Краткие сообщения

03;04;12

Оценка давления при медленных режимах искрового разряда в цилиндрической камере, заполненной водой

© Г.А. Шнеерсон

Санкт-Петербургский государственный технический университет,
195251 Санкт-Петербург, Россия
e-mail: integr@delfa.net

(Поступило в Редакцию 17 сентября 2002 г.)

В рамках допущения о квазистационарности процесса рассчитаны давление и радиус канала искрового разряда в воде. Показано, что определяющим параметром является „интеграл действия“ $S = \int\limits_0^t i^2 dt$, где i — ток в канале. Результаты расчета слабо зависят от проводимости, что позволяет принять допущения о ее постоянстве. Полученные формулы применимы для оценок в случае разряда вдоль оси цилиндрической камеры, заполненной водой, если деформация стенки за время разряда пренебрежимо мала, а длительность импульса в несколько раз больше времени распространения звука в воде от оси до стенки камеры. В области относительно малых давлений ($P \le 10^8$ Pa) имеет место зависимость $P \sim R^{-4/3}$, где R — радиус камеры.

Давление в цилиндрической камере с недеформируемыми стенками, возникающее при электрическом разряде в воде, можно приближенно рассчитать в предположении, что режим разряда является квазистатическим. Иначе говоря, здесь принято допущение, что время нарастания разрядного тока много больше времени пробега звука от оси до стенки камеры. Можно далее принять допущение, что канал разряда является цилиндром радиуса r_k, соосным с камерой, радиус которой R будем считать постоянным. Известно, что плотность среды в разрядном канале много меньше, чем плотность воды за его пределами, поэтому можно пренебречь массой плазмы в канале и записать условие сохранения массы воды в виде $\rho V' = \text{const}$, где ρ — плотность воды в области $r_k < r < R$, $V' = \pi(R^2 - r_k^2)$ — объем жидкости (на единицу длины). Отсюда следует уравнение

$$\frac{d\rho}{\rho} = -\frac{dV'}{V'}. \tag{1}$$

Простейшее уравнение состояния воды (уравнение Тэта) имеет вид

$$P \approx P_0(\rho/\rho_0)^\alpha + A\lfloor(\rho/\rho_0)^\alpha - 1\rfloor,$$

где P — давление в камере, равное в квазистатическом режиме давлению в канале разряда; ρ_0 — начальная плотность воды; P_0 — начальное давление; числа A и α имеют значения $A = 3.05 \cdot 10^8$ Pa; $\alpha = 7.15$ [1]; кроме того, можно принять условие $P_0 \ll P$ и пренебречь первым членом в формуле для давления.

Уравнение (1) может быть приведено к виду

$$\rho = \rho_0 V_0'/V' = \rho_0 \frac{R^2}{R^2 - r_k^2}, \tag{2}$$

тогда

$$P \approx A\left[\left(1 - \frac{r_k^2}{R^2}\right)^{-\alpha} - 1\right] = A\left[(1 - x)^{-\alpha} - 1\right], \tag{3}$$

где $x = r_k^2/R^2$.

Это уравнение можно решить совместно с уравнением энергобаланса [2]

$$\frac{i^2(t)}{\pi\sigma r_k^2} = \frac{1}{\gamma - 1}\frac{d}{dt}\left(Pr_k^2\right) + P_k\frac{d}{dt}\left(r_k^2\right), \tag{4}$$

где $\gamma \approx 1.22$–1.3 — показатель адиабаты плазмы, σ — ее проводимость, $i(t)$ — ток разряда.

Можно ввести новую переменную

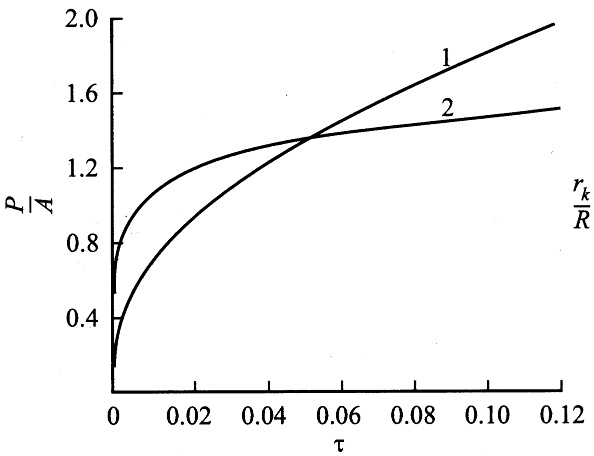
$$\tau = \frac{1}{A\pi^2 R^4}\int\limits_0^t \frac{i^2}{\sigma}\,dt,$$

тогда уравнение (4) принимает вид

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{\gamma - 1}\frac{d}{d\tau}(x\theta) + \theta\frac{d}{d\tau}\,x, \tag{5}$$

где $\theta = P/A = (1 - x)^{-\alpha} - 1$. Далее находим решение этого уравнения

$$\tau = \frac{x^2}{\gamma - 1}\,\theta + \frac{\gamma - 2}{\gamma - 1} \times \left[\frac{1 - (1 - x)^{-\alpha+2}}{\alpha - 2} - \frac{1 - (1 - x)^{-\alpha+1}}{\alpha - 1} - \frac{x^2}{2}\right]. \tag{6}$$



Зависимости давления и радиуса канала разряда от времени. *1* — r_k/R, *2* — P/A.

Энергия, вложенная на единицу длины канала, определяется по формуле

$$w = \pi A R^2 \left\{ \frac{1}{\gamma - 1} x \left[(1-x)^{-\alpha} - 1\right] + \frac{1}{\alpha - 1} \left[(1-x)^{1-\alpha} - 1\right] - x \right\}. \qquad (7)$$

Результаты расчетов, представленные на рисунке, позволяют найти радиус канала и давление в зависимости от параметра τ (графики построены для частного случая $\gamma = 1.25$, $\alpha = 7.15$).

Если проводимость мало изменяется в пределах большей части времени разряда, то допустимо принять $\sigma = \text{const} \approx (0.3\text{–}3) \cdot 10^4\,(\Omega \cdot \text{m})^{-1}$ [3]. При этом

$$\tau = (S/\sigma)/(A\pi^2 R^4),$$

где $S = \int_0^t i^2 dt$ — так называемый интеграл действия, часто фигурирующий в задачах по электрическому взрыву проводников и пробою в газах.

Рассмотрим случай, когда допустимо принять $r_k/R \ll 1$ и можно ограничиться лишь главным членом разложения бинома в формуле (3)

$$\left(1 - r_k^2/R^2\right)^{-\alpha} \approx 1 + \alpha r_k^2/R^2.$$

В этом случае $P \approx A\alpha(r_k/R)^2$ и уравнение (4) принимает вид

$$\frac{1}{2\pi^2 r_k^2} = \frac{\gamma + 1}{\gamma - 1} \cdot \frac{\alpha A}{R^2} r_k^3 \frac{dr_k}{d(S/\sigma)}. \qquad (8)$$

Отсюда получаем зависимости для радиуса канала и давления

$$r_k = \left[\frac{3(\gamma - 1)R^2}{(\gamma + 1)\pi^2 \alpha A} \cdot \frac{S}{\sigma}\right]^{1/6}, \qquad (9)$$

$$P = (\alpha A)^{2/3} \left[\frac{3(\gamma - 1)}{\pi^2(\gamma + 1)} \frac{S}{\sigma}\right]^{1/3} R^{-4/3}. \qquad (10)$$

Характерно, что при прочих равных условиях давление растет с уменьшением радиуса в соответствии с зависимостью $P \sim R^{-4/3}$. Использованное выше разложение дает приемлемую для практических оценок точность при $r_k/R \le 0.2$, что соответствует $P \le 10^8$ Pa.

В качестве примера оценим давление и радиус канала для разряда в полости, радиус которой $R = 2 \cdot 10^{-2}$ m в момент максимума тока с амплитудой 10 kA, нарастающего за время $t_m = 2 \cdot 10^{-4}$ s, что в 15 раз больше времени пробега звука от оси до стенки камеры. Таким образом, допущение о квазистационарности процесса оправдано. В этом случае $S \cong i_m^2 t_m/2 = 10^4\,\text{A}^2/\text{s}$. По формуле (10) при $\sigma = 3 \cdot 10^4\,(\Omega \cdot \text{m})^{-1}$ получаем оценку давления в момент максимума тока $P(t_m) \approx 1.5 \cdot 10^8$ Pa. Отметим слабую зависимость давления от проводимости, что позволяет использовать оценочные значения для σ.

Список литературы

[1] *Коул Р.* Подводные взрывы. М.: ИЛ, 1950.
[2] *Наугольных К.А., Рой Н.А.* Электрические разряды в воде. М.: Наука, 1971. 155 с.
[3] *Окунь И.З.* // ЖТФ. 1971. Т. 41. Вып. 2. С. 302–307.