01;03

Теоретическое исследование коэффициента теплоотдачи нагретой тонкой проволочки в потоке газа

© А.А. Пикулев

Российский федеральный ядерный центр
Всероссийский научно-исследовательский институт экспериментальной физики,
607190 Саров, Нижегородская область, Россия
e-mail: pikulev@expd.vniief.ru

(Поступило в Редакцию 6 ноября 2002 г.)

Проведено теоретическое исследование процесса теплообмена между линейным источником тепла и потоком газа. Получена зависимость коэффициента теплоотдачи источник тепла–газ от скорости потока газа в пределе нулевого перепада температуры. Показано, что для чисел Пекле 0.1–1 коэффициент теплоотдачи является линейной функцией скорости потока газа.

Введение

В настоящее время одним из экспериментальных методов исследования термогазодинамики газовых потоков является метод тонких проволочек. Данный метод имеет несколько приложений, из которых можно отметить следующие: 1) измерение скорости потока газа с помощью однопроволочного [1] или импульсного двухпроволочного [2,3] термоанемометров; 2) определение термодинамических параметров потока газа, например коэффициента турбулентной теплопроводности газа в следе за телом [4]; 3) исследование величины и распределения объемного энерговклада в газ, например определение энерговклада в активный среде лазеров с ядерной накачкой [5].

Нагрев или охлаждение проволочки окружающим газом определяется термогазодинамическими процессами, происходящими в кювете. Коэффициент теплоотдачи тонкой проволочки (величина которого определяет характерное время нагрева проволочки) зависит от типа течения (ламинарный или турбулентный), скорости и термодинамических параметров газа. Поэтому для анализа результатов экспериментов по измерению скорости потока газа [1–3] или исследованию распределения энерговклада в активной среде [5] необходимо знание зависимости коэффициента теплоотдачи проволочка–газ от параметров газа, в первую очередь от скорости.

Отметим, что для решения данной задачи в полной постановке необходимо совместное решение уравнений Навье–Стокса и переноса энергии, что даже при малых числах Рейнольдса и Пекле проволочки требует значительных затрат машинного времени. Поэтому в данной работе предложена более простая модель, основанная на замене проволочки конечной толщины линейным источником тепла, который в пределе нулевого перепада температуры проволочка–газ не возмущает поток газа.

Результаты данной работы в случае малости числа Пекле проволочки могут быть перенесены на случай проволочки конечной толщины. Показано, что для чисел Пекле в пределах 0.1–1 наблюдается линейная зависимость коэффициента теплоотдачи от скорости.

Основные уравнения

Рассмотрим термодинамику линейного источника тепла в однородном потоке газа, направление течения которого перпендикулярно источнику. Течение газа будем считать происходящим со скоростью U в направлении оси $0x$, источник тепла с линейной плотностью теплового излучения W совпадает с осью $0z$. В такой постановке все параметры не зависят от координаты z. Предполагаем, что все процессы стационарны и происходят при постоянном давлении. Считаем, что наличие источника тепла не приводит к искривлению линий тока, которые параллельны оси $0x$. Из уравнения неразрывности [6] следует

$$\frac{\partial}{\partial x}\rho U = 0 \to \rho U = \rho_0 U_0 = \text{const}, \tag{1}$$

где ρ_0, U_0 — плотность и скорость газа на бесконечности.

Уравнение энергии с учетом (1) принимает вид (в пренебрежении зависимостью коэффициента теплопроводности μ от температуры) [6,7]

$$c_p \rho_0 U_0 \frac{\partial T}{\partial x} = \mu \nabla^2 T + W\delta(x)\delta(y), \tag{2}$$

где c_p — теплоемкость при постоянном давлении, T — температура, δ — дельта-функция.

В качестве граничного условия примем, что на бесконечности температура газа равна нулю $T(\infty) = 0$.

Коэффициент теплоотдачи k определяем из соотношения [7]

$$W = 2\pi k R T_0, \tag{3}$$

где R — радиус проволочки, T_0 — температура поверхности проволочки.

Введем безразмерные переменные

$$\begin{cases} \bar{x} = \dfrac{x}{R}, \quad \bar{y} = \dfrac{y}{R}, \quad \bar{T} = \dfrac{T}{T_0}, \\ \bar{W} = \dfrac{W}{\mu T_0}, \quad \bar{k} = k\,\dfrac{R}{\mu}, \quad \mathrm{Pe} = \dfrac{c_p \rho_0 R U_0}{\mu}, \end{cases} \tag{4}$$

где Pe — число Пекле [6].

Уравнение (3) принимает вид $\bar{W} = 2\pi\bar{k}$. Уравнение (2) в безразмерном виде (знак обезразмеривания опускаем)

$$\frac{\partial T}{\partial x} = \frac{\nabla^2 T}{\mathrm{Pe}} + \frac{W\delta(x)\delta(y)}{\mathrm{Pe}}. \tag{5}$$

В уравнении (5) учтена размерность дельта-функции $\delta(x) = R\delta(x)$. Ниже все формулы, кроме специально оговоренных случаев, будут приводиться в безразмерном виде.

Решение уравнения переноса тепла для линейного источника

Уравнение (5) в фурье-пространстве [8] принимает вид

$$\begin{cases} i\lambda T(\lambda,\omega) = -\dfrac{\lambda^2+\omega^2}{\mathrm{Pe}}\,T(\lambda,\omega) + \dfrac{W}{2\pi \mathrm{Pe}}, \\ T(\lambda,\omega) = \dfrac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \exp(-i\lambda x - i\omega y)T(x,y)dx\,dy. \end{cases} \tag{6}$$

Для температуры в фурье-пространстве получаем выражение

$$T(\lambda,\omega) = \frac{W}{2\pi(\lambda^2 + i\lambda\mathrm{Pe} + \omega^2)}. \tag{7}$$

Применение обратного преобразования Фурье к формуле (7) приводит к следующему результату:

$$T(x,y) = \frac{W}{4\pi^2}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp(i\lambda x + i\omega y)}{\lambda^2 + i\lambda\mathrm{Pe} + \omega^2}\,d\lambda\,d\omega. \tag{8}$$

Выражение (8) можно один раз проинтегрировать по переменной λ. Рассмотрим интеграл

$$I(x,\omega) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp(i\lambda x)}{\lambda^2 + i\lambda\mathrm{Pe} + \omega^2}\,d\lambda. \tag{9}$$

Подынтегральная функция удовлетворяет условиям леммы Жордана [9] в верхней полуплоскости при $x > 0$, а при $x < 0$ — в нижней. Корни знаменателя подынтегральной функции являются полюсами первого порядка и равны

$$\lambda_{1,2} = -i\left\{\frac{\mathrm{Pe}}{2} \mp \sqrt{\frac{\mathrm{Pe}^2}{4} + \omega^2}\right\}. \tag{10}$$

Корни (10) λ_1 и λ_2 являются чисто мнимыми, причем λ_1 расположен в нижней полуплоскости, а λ_2 — в верхней. Интеграл (9) вычисляем по известной теореме вычетов [9]

$$I(x,\omega) = \begin{cases} 2\pi i\,\text{Выч}(f(\lambda,\omega,x),\lambda_2), & x > 0, \\ -2\pi i\,\text{Выч}(f(\lambda,\omega,x),\lambda_1), & x < 0, \end{cases}$$

$$f(\lambda,\omega,x) = \frac{\exp(i\lambda x)}{\lambda^2 + i\lambda\mathrm{Pe} + \omega^2}. \tag{11}$$

Приведем окончательный результат

$$T(x,y) = \frac{W}{2\pi}\int\limits_0^{\infty} d\omega\,\frac{\cos(\omega y)}{\sqrt{\frac{\mathrm{Pe}^2}{4}+\omega^2}} \times \begin{cases} \exp\left(-x\left\{\sqrt{\frac{\mathrm{Pe}^2}{4}+\omega^2} - \frac{\mathrm{Pe}}{2}\right\}\right), & x > 0 \\ \exp\left(x\left\{\sqrt{\frac{\mathrm{Pe}^2}{4}+\omega^2} + \frac{\mathrm{Pe}}{2}\right\}\right), & x < 0. \end{cases} \tag{12}$$

Можно показать, что интеграл (12) сходится при любых $\mathrm{Pe} > 0$.

Вычисление коэффициента теплоотдачи

На рис. 1, 2 приведены изолинии отношения T/W для чисел Пекле 0.1 и 0.5. Расчеты проводились по формуле (12). Из рисунков видно, что при $\mathrm{Pe} < 1$ изотермы для $r \le 1$, где $r = \sqrt{x^2+y^2}$, близки к концентрическим окружностям с центром в начале координат. Таким образом, при малых числах Пекле теплоперенос в области $r < 1$ осуществляется почти исключительно кондуктивным путем, а влияние конвективного теплопереноса сказывается только при $r > 1$. Следовательно, для $\mathrm{Pe} \ll 1$ температура на поверхности $r = 1$ практически постоянная и может быть ассоциирована с температурой проволочки.

На рис. 3 приведены распределения относительной температуры на поверхности $r = 1$ при различных

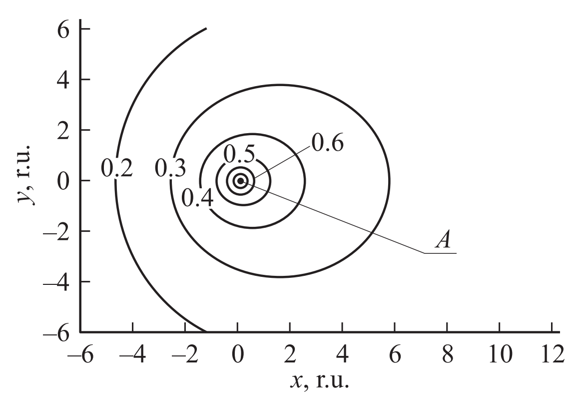

Рис. 1. Изолинии отношения T/W при $\mathrm{Pe} = 0.1$. A — положение источника тепла.

числах Пекле. Видно, что температура в точках $x = 0$, $y = \pm 1$ совпадает со средним значением. Полагая, что средняя температура поверхности проволочки $\langle T \rangle = 1$, для коэффициента теплоотдачи получаем следующее соотношение:

$$\frac{1}{k} = \int_0^\infty \frac{\cos(\omega)d\omega}{\sqrt{\frac{\mathrm{Pe}^2}{4} + \omega^2}}. \tag{13}$$

Интеграл (13) не является элементарной функцией и может быть вычислен лишь численно. Для $\mathrm{Pe} \ll 1$ формула (13) сводится к выражению

$$\frac{1}{k} \cong -\mathrm{Ei}\left(-\frac{\mathrm{Pe}}{2\sqrt{2}}\right), \quad \mathrm{Ei}(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{\exp(t)}{t}\, dt, \tag{14}$$

где Ei — интегральная показательная функция [10].

Расчеты показывают, что в области $0.1 < \mathrm{Pe} < 1$ зависимость коэффициента теплоотдачи от числа Пекле (13) хорошо аппроксимируется линейной зависимостью (в безразмерных и размерных единицах)

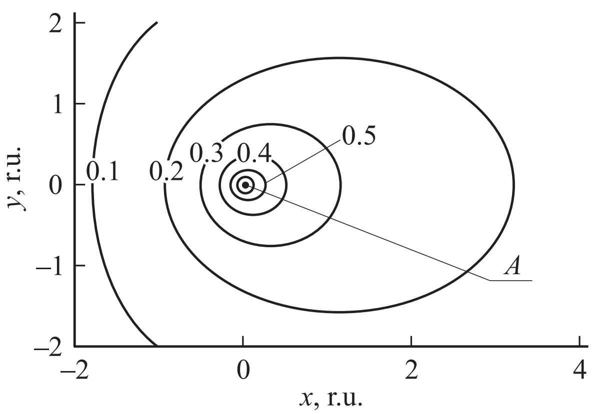

Рис. 2. То же, что на рис. 1, при $\mathrm{Pe} = 0.5$.

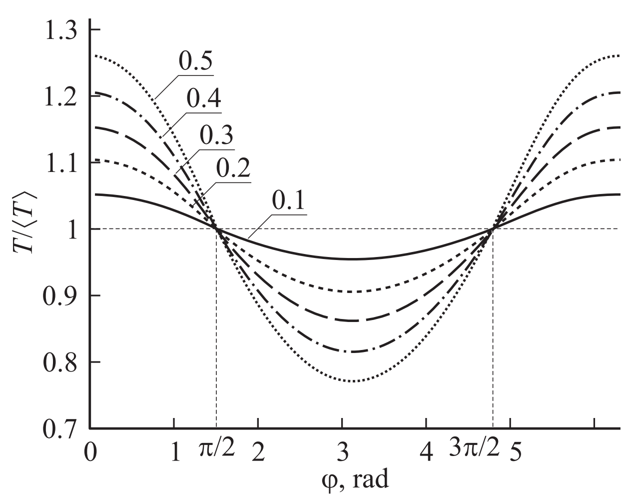

Рис. 3. Распределение относительной температуры на поверхности $r = 1$ при различных числах Пекле (цифры у кривых) для линейного источника тепла в зависимости от полярного угла φ.

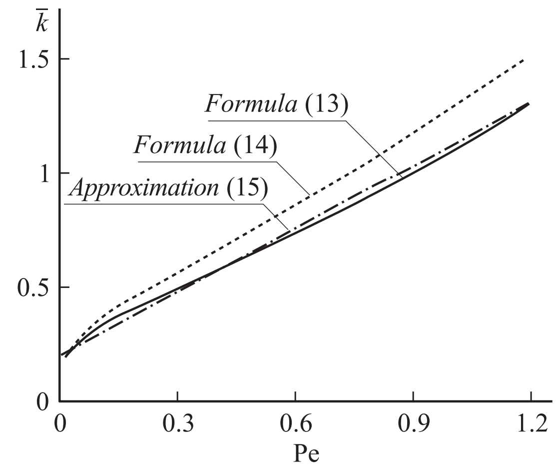

Рис. 4. Расчетные зависимости безразмерного коэффициента теплоотдачи от числа Пекле. Номера формул — у кривых.

$$\begin{cases} k \cong a + b\mathrm{Pe}, \\ k \cong a\mu R^{-1} + bc_p\rho_0 U, \end{cases} \tag{15}$$

где a и b — аппроксимационные параметры: $a = 0.28$, $b = 0.93$.

Из (15) следует, что размерный коэффициент теплопередачи складывается из двух членов, один из которых зависит от радиуса проволочки и теплопроводности газа, а второй прямо пропорционален скорости газа и не зависит от геометрии проволочки. Результаты расчетов безразмерного коэффициента теплопередачи в зависимости от числа Пекле по формулам (13)–(15) приведены на рис. 4.

Оценка погрешности формулы для коэффициента теплоотдачи

Погрешность модели, связанную с заменой источника тепла конечного размера линейным источником тепла, можно оценить путем сравнения величины конвективного теплопереноса через область, занимаемую проволочкой ($r < 1$), и полной энергии, выделяемой источником тепла. Очевидно, что наличие конвективного теплопереноса через область $r < 1$ уменьшает относительную долю кондуктивного теплопереноса в процессе теплопередачи. В случае источника тепла конечного размера конвективный перенос в области $r < 1$ отсутствует, что приводит к повышению температуры поверхности проволочки и соответствующему уменьшению коэффициента теплопередачи по сравнению с линейным источником тепла. Таким образом, значение коэффициента теплопередачи (13) является завышенным. Введем величину ε — отношение величины конвективного потока тепла через область $r < 1$ к полной мощности источника

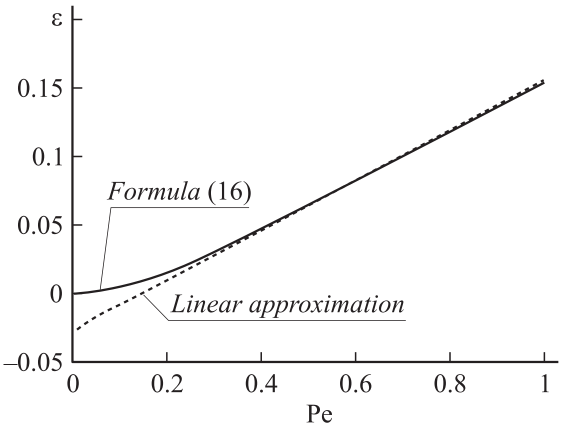

Рис. 5. Относительная доля конвективного потока тепла в зависимости от числа Пекле.

тепла. Учитывая гармоническую зависимость температуры поверхности $r = 1$ от полярного угла φ (рис. 4), из формулы (12) получаем

$$\varepsilon = \frac{\mathrm{Pe}}{\pi} \sin h\left(\frac{\mathrm{Pe}}{2}\right) \int\limits_0^\infty \frac{\exp\left\{-\sqrt{\frac{\mathrm{Pe}^2}{4} + \omega^2}\right\}}{\sqrt{\frac{\mathrm{Pe}^2}{4} + \omega^2}}\, d\omega. \qquad (16)$$

Величина ε может служить мерой относительной погрешности формулы (13).

Результаты расчетов по формуле (16) приведены на рис. 5, где также отмечена линейная аппроксимация $\varepsilon(\mathrm{Pe}) \approx 0.18\mathrm{Pe} - 0.026$, которая справедлива при $0.3 < \mathrm{Pe} < 1$. При $\mathrm{Pe} = 1$ величина ε составляет около 15%, т. е. для чисел Пекле, меньших единицы, формула (13) для коэффициента теплопередачи является вполне адекватной.

Заключение

Данная работа посвящена теоретическому исследованиию коэффициента теплопередачи бесконечно тонкой проволочки в зависимости от скорости газа в пределе нулевого перепада температуры проволочка–газ. Проведенное исследование показало, что для малых чисел Пекле ($\mathrm{Pe} < 1$) при изучении процесса теплообмена тонкая нагретая проволочка может с хорошей степенью точности (около 15%) быть заменена линейным источником тепла. Возможность такой замены позволяет провести полное теоретическое исследование процесса теплообмена между проволочкой и окружающим газом.

Для чисел Пекле в пределах $0.1 - 1$ наблюдается линейная зависимость коэффициента теплоотдачи от скорости. Это заключение совпадает с результатами экспериментов [1,3], где линейная зависимость коэффициента теплоотдачи от скорости наблюдалась при существенно бóльших числах Пекле.

Список литературы

[1] *Мамросов А.Д., Иващенко С.В.* // ПТЭ. 1981. № 4. С. 242–243.

[2] *Кульгавчук В.М., Матьев В.Ю.* // Труды 2-й Междунар. конф. по физике ядерно-возбуждаемой плазмы и пробл. лазеров с ядерной накачкой. Арзамас, 1995. Т. 2. С. 93–101.

[3] *Vlokh G.V., Korzenev A.N., Lisenkov A.V.* et al. // Proc. 5th Intern. Conf. „Atomic and Molecular Pulsed Lasers“. Tomsk: IAO SB RAS, 2001. P. 19.

[4] *Боровков В.В., Лажинцев Б.В., Нор-Аревян В.А.* и др. // Труды 2-й Межд. конф. по физике ядерно-возбуждаемой плазмы и пробл. лазеров с ядерной накачкой. Арзамас, 1995. Т. 1. С. 399–407.

[5] *Влох Г.В., Конак А.И., Матьев В.Ю.* и др. // Труды конф. „Физика ядерно-возб. плазмы и пробл. лазеров с ядерной накачкой“. Обнинск, 1993. Т. 2. С. 55–62.

[6] *Лойцянский Л.Г.* Механика жидкости и газа. М.: Наука, 1973.

[7] *Литвин А.М.* Теоретические основы теплотехники. М.: Энергия, 1969.

[8] *Колмогоров А.Н., Фомин С.В.* Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1989.

[9] *Маркушевич А.И.* Краткий курс теории аналитических функций. М.: Наука, 1978.

[10] *Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И.* Интегралы и ряды. М.: Наука, 1981.