентности  $\rho_{12} = x_{12} + iy_{12}$ :

$$y_{12} = \delta \cdot V^2\Gamma^{-1} \left[ \delta^2 + (\gamma/2 + 2V^2/\Gamma)^2 \right]^{-1}.$$

Крутизна дискриминационной кривой  $d(y_{12})/d\delta$  при нулевой расстройке  $\delta = 0$  имеет вид

$$S(y_{12}) = V^2/\Gamma / (\gamma/2 + 2V^2/\Gamma)^2.$$

Максимум крутизны достигается при  $V^2 = \Gamma\gamma/4$

$$S(y_{12})_{\max} = 1/(4\gamma).$$

Экстремальные значения дискриминационной кривой достигаются при  $V^2 = \Gamma\gamma/4$ ,  $\delta = \pm\gamma$  и равны  $(y_{13})^{extr} = \pm 1/8$  соответственно.

Сравнивая максимальную крутизну  $\Lambda$ -дискриминатора с крутизной дискриминатора по схеме рис. 1, надо иметь в виду, что принятые выше равные и противоположные расстройки волн накачек соответствуют двойной расстройке комбинационного резонанса  $\delta_{12} = 2\delta$ . Поэтому максимальная крутизна  $\Lambda$ -дискриминатора в пересчете на единичную расстройку комбинационного резонанса оказывается вдвое меньше и равна  $1/8\gamma^{-1}$ .

Таким образом, при прочих равных условиях оптимизированная крутизна  $\Lambda$ -дискриминатора, пропорциональная разрешающей способности, в два раза превосходит крутизну дискриминатора на основе двойного радиооптического резонанса.

## Сравнение расчетных эффективностей дискриминаторов двух типов с учетом реальной структуры уровней атомов

Проведенное выше сравнение использовало модельную трехуровневую схему. Любая реальная система оказывается более сложной, включая не менее четырех уровней. Простейшей реальной атомной системой, пригодной для метода двойного радиооптического резонанса, является атом гелия в триплетном метастабильном состоянии. Это состояние гелия в магнитном поле расщепляется на три эквидистантных подуровня с проекциями спина  $0, \pm 1$ , что традиционно используется в магнитометрии. Для оптической накачки гелия используются линии тесного триплета  $2^3S_1 \leftrightarrow 2^3P_{0,1,2}$ . С помощью лазера можно селективно возбуждать одну линию  $2^3S_1 \leftrightarrow 2^3P_0$  ( $D_0$ -линия,  $1.083 \mu\text{m}$ ), что позволяет реализовать простейшую четырехуровневую схему уровней (рис. 3).

Очевидно, что для достижения максимальной чувствительности к магнитному полю в варианте  $\Lambda$ -схемы следует связать с возбужденным уровнем  $2^3P_0$  подуровни  $m = \pm 1$  состояния  $2^3S_1$  двумя когерентными оптическими гармониками надлежащей поляризации (рис. 4) (практически это удобно сделать, возбуждая метастабильный гелий вдоль магнитного поля светом, плоскость поляризации которого вращается с частотой  $\omega$ , близкой к частоте Лармора  $\omega_{10} = \omega_{-10}$ , линейно зависящей от напряженности поля с коэффициентом пропорциональности  $\sim 28 \text{ Hz/nT}$ ).

Расчет оптимизированной по интенсивности света накачки крутизны дискриминационной кривой приводит к величине  $0.071\gamma^{-1}$ . Эта величина почти вдвое ниже той, которая была вычислена для случая идеализированной трехуровневой схемы. Различие связано с наличием „холостого“ подуровня  $2^3S_1, m = 0$ , населенность ко-

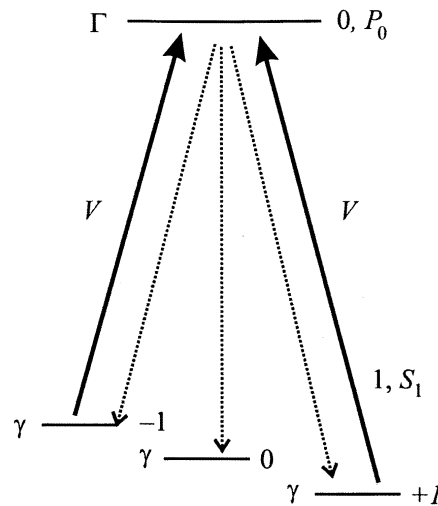
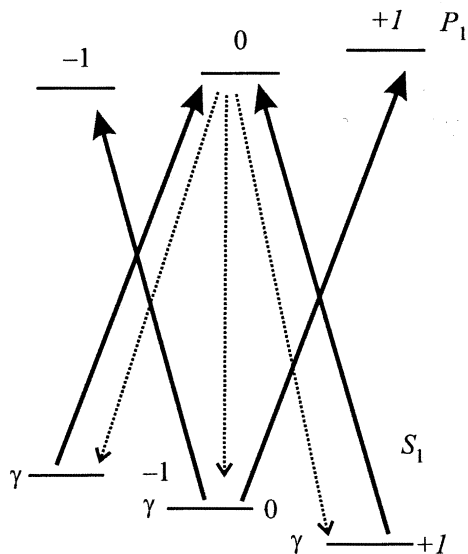


Рис. 3. Атом гелия, схема переходов между уровнями  $2^3S_1$  и  $2^3P_0$ .



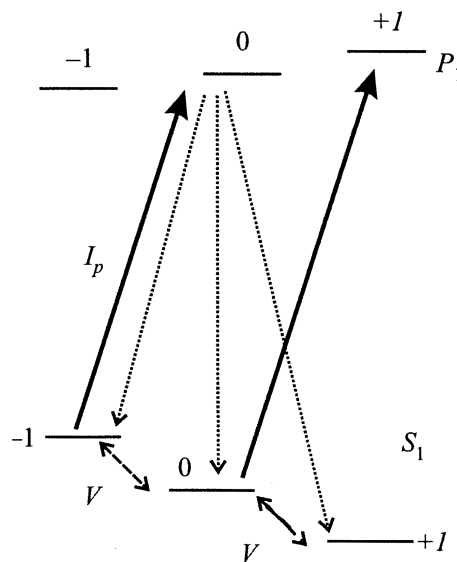
**Рис. 4.** Схема переходов  $2^3S_1 \Leftrightarrow 2^3P_1$  атома гелия, возбуждение двумя парами когерентных оптических полей.

того к тому же в результате накачки возрастает и в условиях резонанса равна 0.42. Уменьшить влияние „утечки“ атомов на холостой уровень удастся в более сложной схеме, используя переход  $2^3S_1 \Leftrightarrow 2^3P_1$  ( $D_1$ -линия,  $1.083 \mu\text{m}$ ). В этом случае при том же типе оптического возбуждения помимо  $\Lambda$ -схемы осуществляется также  $V$ -схема за счет когерентного возбуждения двух переходов  $2^3S_1, m=0 \Leftrightarrow 2^3P_1, m=\pm 1$ . Ввиду большой ширины возбужденного состояния  $V$ -схема не обнаруживает резонансности по отношению к его магнитному расщеплению и ее роль сводится к обеднению холостого подуровня  $2^3S_1, m=0$ . Расчет приводит к максимальной крутизне дискриминационной кривой  $\sim 0.105\gamma^{-1}$ , что ближе к пределу. Населенность холостого уровня в резонансе равна 0.152.

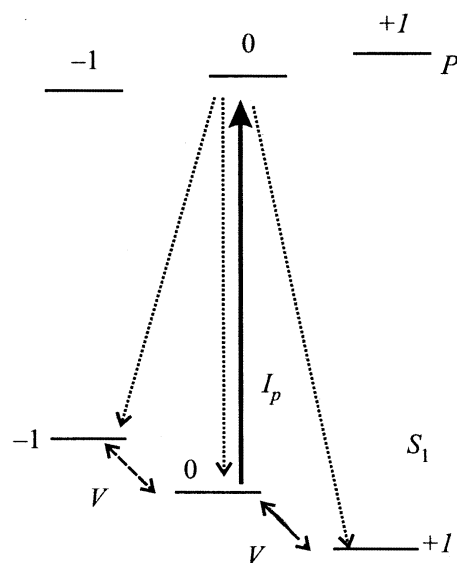
Переходя теперь к анализу ситуации обычного радиооптического резонанса в гелии, нужно отдельно рассмотреть случаи оптического выстраивания и ориентации. При накачке вдоль поля светом циркулярной поляризации (рис. 5) происходит обеднение населенности уровня  $m=-1$  с преимущественным обогащением уровней  $m=0$  и  $m=+1$  состояния  $S_1$ , что приводит к оптической ориентации. Сигнал ориентации наблюдается на частоте  $\omega$  приложенного радиополя  $V$ . Расчет показал, что максимальную крутизну дискриминации  $\sim 0.062\gamma^{-1}$  имеет сигнал когерентности  $\rho_{0+1}$  между уровнями  $m=0$  и  $m=+1$ .

При возбуждении оптического перехода  $2^3S_1, m=0 \Leftrightarrow 2^3P_1, m=0$  линейно поляризованным светом (рис. 6) происходит выстраивание, характеризуемое обеднением подуровня  $m=0$ . Резонансное радиочастотное поле  $V$  на частоте перехода  $2^3S_1, m=0 \Leftrightarrow m'=\pm 1$  частично восстанавливает равновесное значение населен-

ностей и порождает когерентности на частоте поля и на удвоенной частоте. Максимальная крутизна дискриминации реализуется на удвоенной частоте и равна  $\sim 0.06\gamma^{-1}$ . Продольное выстраивание обратного знака возникает при некогерентной накачке переходов  $2^3S_1, m=\pm 1 \Leftrightarrow 2^3P_0, m=0$ , осуществляемое, например, при возбуждении атомов линейно поляризованным светом вдоль магнитного поля. В этом случае также следует предпочесть когерентность на удвоенной частоте  $\rho_{-11}$ , обеспечивающую максимальную крутизну дискриминации  $\sim 0.038\gamma^{-1}$ . Заметим, что и в этом случае крутизна также оказалась меньше, чем для  $\Lambda$ -схемы ( $\sim 0.071\gamma^{-1}$ ).



**Рис. 5.** Схема переходов  $2^3S_1 \Leftrightarrow 2^3P_1$  атома гелия. Ориентация при накачке некогерентным светом.



**Рис. 6.** Выстраивание при возбуждении перехода  $2^3S_1, m=0 \Leftrightarrow 2^3P_1, m=0$  линейно поляризованным светом.

## Заключение

Проведенное математическое моделирование показывает, что  $\Lambda$ -схема (двойной резонанс с использованием двух когерентных полей) не обладает существенными преимуществами перед обычной схемой двойного радиооптического резонанса (с одним когерентным полем) в отношении достижимого качества дискриминации частоты. Поэтому выбор той или иной схемы зависит от реальной структуры уровней используемой атомной системы и конкретных экспериментальных обстоятельств: эффективности оптической накачки, квантовой эффективности фотоприемника, релаксационных характеристик рабочего перехода и его частоты. Как правило, технически проще индуцировать магнитный резонанс с помощью переменного магнитного поля, чем создавать две когерентные оптические гармоники. Однако в некоторых случаях удобно обходиться без радиочастотного индуктора. В этом случае чисто оптическая  $\Lambda$ -схема может оказаться предпочтительной.

Данная работа поддержана грантом по программе „Фундаментальная метрология“ (контракт N 106-23(00)П).

## Список литературы

- [1] *Kastler A., Cohen-Tannoudji C.* // *Progress in Optics*. 1966. Vol. 5. N 3. P. 1–81.
- [2] *Arimondo E., Wolf E.* // *Progress in Optics*. 1966. Vol. 35. P. 257–354.
- [3] *Bell W., Bloom A.* // *Phys. Rev. Lett.* 1961. Vol. 6. P. 280–281.