01

Транспорт в двухтерминальном кольце Ааронова–Бома

© В.А. Гейлер, В.В. Демидов, В.А. Маргулис

Мордовский государственный университет им. Н.П. Огарева,
430000 Саранск, Россия
e-mail: geyler@mrsu.ru

(Поступило в Редакцию 8 февраля 2002 г.)

Найден коэффициент прохождения наноустройства — квантового кольца с двумя присоединенными одномерными проводниками. Гамильтониан наноустройства строится методами теории самосопряженных расширений симметрических операторов. Показано, что в этом случае коэффициент прохождения совпадает со значением, определяемым фейнмановским правилом сложения амплитуд вероятностей. Исследованы зависимости коэффициента прохождения наноустройства от энергии электронов, потока магнитного поля и взаимного расположения контактов проводников и кольца.

Введение

Обнаружение в криволинейных наноструктурах типа кольцевого квантового интерферометра ряда интересных физических эффектов [1–4] вызывает растущий интерес к их теоретическому исследованию [5–13]. Простейшая модель такой наноструктуры представляет собой одномерное кольцо с симметрично присоединенными к нему одномерными проводниками. Эта модель, рассмотренная еще в [5], исследовалась далее в целом ряде работ [6–12]. Для транспортных задач такая идеализированная модель является решающим упрощением реальной ситуации, поскольку позволяет описывать движение электронов только продольной частью волновой функции (одномодовый режим). Достоинство этой модели состоит в том, что она допускает явные простые выражения для коэффициента прохождения наноустройства, которые удобны для анализа. Однако в этой модели возникает проблема сшивки волновых функций каналов и кольца в точках контакта; при этом численные результаты, полученные для многомодового режима, показывают важную роль отражения электронных мод обратно в каналы от областей контактов [13]. Существуют два принципиально разных подхода к этой проблеме. Наиболее распространенный подход, сформулированный в [6], заключается в априорном введении матрицы рассеяния контакта, удовлетворяющей закону сохранения потока и симметрии по отношению к обращению времени. Это означает, что комплексная матрица рассеяния должна быть унитарной симметричной матрицей третьего порядка. Такая матрица может быть охарактеризована пятью вещественными независимыми параметрами. Эти параметры являются эмпирическими параметрами модели и их приходится конкретизировать, используя дополнительные и подчас нефизические аргументы: действительность матричных элементов, специальную малость некоторых из них и ряд других. Более детально этот подход анализировался в [9].

На принципиально другом подходе основаны работы [14–23]. В этих работах предлагается описывать электроны в наноустройстве с помощью некоторого возмущения гамильтониана H_0, являющегося прямой суммой гамильтонианов каналов H_1, H_2 и одномерного кольца H_r: $H_0 = H_r \oplus H_1 \oplus H_2$. Это возмущение производится в два этапа: H_0 сужается на функции, обращающиеся в нуль в точках контакта, а далее полученный симметричный оператор расширяется до самосопряженного. Все такие расширения описываются краевыми условиями в точках контакта, аналогичными краевым условиям в теории потенциалов нулевого радиуса [24,25]. В этой модели эмпирическими параметрами являются параметры краевых условий. В отличие от теории потенциалов нулевого радиуса они образуют недиагональную эрмитову матрицу. Параметрам краевых условий можно придать физический смысл, связав их с соответствующими длинами рассеяния.

В данной работе используется второй подход, который в некотором смысле является более общим, чем первый, а именно соответствующие результаты работ [6–11] могут быть воспроизведены в рамках второго подхода, если параметры краевых условий выбрать энергозависящими (по закону $\mathrm{const}/\sqrt{E}$). Это соответствует самосопряженному расширению с выходом в более широкое пространство состояний; конструкция и подробное обсуждение такого рода моделей даны в [24].

Гамильтониан и функция Крейна наноустройства

Как упоминалось выше, наша модель состоит из кольца $\mathbb{S}_\rho = \{x \in \mathbb{R}^2 : |x| = \rho\}$ радиуса ρ с прикрепленными к нему в точках A_1, A_2 полупрямыми W_1, W_2 (рис. 1). На кольце $\mathbb{S}_\rho$ будем рассматривать полярную систему координат, так что точкам A_j соответствуют углы ϕ_j, полупрямые W_j отождествим с двумя копиями положительной полуоси $\mathbb{R}_j^+ = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}$ $(j = 1, 2)$ (таким образом, точку $0 \in \mathbb{R}_j^+$ мы отождествим с точкой $\phi_j \in \mathbb{S}_\rho$). Кольцо считаем помещенным в магнитное поле, перпендикулярное плоскости кольца, напряженность которого зависит только от расстояния до центра кольца. В этом случае гамильтониан электрона в кольце

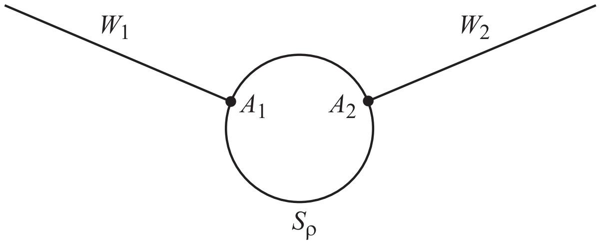

Рис. 1. Кольцо Ааронова–Бома с двумя каналами. Точками отмечены места соединения каналов с кольцом.

имеет вид

$$H_r = \frac{\hbar^2}{2m^*\rho^2}\left(-i\,\frac{d}{d\phi} + \eta\right)^2. \tag{1}$$

Здесь m^* — эффективная масса электрона; η — число квантов потока магнитного поля через кольцо, т.е. $\eta = 2\pi\Phi_0^{-1}\int\limits_0^\rho B(r)dr$, где $\Phi_0 = 2\pi\hbar c/|e|$ — квант магнитного потока. В изолированном канале $\mathbb{R}_j^+$ в качестве невозмущенного гамильтониана берется оператор

$$H_j = -\frac{\hbar^2}{2m^*}\,\frac{d^2}{dx^2}$$

с условием Неймана в точке $x = 0$: $\phi_j'(0) = 0$. Таким образом, динамика электрона в системе, состоящей из изолированных кольца $\mathbb{S}_\rho$ и каналов $\mathbb{R}_j^+$, описывается самосопряженным оператором $H_0 = H_r \oplus H_1 \oplus H_2$.

Волновая функция ψ любого наноустройства, состоящего из кольца $\mathbb{S}_\rho$ и каналов $\mathbb{R}_j^+$ представляет собою одностолбцовую матрицу $\psi = (\psi_r, \psi_1, \psi_2)^t$, где ψ_r — функция на кольце $\mathbb{S}_\rho$, а ψ_j — функция на каналах $\mathbb{R}_j^+$. Если ψ_r, ψ_1, ψ_2 обращаются в нуль в точках A_j, то для гамильтониана H наноустройства значение $\langle\psi|H|\psi\rangle$ должно совпадать с $\langle\psi|H_0|\psi\rangle$. Это показывает, что H является самосопряженным расширением симметричного оператора V, полученного сужением H_0 на функции ψ, обращающиеся в нуль в точках A_1, A_2. Известно, что все самосопряженные расширения оператора V описываются краевыми условиями в точках A_j [24], при этом роль граничных значений для ψ играют числа $\psi_i(0)$, $\psi_j'(0)$, $\psi_r(0)$, а также скачки производных $\psi_r'(\phi_j+0)-\psi_r'(\phi_j-0)$ (под $\psi_r'(\phi)$ понимается производная по длине дуги $s = \rho\phi$). В дальнейшем мы ограничимся рассмотрением краевых условий следующего достаточно общего вида:

$$\begin{cases}\psi_r(\phi_j) = \beta_j\left[\psi_r'(\phi_j+0) - \psi_r'(\phi_j-0)\right] + \alpha_j\psi_j'(0),\\ \psi_j(0) = \bar{\alpha}_j\left[\psi_r'(\phi_j+0) - \psi_r'(\phi_j-0)\right] + \gamma_j\psi_j'(0)\end{cases} \tag{2}$$

$(j = 1, 2)$.

Параметры $\alpha_j, \beta_j, \gamma_j$ образуют матрицу

$$P = \begin{pmatrix}\beta_1 & 0 & \alpha_1 & 0\\ 0 & \beta_2 & 0 & \alpha_2\\ \bar{\alpha}_1 & 0 & \gamma_1 & 0\\ 0 & \bar{\alpha}_2 & 0 & \gamma_2\end{pmatrix}. \tag{3}$$

Эрмитовость матрицы P обеспечивает самосопряженность H; таким образом, гамильтониан нашей модели задается восемью независимыми вещественными параметрами. Замена нулевых элементов P на ненулевые с сохранением эрмитовости P также приведет к самосопряженному, но в некотором смысле нелокальному оператору [26]. С другой стороны, нетривиальная матрица рассеяния для H получится лишь при выборе параметров $\alpha_j, \beta_j, \gamma_j$, отличных от нуля. Далее нам потребуется так называемая $\mathcal{Q}$-матрица Крейна пары операторов (V, H_0), которая имеет вид [15]

$$Q(E) = \begin{pmatrix} Q_{11}^{(r)}(E) & Q_{12}^{(r)}(E) & 0 & 0\\ Q_{21}^{(r)}(E) & Q_{22}^{(r)}(E) & 0 & 0\\ 0 & 0 & Q_{33}(E) & 0\\ 0 & 0 & 0 & Q_{44}(E)\end{pmatrix}. \tag{4}$$

Здесь $Q_{ij}^{(r)}(E) = G_r(\phi_i, \phi_j; E)$, $Q_{i+2,i+2}(E) = G_i(0, 0; E)$ $(i, j = 1, 2)$, где G_r и G_j — функции Грина гамильтонианов H_r и H_j соответственно. Последние хорошо известны, а именно

$$G_r(\phi, \phi'; E) = \frac{m^*}{2\hbar^2 k}\left[\frac{\exp\bigl(i(\phi'-\phi\pm\pi)(\eta-k\rho)\bigr)}{\sin\pi(\eta-k\rho)} - \frac{\exp\bigl(i(\phi'-\phi\pm\pi)(\eta+k\rho)\bigr)}{\sin\pi(\eta+k\rho)}\right] \tag{5}$$

(знак „плюс“ берется, если $\phi \geq \phi'$, и знак „минус“ — в противном случае),

$$G_j(x, x'; E) = \frac{im^*}{\hbar^2 k}\left[\exp\bigl(ik(x+x')\bigr) + \exp\bigl(ik|x-x'|\bigr)\right], \tag{6}$$

где $k = \sqrt{2m^*E}/\hbar$.

Как показано в [15], коэффициент прохождения наноустройства выражается через матрицу B, $B = (B_{ij})_{1\leq i,j\leq 4}$, присоединенную к $Q + 2m^*P/\hbar^2$, точнее через элемент B_{43} этой матрицы, который имеет следующий вид:

$$B_{43} = -4(m^*)^2\,\alpha_1\bar{\alpha}_2\,Q_{21}^{(r)}/\hbar^4. \tag{7}$$

Коэффициент прохождения наноустройства

Пусть по первому каналу $\mathbb{R}_1^+$ распространяется падающая на кольцо волна $\exp(ikx)$. Тогда волновая функция устройства в канале $\mathbb{R}_1^+$ имеет следующий вид [15,27]

$$\psi_1(x) = \exp(ikx) + \left(1 - \frac{4im^*}{\hbar^2 k}\,\frac{B_{33}}{\det(Q + 2m^*P/\hbar^2)}\right)\exp(-ikx), \tag{8}$$

а в канале $\mathbb{R}_2^+$

$$\psi_2(x) = -\frac{4im^*}{\hbar^2 k}\,\frac{B_{43}}{\det(Q + 2m^*P/\hbar^2)}\exp(ikx). \tag{9}$$

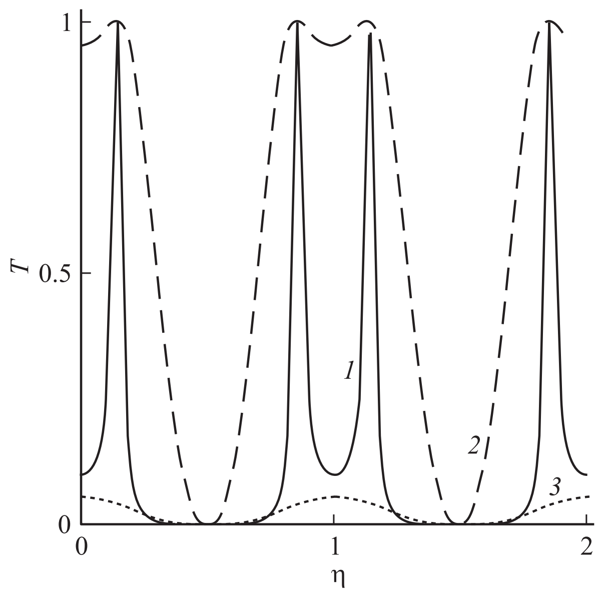

Рис. 2. Зависимость коэффициента прохождения T наноустройства от потока магнитного поля, пронизывающего кольцо, при фиксированных значениях энергии электронов. kL: *1* — 2.9π, *2* — 2.7π, *3* — 2.4π. Длина рассеяния электронов в областях контактов $\lambda = 75\,\mathrm{nm}$. Здесь и далее расчет проводился для кольца радиуса $\rho = 350\,\mathrm{nm}$.

Здесь $Q(E)$ определяется формулой (4), B_{43} — формулой (7). Из сравнения (8) и (9) находим амплитуду прохождения наноустройства

$$t(E) = -\frac{4im^*B_{43}}{\hbar^2 k \det(Q + 2m^*P/\hbar^2)}. \qquad (10)$$

Соответственно коэффициент прохождения есть $T(E) = |t(E)|^2$. Из (3) следует, что для выбранной нами модели коэффициент прохождения оказывается функцией восьми независимых вещественных параметров. Введем в рассмотрение длину рассеяния λ заряженной частицы на точечном потенциале и положим для простоты все параметры граничных условий одинаковыми и равными $\lambda/2$. Это означает, что мы рассматриваем одинаково возмущенные каналы и кольцо и, кроме того, склейку каналов и кольца осуществляем одинаковым образом. Легко видеть, что тогда $Q_{33} = Q_{44} = 2im^*/\hbar^2 k$, а величины $Q_{11}^{(r)}$ и $Q_{22}^{(r)}$ при вещественном k равны

$$Q_{11}^{(r)} = Q_{22}^{(r)} = \frac{m^*}{\hbar^2 k}\,\frac{\sin kL \cos kL}{\sin^2 \pi\eta - \sin^2 kL}. \qquad (11)$$

Здесь $L = \pi\rho$ — длина полукольца. В случае диаметрально противоположного расположения контактов на кольце ($\phi_1 = 0$, $\phi_2 = \pi$) недиагональные элементы $Q^{(r)}$ приобретают вид

$$Q_{12}^{(r)} = Q_{21}^{(r)} = \frac{m^*}{\hbar^2 k}\,\frac{\sin kL \cos \pi\eta}{\sin^2 \pi\eta - \sin^2 kL}, \qquad (12)$$

а определитель матрицы

$$\det Q^{(r)} = \left(\frac{m^*}{\hbar^2 k}\right)^2 \frac{\sin^2 kL}{\sin^2 \pi\eta - \sin^2 kL}. \qquad (13)$$

Из выражений (10)–(13) после несложных преобразований получаем следующую формулу:

$$T(k,\eta) = \left\{1 + \left[\left(\frac{3}{4} - \frac{1}{\lambda^2 k^2}\right)\sin kL - \frac{2}{\lambda k}\cos kL - \frac{\sin^2 \pi\eta}{\sin kL}\right]^2 \frac{1}{\cos^2 \pi\eta}\right\}^{-1}. \qquad (14)$$

Из (14) видно, что $T(k,\eta)$ является периодической функцией потока η с периодом, равным кванту потока (рис. 2). При $kL = \pi n$, $n = 1, 2, \ldots$ (т.е. когда энергия электронов совпадает с энергетическими уровнями электронов в изолированном кольце) коэффициент прохождения $T(k,\eta)$ обращается в нуль.

Рассмотрим вначале зависимость T от k в случае нулевого магнитного поля (такой же результат получается и в случае целого потока поля через кольцо). Соответствующие этому случаю графики приведены на рис. 3. Как видно, осцилляции кривой $T(k)$ располагаются неэквидистантно на оси kL. Из (14) следует, что максимумы $T(k)$ находятся в точках, являющихся корнями трансцендентного уравнения

$$2\,\mathrm{ctg}\,kL = \frac{3}{4}\lambda k - \frac{1}{\lambda k}. \qquad (15)$$

Эти корни при $k \to \infty$ имеют асимптотику

$$k = \frac{\pi n}{L} + \frac{8L}{3\pi\lambda n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right). \qquad (16)$$

Максимальные значения амплитуд всех осцилляций равны единице. Минимумы осцилляций располагаются на огибающей вида

$$f(k) = \left(\frac{5}{4} + \frac{1}{\lambda^2 k^2}\right)^{-2}. \qquad (17)$$

Как следует из граничных условий (2), выражения для амплитуд прохождения t и отражения r на одиночном контакте имеют вид

$$t = \frac{2\lambda k}{3\lambda k + 2i}, \quad r = -\frac{\lambda k + 2i}{3\lambda k + 2i}. \qquad (18)$$

При сделанных выше предположениях эти выражения одинаковы при рассеянии на любом контакте и в любом направлении движения электрона (из канала в кольцо или из кольца в канал). Из (18) видно, что прохождение электроном контакта сопровождается изменением фазы волновой функции на величину

$$\delta(k) = \mathrm{arctg}\,\frac{2}{3\lambda k}, \qquad (19)$$

чем обусловлена неэквидистантность пиков в $T(k)$, особенно существенная при относительно небольших k. Изменение знака λ ведет к изменению знака сдвига фазы $\delta(k)$.

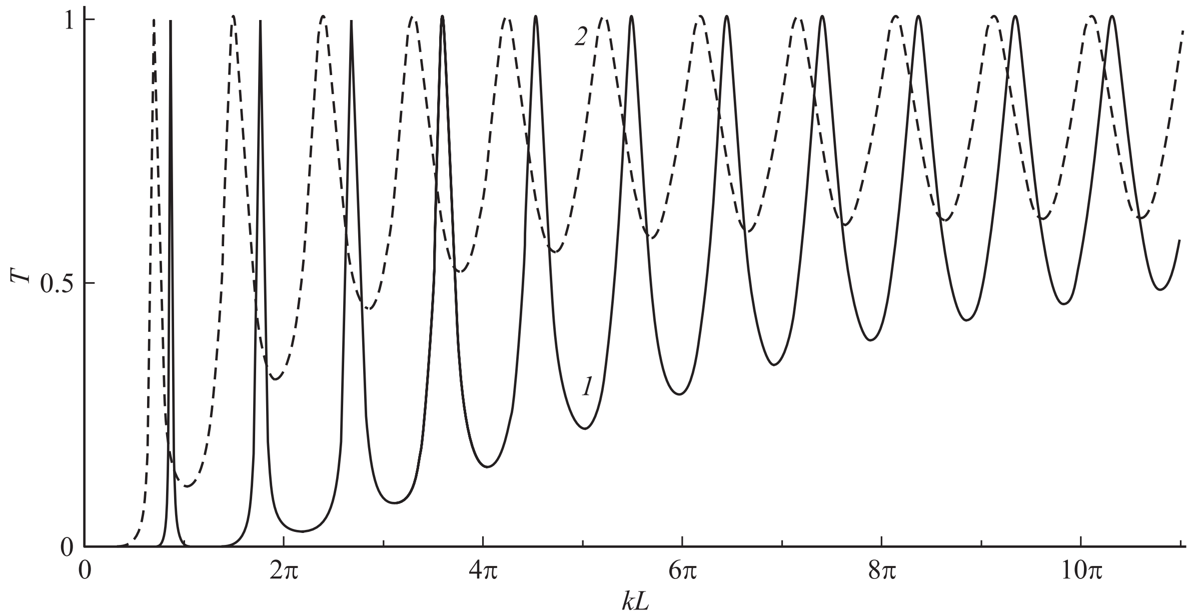

Рис. 3. Зависимость коэффициента прохождения T наноустойства от волнового числа электрона при нулевом (или целочисленном) потоке магнитного поля, пронизывающего кольцо, для разных значений длины рассеяния. λ, nm: *1* — 75, *2* — 250.

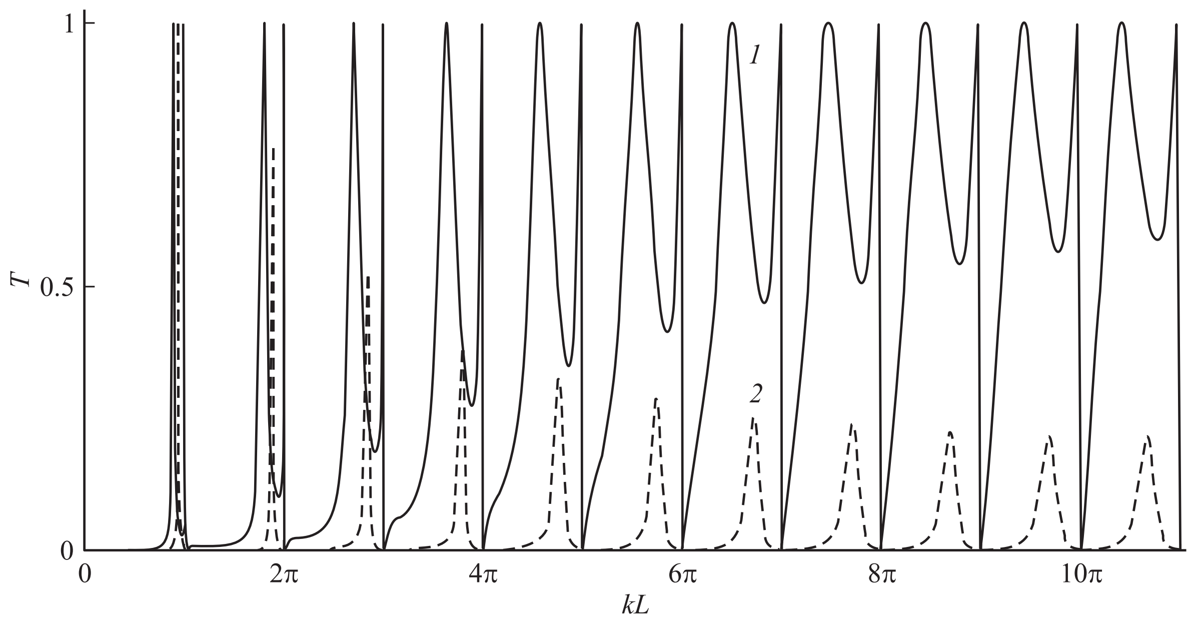

Рис. 4. Зависимость коэффициента прохождения T наноустройства от волнового числа электрона при наличии магнитного поля η: *1* — 0.14, *2* — 0.47. Здесь и далее длина рассеяния $\lambda = 75$ nm.

Рассмотрим теперь наноустройство, помещенное в магнитное поле. Соответствующие этому случаю графики приведены на рис. 4. Нули $T(k, \eta)$ возникают в точках $kL = \pi n$ $(n = 1, 2, \ldots)$, только когда поток η нецелый (нули $T(k, \eta)$ совпадают с нулями $Q_{21}^{(r)}$, а при целом потоке элемент $Q_{21}^{(r)}$ не имеет нулей). Если же поток η полуцелый, то $T(k, \eta)$ обращается в нуль при всех k. Эти интерференционные эффекты объясняются следующим образом. При наличии внешнего магнитного поля волновые функции электронов, прошедших по разным полукольцам, испытывают фазовые сдвиги разных знаков $k\rho + \eta$ и $k\rho - \eta$. При нечетном значении $k\rho$ мнимые части волновых функций на выходе из кольца имеют противоположные знаки и при сложении компенсируются (как бы мало́ ни было поле B, а следовательно и фазовый сдвиг $\pi\eta$), а вещественные части

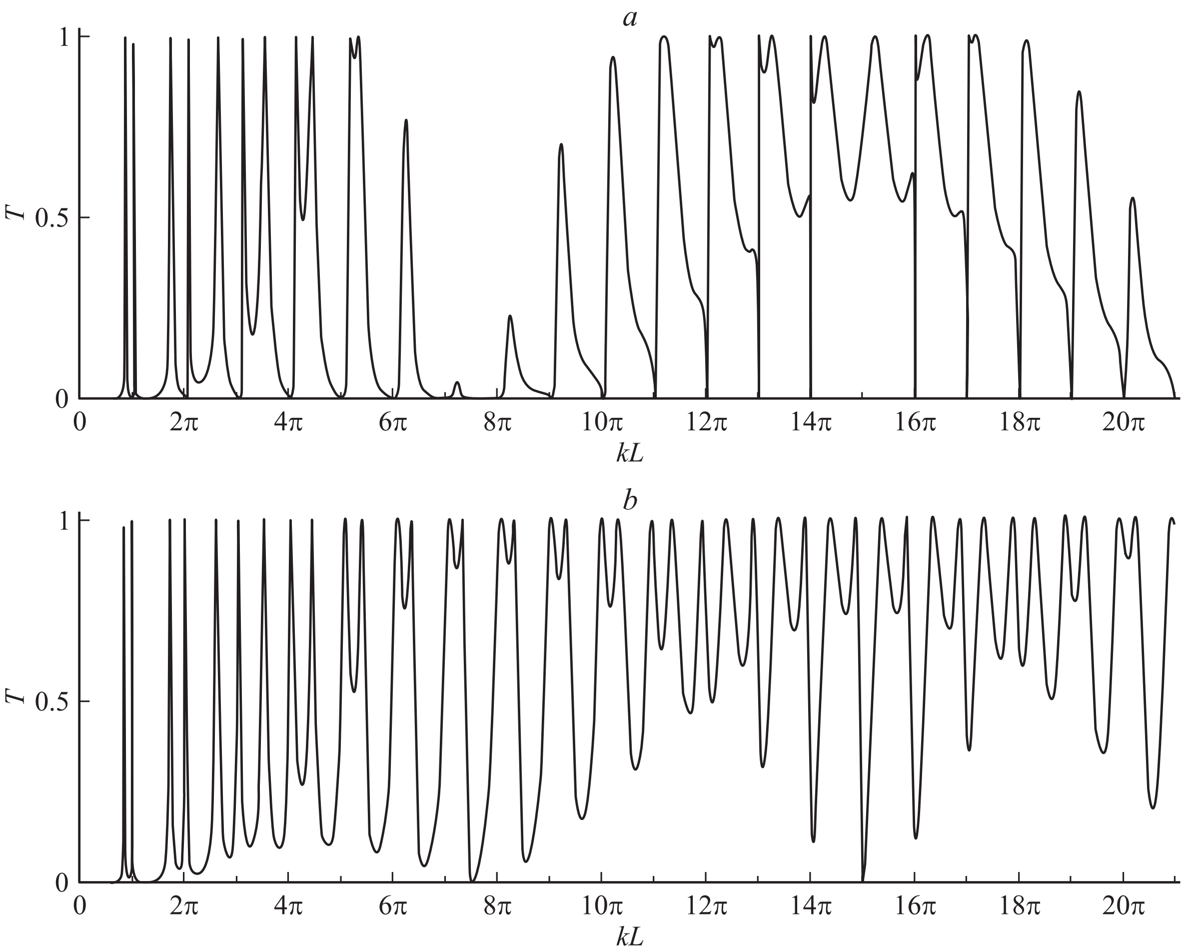

Рис. 5. Зависимость коэффициента прохождения T от волнового числа электрона в случае несимметричного расположения контактов на кольце ($\phi_1 = 0$, $\phi_2 = 14\pi/15$). a — в отсутствие магнитного поля; b — при наличии магнитного поля: $\eta = 0.07$.

волновых функций электронов, прошедших все кольцо в противоположных направлениях, компенсируются в точке входа в кольцо. Обращение в нуль коэффициента прохождения $T(k,\eta)$ при полуцелом потоке η объясняется аналогично приведенному выше с той лишь разницей, что теперь волновые функции электронов, прошедших разные полукольца, имеют разность фаз, кратную π. Поэтому волновые функции компенсируются на выходе из кольца, но уже при любом k.

Дополнительные максимумы на графике $T = T(k,\eta)$ единичной высоты (только в случае нецелого потока магнитного поля) обусловлены слагаемым $\sin^2\pi\eta/\sin kL$ в (10), из-за которого возникают дополнительные корни у выражения в квадратной скобке. Все максимумы функции $T(k,\eta)$ связаны с интерференцией волновых функций электронов, испытывающих многократные отражения в точках контактов проводников и кольца. Несимметричное положение максимумов объясняется сдвигом фазы волновых функций в точках контактов.

Рассмотрим теперь случай несимметричного подключения каналов к кольцу ($\phi_1 = 0$, $\phi_2 \neq \pi$). Диагональные элементы $Q^{(r)}$ по-прежнему описываются формулами (11), недиагональные имеют вид

$$Q_{12}^{(r)} = \overline{Q_{21}^{(r)}} = \frac{2m^*}{\hbar^2 k}\exp\bigl(-i(\pi-\phi_2)\eta\bigr) \times \frac{\sin kL\cos\pi\eta\cos(\pi-\phi_2)k\rho + i\cos kL\sin\pi\eta\sin(\pi-\phi_2)k\rho}{\sin^2\pi\eta - \sin^2 kL}. \quad (20)$$

Определитель $Q^{(r)}$ легко найти

$$\det Q^{(r)} = 2\left(\frac{m^*}{\hbar^2 k}\right)^2 \frac{\sin^2 kL - \sin^2(\pi-\phi_2)k\rho}{\sin^2\pi\eta - \sin^2 kL}. \quad (21)$$

Теперь коэффициент прохождения записывается в виде

$$T(k,\eta) = \bigl[1 + F_1^2(k,\eta)/F_2(k,\eta)\bigr]^{-1}, \quad (22)$$

где

$$F_1(k,\eta) = \left(\frac{3}{4} - \frac{1}{\lambda^2 k^2}\right)\sin^2 kL - \frac{1}{\lambda k}\sin 2kL + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{\lambda^2 k^2}\right)\sin^2(\pi-\phi_2)k\rho - \sin^2\pi\eta, \quad (23)$$

$$F_2(k,\eta) = \sin^2 kL \cos^2 \pi\eta \cos^2(\pi - \phi_2)k\rho + \cos^2 kL \sin^2 \pi\eta \sin^2(\pi - \phi_2)k\rho. \qquad (24)$$

Проведем анализ выражения коэффициента прохождения сначала в отсутствие магнитного поля. В этом случае выражения (23), (24) упрощаются и принимают вид

$$F_1(k,0) = \left(\frac{3}{4} - \frac{1}{\lambda^2k^2}\right)\sin^2 kL - \frac{1}{\lambda k}\sin 2kL + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{\lambda^2k^2}\right)\sin^2(\pi - \phi_2)k\rho, \qquad (25)$$

$$F_2(k,0) = \sin^2 kL \cos^2(\pi - \phi_2)k\rho. \qquad (26)$$

Из формул (22), (25) и (26) следует, что максимумы $T(k)$ возникают в точках, являющихся нулями функции $F_1(k)$. В отличие от симметричного расположения контактов на кольце в случае общего положения максимумы T имеют дублетную структуру для электронов с малой энергией. Это связано с тем, что в выражении (25) из-за множителя у последнего слагаемого возникают дополнительные корни при $k < 2/\lambda\sqrt{3}$ (в выражении в квадратных скобках формулы (14) этот множитель постоянный). Нули функции $T(k)$ совпадают с нулями функции F_2 и возникают в точках вида $kL = \pi n$, $n \in \mathbb{N}$, кроме точек $q\pi n$, где функция F_1 обращается в нуль, и в точках $kL = q\pi(1/2 + n)$, где q — знаменатель дроби $\phi_2 = p\pi/q$. На рис. 5,a приведены графики зависимости $T(k)$ в случае отсутствия магнитного поля. Из-за наличия множителя $\cos^2(\pi - \phi_2)k\rho$ в функции F_2 кривая $T(k)$ состоит из волновых пакетов ширины $\pi^2/|\pi - \phi_2|$ (за исключением первого пакета пиков, ширина которого в два раза меньше). Можно отметить некоторое сходство формы дополнительных осцилляционных пиков, возникающих в случае магнитного поля и симметричного расположения контактов на кольце, с формой осцилляций, возникающих при несимметричном подключении контактов к кольцу. Это связано с тем, что магнитное поле сдвигает фазу волновой функции электрона, поэтому для электронов, движущихся по разным полукольцам, пройденный путь либо эффективно уменьшается, либо эффективно увеличивается.

Для наноустройства, помещенного в магнитное поле (с потоком, отличным от целого и полуцелого), максимумы кривой $T(k)$ сглаживаются, характер осцилляционных пиков напоминает биения (рис. 5,b). При этом нули в точках $kL = \pi n$, $n \in \mathbb{N}$ поднимаются вверх и становятся минимумами, а в точках вида $kL = q\pi n$ и $kL = q\pi(1/2 + n)$ нули сохраняются. Последнее обусловлено поведением функций F_1 и F_2, определяемых теперь выражениями (23), (26).

Вычисление коэффициента прохождения кольца с помощью фейнмановского правила сложения амплитуд

В этом разделе показано, что выражение для амплитуды прохождения $t^{(r)}$ одномерного кольца Ааронова–Бома с двумя присоединенными каналами может быть получено с помощью фейнмановского правила сложения амплитуд волновых функций электронов, прошедших все топологически различные траектории в кольце. Для простоты будем считать контакты одинаковыми ($\alpha_\pm = \beta_\pm = \gamma_\pm = \lambda/2$), симметрично расположенными ($\phi_1 = 0$, $\phi_2 = \pi$), поток магнитного поля — нулевым. В этом случае выражение для амплитуды прохождения наноустройства (10) может быть записано в виде

$$t^{(r)}(k) = \frac{\lambda^2k^2}{(\lambda^2k^2 + 2i\lambda k)\cos kL - i(5\lambda^2k^2/4 + i\lambda k - 1)\sin kL}. \qquad (27)$$

Пусть по левому каналу распространяется падающая волна $\exp(ikx)$. Рассмотрим волновые функции электронов, проходящих различные траектории в кольце и прошедших в правый канал. Коэффициенты прохождения и отражения из канала в любое полукольцо и из кольца в канал определяются формулами (18). Волны, прошедшие путь длиной полкольца, всего две: прошедшая верхнее полукольцо и прошедшая нижнее полукольцо (их вид на выходе $t^2\exp(ikL)$). Каждая из этих волн будет иметь составляющую, прошедшую обратно в кольцо. Далее, ввиду симметрии устройства, достаточно рассматривать только волны, прошедшие верхнюю половину кольца (аналогичная картина имеет место для волн, прошедших в первый раз нижнюю половину канала, поэтому результат необходимо просто удвоить). Волны, отраженные обратно в кольцо и прошедшие путь длиной $3L$, четыре: $t^4\exp(ikL)$, $t^2rt\exp(ikL)$, $trt^2\exp(ikL)$, $t^2r^2\exp(ikL)$. Каждая из этих четырех волн тоже имеет составляющую, прошедшую обратно в кольцо. Производя сложение всех волн, выходящих из кольца „направо“, получим, что их сумма имеет вид геометрической прогрессии

$$\begin{aligned} t^{(r)} &= 2\big[t^2\exp(ikL) + t^2(t^2 + 2tr + r^2)\exp(3ikL) \\ &\quad + t^2(t^2 + 2tr + r^2)^2\exp(5ikL) + \ldots\big] \\ &= 2t^2\exp(ikL)\big[1 + (t + r)^2\exp(2ikL) \\ &\quad + (t + r)^4\exp(4ikL) + \ldots\big] \\ &= \frac{2t^2}{\exp(-ikL) - (t + r)^2\exp(ikL)}. \end{aligned}$$

Далее, с учетом (18) получаем

$$t^{(r)} = \frac{8\lambda^2k^2}{(3\lambda k + 2i)^2 \exp(-ikL) - (\lambda k - 2i)^2 \exp(ikL)}$$
$$= \frac{\lambda^2k^2}{(\lambda^2k^2 + 2i\lambda k)\cos kL - i(5\lambda^2k^2/4 + i\lambda k - 1)\sin kL}. \quad (28)$$

Как видно, выражения (27) и (28) совпадают. Аналогичные, хотя более громоздкие вычисления можно проделать и в общем случае.

Заключение

Как следует из вышеизложенного, зависимость коэффициента прохождения наноустройства от энергии электронов носит осцилляционный характер; осцилляции обусловлены интерференцией волновых функций электронов в кольце. В общем случае несимметричного расположения ($\phi_1 = 0$, $\phi_2 \neq \pi$) контактов на кольце и в отсутствие магнитного поля пики образуют пакеты (рис. 4). Эти пики имеют дублетную структуру при относительно небольших значениях энергии. С ростом энергии в дублетной структуре пиков один из максимумов уменьшается и при достаточно больших энергиях исчезает. Ширина каждого пакета равна $\pi^2/|\pi - \phi_2|$, за исключением первого пакета, ширина которого в два раза меньше. С ростом магнитного поля пакеты исчезают, осцилляционные пики сглаживаются и конфигурация пиков имеет характер биений.

В особом случае симметричного расположения контактов на кольце ($\phi_1 = 0$, $\phi_2 = \pi$) и в отсутствие магнитного поля график $T(k)$ имеет снизу огибающую точек минимумов вида (17), а значения T в точках максимумов равны единице. При положительных значениях длины рассеяния λ точки максимумов кривой $T(k)$ расположены правее точек πn ($n = 0, 1, \dots$) и асимптотически приближаются к последним с ростом k. При отрицательных λ максимумы $T(k)$ находятся левее точек $n = 1, 2, \dots$ и асимптотически приближаются к ним с ростом k. Аналогичное поведение кривой $T(k)$ наблюдается в модели, рассмотренной в [12].

При наличии магнитного поля с потоком, отличным от целых и полуцелых значений, на графике $T(k)$ возникают глубокие до нуля минимумы в точках, соответствующих собственным уровням энергии изолированного кольца, и при $\lambda > 0$ слева от минимумов возникают дополнительные острые максимумы с высотой равной единице. При приближении значения потока поля к полуцелому числу минимумы расширяются, максимумы сглаживаются и коэффициент прохождения наноустройства обращается в нуль при всех k. В отличие от кривых $T(k)$, полученных в [6], в нашем случае $T(k)$ не является строго периодической функцией волнового числа k. При больших k график $T(k)$ на рис. 4 качественно совпадает с кривыми, полученными в [6], однако он демонстрирует сильную асимметрию при низких значениях энергии. Строгая периодичность по k, полученная в [6], является артефактом выбранной в [6] модели, которая в этом смысле близка к моделям типа сильной связи (в последних все зоны имеют одинаковую структуру).

Работа выполнена при поддержке грантов РФФИ (№ 01-02-16564 a), DFG (N 436 RUS 113/572/1) и INTAS (N 00-257).

Список литературы

[1] *Liu J., Ismail K., Loe K.Y.* et al. // Phys. Rev. B. 1993. Vol. 47. N 19. P. 13 039–13 042.
[2] *Morpurgo A.F., Heida J.P., van Wees B.J.* et al. // Physica B. 1998. P. 509–512.
[3] *Shea H.R., Martel R., Avouris Ph.* // Phys. Rev. Lett. 2000. Vol. 84. N 19. P. 4441–4444.
[4] *Pedersen S., Hansen A.E., Kristensen A.* et al. // Phys. Rev. B. 2000. Vol. 61. N 8. P. 5457–5460.
[5] *Büttiker M., Imry Y., Landauer R.* // Phys. Lett. 1983. Vol. A96. N 4. P. 365–370.
[6] *Büttiker M., Imry Y., Azbel M.Ya.* // Phys. Rev. A. 1984. Vol. 30. N 4. P. 1982–1989.
[7] *Gefen Y., Imry Y., Azbel M.Ya.* // Phys. Rev. Lett. 1984. Vol. 52. N 2. P. 129–132.
[8] *Takai D., Ohta K.* // Phys. Rev. B. 1993. Vol. 48. N 19. P. 14 318–14 324.
[9] *Рыжкин И.А.* // ФТТ. 1999. Т. 41. Вып. 11. С. 2070–2074.
[10] *Xia J.-B.* // Phys. Rev. B. 1992. Vol. 45. N 7. P. 3593–3599.
[11] *Li J., Zhang Z.-Q., Liu Y,* // Phys. Rev. B. 1997. Vol. 55. N 8. P.5337–5343.
[12] *Баграев Н.Т., Буравлев А.Д., Иванов В.К.* и др. // ФТП. 2000. Т. 34. № 7. С. 846–856.
[13] *Ткаченко О.А., Ткаченко В.А., Бакшеев Д.Г.* и др. // Письма в ЖЭТФ. 2000. Т. 71. Вып. 6. С. 366–371.
[14] *Exner P., Šeba P.* Ideas and methods in quantum physics / Ed. S. Albeverio et al. Cambridge University Press, 1992. Vol. 2. P. 227–253.
[15] *Гейлер В.А., Попов И.Ю.* // ТМФ. 1996. Т. 107. № 1. С. 12–20.
[16] *Pavlov B.S., Popov I.Yu., Geyler V.A.* et al. // Europhys. Lett. 2000. Vol. 52. P. 196–202.
[17] *Kurasov P., Stenberg F.* On the Inverse Scatering Problem of Brandching Graphs. Preprint. Stockholm University, 2001. N 7. P. 1–28.
[18] *Geyler V.A., Popov A.V.* // Reps Math. Phys. 1998. Vol. 42. P. 347–358.
[19] *Bogevolnov V.B., Mikhailova A.B., Pavlov B.S.* About Scattering on the Ring. Preprint. Auckland University, 1999. N 413. P. 1–16.
[20] *Exner P., Tater M., Vaněk D.* // J. Math. Phys. 2001. Vol. 42. N 9. P. 4050–4078.
[21] *Texier C., Montambaux G.* // J. Phys. A. 2001. Vol. 34. N 9. P. 10 307–10 326.
[22] *Mikhailova A.B., Pavlov B.S., Popov I.Yu.* et al. Scattering on a Compact Domain with Few Semiinfinite Wires Attached: Resonance Case. Preprint. Auckland University, 2000. N 420. P. 1–17.

[23] *Mikhailova A.B., Pavlov B.S.* Resonanse Triadic Quantum Switch. Preprint. Auckland University, 2001. N 474. P. 1–38.
[24] *Павлов Б.С.* // УМН. 1987. Т. 42. Вып. 6. С. 99–131.
[25] *Альбеверио С., Гестези Ф., Холден Х., Хеэг-Крон Р.* Решаемые модели в квантовой механике. М.: Мир, 1991. 568 с.
[26] *Шондин Ю.Г.* // ТМФ. 1996. Т. 106. № 2. С. 179–199.
[27] *Brüning J., Geyler V.A.* Scattering on Compact Manifolds with Infinitely Thin Horns. Preprint. Humboldt University (Berlin), 2001. P. 1–36.