

## Асимптотические законы супердиффузии

© А.И. Саичев, С.Г. Уткин

Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского,  
603600 Нижний Новгород, Россия  
e-mail: saichev@hotmail.ru

(Поступило в Редакцию 6 декабря 2002 г.)

Для изучения динамических и статистических особенностей траекторий диффузионных процессов использовался вспомогательный процесс „дробного сноса“. Выведено уравнение для функции плотности вероятностей случайного блуждания, применимое в субдиффузионном и в супердиффузионном случаях. Найдено его решение, основанное на свойствах функций Миттаг–Леффлера.

### Введение

Аномальная диффузия, чьей отличительной особенностью является нелинейное нарастание среднего квадратичного отклонения со временем, уже обнаружена в широком разнообразии физических процессов. Адекватным аппаратом ее описания служат уравнения в дробных производных. В этой работе затронут случай

$$\langle X^2(t) \rangle \sim t^\nu,$$

являющийся характерным для большинства явлений аномальной диффузии (например, хаотической динамике гамильтоновых систем [1], движению частиц в плазме [2], турбулентной диффузии частиц [3], движению заряженных частиц высокой энергии в кристалле [4]; см. также [5,6]). Такой характер зависимости тесно связан с нарушением центральной предельной теоремы. Вместо нее для аномальной диффузии справедлива обобщенная центральная предельная теорема Леви–Гнedenко на случай существования моментов не всех порядков.

Один из наиболее плодотворных методов описания диффузионных явлений основывается на детальном исследовании модельных процессов, чьи вероятностные распределения являются точными решениями тех или иных диффузионных уравнений. Наиболее ярким примером здесь служит винеровский процесс, плотность вероятностей которого подчиняется классическому уравнению диффузии.

При помощи некоторых сконструированных модельных процессов ниже выведено общее асимптотическое уравнение вероятностного распределения случайного блуждания, применимое как в субдиффузионном ( $0 < \nu < 1$ ), так и в супердиффузионном ( $1 < \nu < 2$ ) случаях, а также найдено его решение.

### Кинематика диффундирующей частицы

Рассмотрим типичный процесс диффузии, аналогичный диффузии молекул газа. Подробно обсудим одномерный случай, имея в виду, что обобщение полученных ниже результатов на диффузию в многомерном пространстве не составляет особых проблем.

Пусть  $\{\dots, t_0, t_1, t_2, \dots, t_n, \dots\}$  моменты „столкновений“, между которыми частица летит с постоянной скоростью, а в момент  $t_k$  скорость скачком меняется от  $v_k$  до  $v_{k+1}$ . Пусть также  $\{\tau_1, \tau_2, \dots\}$  интервалы между столкновениями  $\tau_k = t_k - t_{k-1}$ . Будем считать, что в начальный момент  $t = 0$  частица находилась в начале координат ( $X(t = 0) = 0$ ), а сам начальный момент расположен между моментами столкновений  $t_0$  и  $t_1$  ( $t_0 < 0, t_1 > 0$ ).

Будем интересоваться вероятностными свойствами координаты  $X(t)$  диффундирующей частицы. Детальная статистика  $X(t)$  определяется свойствами случайных интервалов времени  $\{t_1, \tau_2, \dots, \tau_n, \dots\}$  и скоростей  $\{v_1, v_2, \dots, v_n, \dots\}$  между столкновениями. Мы же исследуем асимптотические „макроскопические“ свойства  $X(t)$  на временах  $t \gg \langle \tau \rangle$ , где  $\langle \tau \rangle = \langle \tau_k \rangle$  — среднее время между столкновениями, играющее роль „микроскопического“ масштаба задачи.

Чтобы упростить дальнейший анализ макроскопических свойств процесса диффузии, будем считать, что процесс измерения координаты  $X(t)$  также макроскопичен и состоит в следующем: за координату частицы в текущий момент времени  $t$  примем ее координату в момент последнего столкновения  $t_n$ , и в качестве значения  $X(t)$  возьмем координату частицы  $X(t_n)$  в момент столкновения. При этом измеренная координата частицы, отнесенная к текущему моменту  $t$ , задается выражением

$$X_-(t) = X(t_N) = \begin{cases} v_1 t_1, & t_1 > t, \\ v_1 t_1 + \sum_{k=2}^N v_k \tau_k, & t_1 < t. \end{cases}$$

Здесь  $N = N(t)$  — число столкновений в интервале  $[0, t]$ . Индекс „-“ отражает указанную выше процедуру измерения координаты диффундирующей частицы. В дальнейшем ключевую роль будет играть обратная к  $n = N(t)$  функция времени до  $n$ -го скачка

$$t = T(n) = \begin{cases} 0 & n = 0, \\ t_1, & n = 1, \\ t_1 + \sum_{k=2}^n \tau_k, & n \geq 2. \end{cases}$$

Между функциями  $n = N(t)$  и  $t = T(n)$  имеется очевидная связь

$$N(t) \geq n \iff T(n) < t. \quad (1)$$

## Статистика диффундирующей частицы

Будем интересоваться характеристической функцией процесса  $X(t)$

$$\Theta_-(u; t) = \langle e^{iuX(t)} \rangle. \quad (2)$$

Угловые скобки означают статистическое усреднение по ансамблю случайных моментов столкновений и скоростей частицы между столкновениями. Запишем среднее (2) в более удобной для анализа форме. Для этого используем разложение единичной функции

$$\chi(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \Pi_n(z), \quad (3)$$

где

$$\Pi_n(z) = \chi(z-n) - \chi(z-n-1), \quad \chi(z) = \begin{cases} 1, & z \geq 0, \\ 0, & z < 0. \end{cases} \quad (4)$$

С помощью разложения (3) среднее (2) перепишется в виде

$$\Theta_-(u; t) = \sum_{n=0}^{\infty} \langle e^{iuX(n)} \Pi_n(N(t)) \rangle. \quad (5)$$

Сюда вошла еще одна функция целочисленного аргумента

$$X(n) = \begin{cases} v_1 t_1, & n = 1, \\ v_1 t_1 + \sum_{k=1}^n v_k t_k, & n \geq 2. \end{cases}$$

Обсудим подробнее  $n$ -ое слагаемое суммы (5) (при  $n \geq 1$ ). С учетом (4) оно может быть записано в виде

$$\langle e^{iuX(n)} \Pi_n(N(t)) \rangle = \langle e^{iuX(n)} \chi(N(t) - n) \rangle - \langle e^{iuX(n)} \chi(N(t) - n - 1) \rangle. \quad (6)$$

Пользуясь эквивалентностью неравенств (1), перейдем от (6) к соотношению

$$\langle e^{iuX(n)} \Pi_n(N(t)) \rangle = \langle e^{iuX(n)} \chi(t - T(n)) \rangle - \langle e^{iuX(n)} \chi(t - T(n+1)) \rangle. \quad (7)$$

Применим к обеим частям равенства (5) преобразование Лапласа

$$\hat{\Theta}_-(u; s) = \int_0^{\infty} e^{-st} \Theta_-(u; t) dt.$$

С учетом (7) функция запишется в виде

$$\hat{\Theta}_-(u; s) = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} [\langle e^{iuX(n)-sT(n)} \rangle - \langle e^{iuX(n)-sT(n+1)} \rangle]. \quad (8)$$

## Независимые столкновения

Пусть скорости частицы между столкновениями статистически независимы и имеют одинаковое распределение  $w(v)$ . Аналогично будем считать независимыми и случайные интервалы  $\{t_1, \tau_2, \dots, \tau_n, \dots\}$ . Причем распределение времени  $t_1$  от начала наблюдения до первого столкновения равно  $f_+(\tau)$ , а распределения интервалов  $\tau_k$  одинаковы и равны  $f(\tau)$ . Тогда средние в (8) расщепляются на произведение средних, а функция  $\hat{\Theta}_-(u; s)$  окажется равной

$$\hat{\Theta}_-(u; s) = \frac{1}{s} \left[ 1 - \hat{f}_+(s) + \frac{g(u, s)[1 - \hat{f}(s)]}{1 - g(u, s)} \right]. \quad (9)$$

Здесь использованы обозначения

$$\begin{aligned} g_+(u, s) &= \langle \hat{w}(ut_1) e^{-st_1} \rangle, \\ g(u, s) &= \langle \hat{w}(u\tau) e^{-s\tau} \rangle, \\ g_+(u) &= g_+(u, 0) = \langle \hat{w}(ut_1) \rangle, \\ g(u) &= g(u, 0) = \langle \hat{w}(u\tau) \rangle. \end{aligned} \quad (10)$$

Угловые скобки в (9) и (10) означают усреднение по статистике интервалов  $t_1$  и  $\tau = \tau_k$ , а  $\hat{w}(z)$  — характеристическая функция скорости движения частицы

$$\hat{w}(z) = \int_{-\infty}^{\infty} w(v) e^{ivz} dv,$$

$\hat{f}(s)$ ,  $\hat{f}_+(s)$  — лаплас-образы распределений  $f(\tau)$  и  $f_+(\tau)$ .

Например

$$\hat{f}(s) = g(0, s) = \langle e^{-s\tau} \rangle = \int_0^{\infty} f(\tau) e^{-s\tau} d\tau.$$

В дальнейшем полезным будет другое соотношение, родственное (9). Положив в (9)  $g_+ = g$ ,  $\hat{f}_+ = \hat{f}$ , получим формулу

$$\hat{\Theta}_-(u; s) = \frac{1}{s} \frac{1 - \hat{f}(s)}{1 - g(u, s)}. \quad (11)$$

Она соответствует ситуации, когда в качестве начального момента времени берут момент столкновения ( $t_0 = 0$ ).

## Асимптотические законы диффузии

Ограничимся пока детальным анализом статистических следствий простейшего из приведенных выше соотношений, а именно выражения (11). Отметим, во-первых, что (11) согласуется с условием нормировки

$$\int_{-\infty}^{\infty} W(x; t) dx = 1. \quad (12)$$

Здесь  $W(x;t)$  — искомое вероятностное распределение координаты диффундирующей частицы, равное обратному преобразованию Фурье и Лапласа от функции  $\hat{\Theta}(u;s)$ . Заметив, что  $g(0,s) = f(s)$ , из (11) имеем  $\hat{\Theta}(0;s) = 1/s$  — лаплас-образ единицы. Это как раз и означает, что (11) согласуется с условием нормировки (12).

Аналогично, лаплас-образ среднего квадрата диффундирующей частицы получим по формуле

$$\hat{X}_-^2(s) = \int_{-\infty}^{\infty} \langle X_-^2(t) \rangle e^{-st} dt = - \left. \frac{\partial^2 \hat{\Theta}(u;s)}{\partial u^2} \right|_{u=0}. \quad (13)$$

Вычислим этот лаплас-образ, подставив в (11) первые слагаемые разложения функции в ряд Тейлора в окрестности  $u = 0$ , полагая для простоты, что  $\langle v \rangle = 0$ , а  $\langle v^2 \rangle = \sigma^2$ . В этом случае имеем

$$g(u,s) = \hat{f}(s) - \frac{\sigma^2}{2} u^2 \hat{f}''(s) + \dots, \quad (14)$$

где штрихи означают производные по  $s$ .

Подставив (14) в (11), а затем (11) в (13), для лаплас-образа среднего квадрата имеем

$$\hat{X}_-^2(s) = \frac{\sigma^2}{s\varphi(s)}, \quad \varphi(s) = \frac{1 - \hat{f}(s)}{\hat{f}''(s)}. \quad (15)$$

Мы интересуемся асимптотическим поведением среднего квадрата  $\langle X^2(t) \rangle$  при  $t \rightarrow \infty$ . Она определяется асимптотикой лаплас-образа (15) при  $s \rightarrow 0$ . Поэтому подробно исследуем указанную асимптотику выражения (15). Обсудим вначале стандартную ситуацию, когда распределение  $f(\tau)$  настолько быстро стремится к нулю при  $t \rightarrow \infty$ , что ограничены первые два момента интервалов между столкновениями

$$\langle \tau \rangle < \infty, \quad \langle \tau^2 \rangle < \infty. \quad (16)$$

В этом случае справедливо разложение

$$\hat{f}(s) = 1 - \langle \tau \rangle s + \frac{1}{2} \langle \tau^2 \rangle s^2 + \dots \implies \hat{f}''(s) = \langle \tau^2 \rangle + \dots \quad (17)$$

Подставив (17) в (15), будем иметь

$$\hat{X}_-^2(s) \sim \sigma^2 \frac{\langle \tau^2 \rangle}{\langle \tau \rangle} \frac{1}{s^2}, \quad s \rightarrow 0. \quad (18)$$

Пользуясь табличной формулой преобразования Лапласа

$$\frac{1}{s^\gamma} \iff \frac{t^{\gamma-1}}{\Gamma(\gamma)}, \quad (19)$$

из (18) имеем стандартный линейный закон диффузии

$$\langle X_-^2(t) \rangle \sim Dt, \quad t \rightarrow \infty, \quad D = \sigma^2 \frac{\langle \tau^2 \rangle}{\langle \tau \rangle}. \quad (20)$$

Интересующая нас аномальная супердиффузия возникает, если нарушается одно или оба неравенства (16). Это происходит, если распределение интервалов между столкновениями имеет степенную асимптотику

$$f(\tau) \sim \kappa^\beta \tau^{-\beta-1}, \quad \tau \rightarrow \infty, \quad 0 < \beta \leq 2.$$

Здесь  $\kappa$  имеет размерность времени. Рассмотрим по отдельности случаи  $0 < \beta < 1$  и  $1 < \beta < 2$  (случай  $\beta = 1$  и  $\beta = 2$ , содержащие логарифмические поправки, требуют отдельного анализа). В первом случае требуемая асимптотика такова

$$\hat{f}(s) \sim 1 - \kappa^\beta \frac{\Gamma(1-\beta)}{\beta} s^\beta, \quad s \rightarrow 0, \quad 0 < \beta < 1. \quad (21)$$

При этом

$$\hat{f}''(s) \sim \kappa^\beta \Gamma(2-\beta) s^{\beta-2}, \quad s \rightarrow 0, \quad 0 < \beta < 1. \quad (22)$$

Подставив (21), (22) в (15), имеем

$$\hat{X}_-^2(s) \sim \sigma^2 \beta(1-\beta) \frac{1}{s^3}, \quad s \rightarrow 0, \quad 0 < \beta < 1.$$

Найдя обратное преобразование Лапласа от этой асимптотики с помощью табличной формулы (19), получим

$$\langle X_-^2(t) \rangle \sim \sigma^2 \frac{\beta(1-\beta)}{2} t^2, \quad t \rightarrow \infty, \quad 0 < \beta < 1. \quad (23)$$

Физический смысл полученного результата понятен. В случае  $0 < \beta < 1$  столкновения настолько редки, что частица как бы не испытывает столкновений и движется равномерно

$$X(t) \sim vt, \quad \langle X^2(t) \rangle \sim \sigma^2 t^2.$$

Обсудим теперь случай  $1 < \beta < 2$ . В этом случае справедлива асимптотика

$$\hat{f}(s) \sim 1 - \langle \tau \rangle s + \kappa^\beta \frac{\Gamma(2-\beta)}{\beta(\beta-1)} s^\beta, \quad s \rightarrow 0, \quad 1 < \beta < 2. \quad (24)$$

Здесь асимптотика  $\hat{f}''$  также описывается формулой (22). Подставив (24), (22) в (15), получим

$$\hat{X}_-^2(s) \sim \sigma^2 \frac{\kappa^\beta}{\langle \tau \rangle} \Gamma(2-\beta) \frac{1}{s^{4-\beta}}, \quad s \rightarrow 0, \quad 1 < \beta < 2.$$

Пользуясь табличной формулой (19), получим окончательно

$$\langle X_-^2(t) \rangle \sim \sigma^2 \frac{\kappa^\beta}{\langle \tau \rangle} \frac{\Gamma(2-\beta)}{\Gamma(4-\beta)} t^{3-\beta}.$$

Таким образом, при  $1 < \beta < 2$  средний квадрат координаты частицы подчиняется супердиффузионному закону

$$\langle X_-^2(t) \rangle \sim t^\gamma, \quad \gamma = 3 - \beta.$$

Как и следовало ожидать, при  $\beta = 1$  он переходит в бесстолкновительный закон (23), а при  $\beta = 2$  — в закон линейной диффузии (20).

## Дробное диффузионное уравнение

Получим уравнения относительно  $W(x;t)$ . Для чего в (11) подставим разложения (14), (22), а также (21) или (24) для  $0 < \beta < 1$  или  $1 < \beta < 2$  соответственно. В первом случае получим

$$s^2 \hat{\Theta}_-(u;s) + Du^2 \hat{\Theta}_-(u;s) = s,$$

$$D = \frac{\beta(1-\beta)}{2} \sigma^2, \quad 0 < \beta < 1.$$

Применив к данному равенству обратные преобразования Фурье и Лапласа, придем к искомому уравнению

$$\frac{\partial^2 W(x;t)}{\partial t^2} = D \frac{\partial^2 W(x;t)}{\partial x^2} + \delta'(t)\delta(x).$$

Его решение находится, как обратное фурье-лаплас-преобразование функции

$$\hat{\Theta}_-(u;s) = \frac{s}{s^2 + Du^2} \iff W(x;t)$$

$$= \frac{1}{2} [\delta(x - \sqrt{Dt}) + \delta(x + \sqrt{Dt})].$$

Во втором случае ( $1 < \beta < 2$ ) равенство (11) приводит к асимптотическому уравнению

$$s^\gamma \hat{\Theta}_-(u;s) + \frac{\sigma^2}{2\delta} u^2 \hat{\Theta}_-(u;s) = s^{\gamma-1},$$

$$\delta = \frac{\langle \tau \rangle}{\kappa^{3-\gamma} \Gamma(\gamma-1)}, \quad \gamma = 3 - \beta.$$

Отсюда

$$\frac{\partial^\gamma W(x;t)}{\partial t^\gamma} = \frac{\sigma^2}{2\delta} \frac{\partial^2 W(x;t)}{\partial x^2} + \frac{t^{-\gamma}}{\Gamma(1-\gamma)} \chi(t)\delta(x).$$

Это уравнение подбором масштабов времени и координаты  $\tilde{t} = t/\delta^{1/\gamma}$ ,  $\tilde{x} = x \cdot \sqrt{2}/\sigma$  с заменой  $\beta$  на  $\gamma = 3 - \beta$  сводится к следующему уравнению:

$$\frac{\partial^\gamma \tilde{W}(\tilde{x};\tilde{t})}{\partial \tilde{t}^\gamma} = \frac{\partial^2 \tilde{W}(\tilde{x};\tilde{t})}{\partial \tilde{x}^2} + \frac{\tilde{t}^{-\gamma}}{\Gamma(1-\gamma)} \chi(\tilde{t})\delta(\tilde{x}), \quad (25)$$

которое будем называть дробно-диффузионным.

## Процесс дробного сноса

Перед тем как решить полученное в предыдущем разделе уравнение дробной диффузии, полезно обсудить свойства процесса дробного сноса. Но вначале введем  $\beta$ -устойчивое время  $t(\varrho)$  с устойчивым материнским распределением  $f_\beta(t)$

$$t(\varrho) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{[qn]} T_k^{(1/n)}.$$

Здесь  $T_k^{(1/n)}$  — безгранично делимые неотрицательные случайные величины, лаплас-образы плотностей вероятностей которых равны  $\hat{f}^{1/n}(s)$ , где  $f(s) = \exp[-s^\beta]$  — материнский лаплас-образ ( $0 < \beta < 1$ ). В силу устойчивости  $f_\beta(t)$  плотность вероятностей случайной функции  $t(\varrho)$  равна

$$f_\beta(t;\varrho) = \frac{1}{\varrho^{1/\beta}} f_\beta\left(\frac{t}{\varrho^{1/\beta}}\right). \quad (26)$$

Рассмотрим функцию  $\varrho(t)$ , обратную по отношению к  $t(\varrho)$ . Пусть известна плотность вероятностей  $f(t;\varrho)$  значений функции  $t(\varrho)$ , а требуется определить плотность вероятностей  $Q(\varrho;t)$  значений обратной функции  $\varrho(t)$ . Найдём связь между ними, опираясь на эквивалентность неравенств

$$t(\varrho) < t \iff \varrho(t) \geq \varrho.$$

На вероятностном языке то же можно записать

$$F(t;\varrho) = P(t(\varrho) < t) = P(\varrho(t) \geq \varrho) = \int_{\varrho}^{\infty} Q(\varrho';t) d\varrho'.$$

Отсюда находим требуемое соотношение между плотностями вероятностей случайных процессов  $t(\varrho)$  и  $\varrho(t)$

$$Q(\varrho;t) = -\frac{\partial F(t;\varrho)}{\partial \varrho} = -\frac{\partial}{\partial \varrho} \int_{-\infty}^t f(t';\varrho) dt'. \quad (27)$$

Подставив распределение (26) в (27), найдём плотность вероятности обратной функции  $\varrho(t)$

$$Q_\beta(\varrho;t) = \frac{1}{t^\beta} Q_\beta\left(\frac{\varrho}{t^\beta}\right),$$

$$Q_\beta(\varrho) = \frac{1}{\beta \varrho^{1+1/\beta}} f_\beta\left(\frac{1}{\varrho^{1/\beta}}\right). \quad (28)$$

Из определения  $Q_\beta(\varrho)$  и из вида лаплас-образа распределения  $f_\beta(t)$  следует, что

$$\exp(-\varrho s^\beta) = \beta \int_0^{\infty} e^{-st} \frac{\varrho}{t^{\beta+1}} Q_\beta\left(\frac{\varrho}{t^\beta}\right) dt. \quad (29)$$

Пусть величина  $\mathcal{R}$  имеет распределение  $Q_\beta(\varrho)$ . Найдём моменты  $\langle \mathcal{R}^\nu \rangle$ , умножив (29) на  $\varrho^{\nu-1}$  и проинтегрировав по  $\varrho$  от 0 до  $\infty$ . В итоге получим

$$\frac{\Gamma(\nu)}{s^{\nu\beta}} = \beta \langle \mathcal{R}^\nu \rangle \int_0^{\infty} e^{-st} t^{\nu\beta-1} dt = \beta \langle \mathcal{R}^\nu \rangle \frac{\Gamma(\nu\beta)}{s^{\nu\beta}}.$$

Отсюда имеем окончательно

$$\langle \mathcal{R}^\nu \rangle = \int_0^{\infty} \varrho^\nu Q_\beta(\varrho) d\varrho = \frac{\Gamma(\nu)}{\beta \Gamma(\nu\beta)} = \frac{\Gamma(\nu+1)}{\Gamma(\nu\beta+1)}.$$

Следовательно, разложение лаплас-образа распределения  $Q_\beta(\tau)$  в ряд Тейлора имеет вид

$$\hat{Q}_\beta(s) = \langle e^{-s\mathcal{Q}} \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\Gamma(n\beta + 1)} s^n = E_\beta(-s). \quad (30)$$

Сюда вошла функция Миттаг–Леффлера  $E_\beta(z)$ , равная по определению

$$E_\beta(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\Gamma(n\beta + 1)}.$$

Можно показать [6–8], что функция  $E_\beta(-(t/\tau)^\beta)$  является решением уравнения

$$\frac{d^\beta \Phi(t)}{dt^\beta} + \tau^{-\beta} \Phi(t) = \frac{t^{-\beta}}{\Gamma(1-\beta)} \chi(t), \quad 0 < \beta < 1. \quad (31)$$

Это уравнение является дробным обобщением обыкновенного дифференциального уравнения

$$\frac{d\Phi(t)}{dt} = -\frac{1}{\tau} \Phi(t),$$

решением которого служит экспонента  $e^{-t/\tau} = E_1(-t/\tau)$ .

Из (28) и (30) видно, что лаплас-образ по  $q$  распределения  $Q(q;t)$  равен

$$Q(q;t) = \langle e^{-\gamma q t} \rangle = E_\beta(-\gamma t^\beta). \quad (32)$$

Рассмотрим случайный процесс  $\mathcal{X}(t) = q(t)$  с плотностью вероятностей

$$W(x;t) = \frac{1}{t^\beta} Q_\beta\left(\frac{x}{t^\beta}\right). \quad (33)$$

Назовем его дробным сносом. Его характеристическая функция, согласно (32) равна

$$\Theta(u;t) = \langle e^{iuq(t)} \rangle = E_\beta(iut^\beta).$$

Из (31) следует, что она подчиняется уравнению

$$\frac{\partial^\beta \Theta}{\partial t^\beta} = iu\Theta + \frac{t^{-\beta}}{\Gamma(1-\beta)} \chi(t). \quad (34)$$

С помощью процесса дробного сноса удается найти плотность вероятностей дробно-диффузионного процесса  $\mathcal{X}(t) = V(q(t))$ . Здесь  $V(q)$  — винеровский процесс ( $\langle V^2(q) \rangle = 2q$ ). Очевидно, что искомая плотность вероятностей подчиняется уравнению дробной диффузии (25), а характеристическая функция — уравнению

$$\frac{d^\beta \Theta}{dt^\beta} + u^2 \Theta = \frac{t^{-\beta}}{\Gamma(1-\beta)} \chi(t).$$

Решим его, опираясь на характеристическую функцию дробного сноса. Разобьем его на четную и нечетную составляющие

$$\Theta = \Theta_{\text{even}} + \Theta_{\text{odd}}$$

и подставим в (34). Это дает два уравнения

$$\frac{d^\beta \Theta_{\text{even}}}{dt^\beta} = iu\Theta_{\text{odd}} + \frac{t^{-\beta}}{\Gamma(1-\beta)} \chi(t), \quad \frac{d^\beta \Theta_{\text{odd}}}{dt^\beta} = iu\Theta_{\text{even}}.$$

Поддействовав на первое из них производной порядка  $\beta$  по  $t$  и исключив нечетную компоненту, перейдем к замкнутому уравнению относительно  $\Theta_{\text{even}}(u;t)$

$$\frac{\partial^{2\beta} \Theta_{\text{even}}}{\partial t^{2\beta}} + u^2 \Theta_{\text{even}} = \frac{t^{-2\beta}}{\Gamma(1-2\beta)} \chi(t).$$

Соответственно четная компонента плотности вероятностей дробного сноса

$$W_{\text{even}}(x;t) = \frac{1}{2} [W(x;t) + W(-x;t)] = \frac{1}{2} W(|x|;t) \quad (35)$$

подчиняется уравнению

$$\frac{\partial^{2\beta} W_{\text{even}}}{\partial t^{2\beta}} = \frac{\partial^2 W_{\text{even}}}{\partial x^2} + \frac{t^{-2\beta}}{\Gamma(1-2\beta)} \chi(t) \delta(x),$$

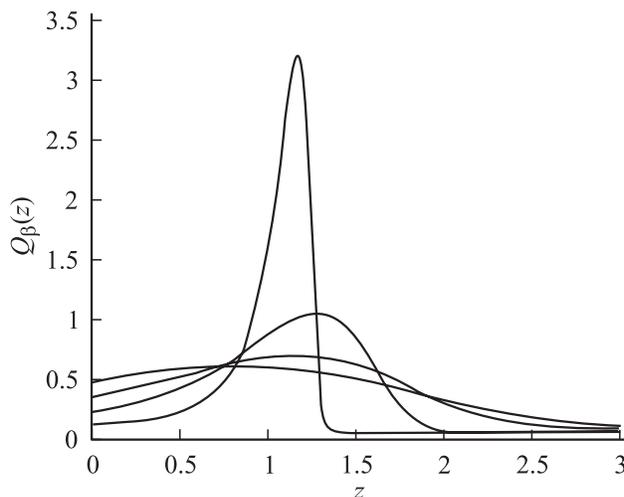
которое сводится к (25) заменой  $\beta \mapsto \gamma/2$ . Таким образом, согласно (35), (33), решение уравнения дробной диффузии (25) можно записать в виде

$$W(x;t) = \frac{1}{2t^{\gamma/2}} Q_{\gamma/2}\left(\frac{|x|}{t^{\gamma/2}}\right).$$

Распределение  $Q_{\gamma/2}(z)$  найдем обратным преобразованием Фурье от  $E_{\gamma/2}(iu)$ , ( $1 < \gamma < 2$ ). Из свойств функции Миттаг–Леффлера, следует, что

$$Q_{\gamma/2}(z) = \frac{2}{\pi\gamma} \operatorname{Re} \int_0^\infty \exp(ixz + x^{2/\gamma} e^{-i\pi/\gamma}) dx.$$

Последние два равенства задают плотность вероятностей супердиффузии. Для наглядности приведем графики  $Q_\beta(z)$  при разных  $\beta$  (см. рисунок).



Графики распределений  $Q_\beta(z)$  для значений  $\beta = 0.65-0.95$ . Они экспоненциально спадают с ростом  $z$ , обеспечивая ограниченность моментов  $\langle \mathcal{X}^n \rangle$ .

## Заключение

Выше был описан типичный диффузионный процесс случайного блуждания частицы с постоянной скоростью между столкновениями. Основываясь на асимптотических свойствах его характеристической функции, были получены статистические характеристики данного процесса, а также выведены макроскопические уравнения, описывающие его кинетику. При помощи сконструированного процесса „дробного сноса“ найдено решение уравнения дробной диффузии, выражающееся через функции Миттаг–Леффлера.

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта „Научные школы России“ (№ 00-15-96619).

## Список литературы

- [1] *Zaslavsky G.M., Edelman M., Niyazov B.* // *Chaos*. 1997. Vol. 7. N 1. P. 159–181.
- [2] *Забурдаев В.Ю., Чукбар К.В.* // *ЖЭТФ*. 2002. Т. 121. Вып. 2. С. 299–307.
- [3] *Klafter J., Shlesinger M.F., Zumofen G.* // *Phys. Tod*. 1996. Vol. 49. N 2. P. 33–39.
- [4] *Учайкин В.В.* // *ТМФ*. 1998. Т. 115. № 1. С. 154–161.
- [5] *Barkai E.* // *Phys. Rev. E*. 2001. Vol. 63. P. 046118–1 / 17.
- [6] *Metzler R., Klafter J.* // *Phys. Rep.* 2000. Vol. 339. P. 1–77.
- [7] *Saichev A.I., Zaslavsky G.M.* // *Chaos*. 1997. Vol. 7. N 4. P. 753–764.
- [8] *Saichev A.I., Wojczyński W.A.* *Distributions in the Physical and Engineering Sciences*. Vol. 1. Boston: Birkhäuser, 1997. 336 p.