

01;03

## Аналитическое решение задачи о скачке температуры в металле

© А.В. Латышев, А.А. Юшканов

Московский государственный областной университет,  
105005 Москва, Россия

e-mail: latyshev@orc.ru, yushkanov@mtu-net.ru

(Поступило в Редакцию 31 октября 2002 г.)

Получено аналитическое решение задачи о скачке температуры в металле, обусловленном потоком тепла к поверхности. Получено точное выражение для электрического поля, генерируемого тепловыми процессами. По точным выражениям построены профили электрического поля при различных значениях отношения длины свободного пробега электронов к дебаевскому радиусу. Показано, что профиль поля вблизи поверхности может существенно отличаться от дебаевского.

### Введение

Вопрос о распределении температуры вблизи поверхности металла чрезвычайно важен для решения задач о теплообмене между металлом и окружающей средой, особенно при низких температурах, а также для металлических образцов малого размера. Последний случай является типичным в микроэлектронике. Для металлических образцов малого размера становится принципиальным учет влияния поверхности на распределение температуры.

Рассмотрим плоскую границу раздела между металлом и окружающей средой. Предположим, что имеется поток тепла в металле, текущий к (или от) поверхности. Введем декартову систему координат с центром на поверхности и осью  $x$ , перпендикулярной поверхности и направленной в глубь металла. Тогда на расстояниях от поверхности, существенно превышающих  $l_0$  — длину свободного пробега электронов, потоку тепла соответствует постоянный градиент температуры  $K_t = dT/dx$  (здесь и далее будем пренебрегать возможной анизотропией свойств металла). Будем предполагать, что данный градиент достаточно мал в том смысле, что относительный перепад температуры на длине  $l_0$  много меньше единицы.

Слой, примыкающий к границе раздела и имеющий толщину порядка  $l_0$ , будем называть, как это принято в кинетической теории, слоем Кнудсена. Вне слоя Кнудсена профиль температуры имеет вид  $T = T_0 + K_t x$ . Обозначим температуру поверхности через  $T_s$ . Скачком температуры называют величину  $\Delta T = T_0 - T_s$ . Эта величина при малых градиентах температуры пропорциональна градиенту  $K_t$

$$\Delta T = C_t l_0 K_t. \quad (1)$$

Коэффициент  $C_t$ , не зависящий от  $K_t$ , называется коэффициентом скачка температуры. Для определения коэффициента  $C_t$  необходимо решить кинетическое уравнение вблизи поверхности металла в слое Кнудсена. Вместо абсолютного скачка температуры  $\Delta T$  обычно имеют дело с относительным скачком  $\varepsilon_t = C_t l_0 k_t$ ,  $k_t = K_t/T_s$  — относительный градиент температуры.

Отметим, что в общем случае процессы теплопроводности в металле сопровождаются возникновением электрического поля [1]. Поэтому наряду с задачей о распределении температуры вблизи поверхности возникает задача о поведении электрического поля в слое Кнудсена, генерируемого тепловыми процессами.

Отметим, что в [2] было рассмотрено поведение электрического поля вблизи поверхности раздела между кристаллитами в металле при прохождении электрического тока. Рассмотрение в [2] велось для нулевой температуры, т.е. для случая, когда температура много меньше температуры вырождения электронного газа. Другие работы в этом направлении авторам неизвестны.

Целью данной работы являются вычисление на основе аналитического решения кинетического уравнения для электронов скачка температуры в металле и построение соответствующего профиля электрического поля вблизи поверхности.

Отметим, что мы рассматриваем общий случай произвольной степени вырождения электронного газа. Поэтому полученные результаты справедливы в широком диапазоне температур и для широкого класса материалов, включая полуметаллы.

### Кинетическое уравнение

Рассмотрим металл, в котором ферми-поверхность имеет сферическую форму. В кинетике металлов часто используется кинетическое уравнение для электронов в так называемом  $\tau$ -приближении [1,3,4]

$$\frac{\partial f}{\partial t} + (\mathbf{v}\nabla)f + e_0 \mathbf{E} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{p}} = \frac{1}{\tau} (f_F^0 - f). \quad (2)$$

Здесь  $f$  — функция распределения электронов,  $e_0$  — заряд электрона,  $\mathbf{p}$  — импульс электрона,  $\mathbf{E}$  — электрическое поле,  $\mathbf{v}$  — скорость электронов,  $\tau$  — время релаксации электронов к равновесной фермиевской функции распределения  $f_F^0$ .

При конечной температуре необходимо учитывать, что время релаксации  $\tau$  может зависеть от скорости движения электронов. Если доминирует рассеяние электронов на примесях, то наиболее разумным представляется

предположение о постоянстве длины свободного пробега электронов. При этом время релаксации  $\tau$  будет обратно пропорционально скорости электронов, т.е.  $\tau = l_0/w$ . Через  $l_0$  мы обозначили длину свободного пробега электронов, а  $w = |\mathbf{v} - \mathbf{u}|$ , где  $\mathbf{u}$  — средняя скорость движения электронов. Отметим, что в металлах во всех физических реализуемых случаях выполняется условие  $u \ll v$ . Поэтому в дальнейшем везде вместо  $w$  будем писать  $v$ .

Кроме того, при конечной температуре наряду с кинетическим уравнением для электронов необходимо, вообще говоря, принимать во внимание кинетическое уравнение, описывающее поведение фононов.

Пусть функция распределения фононов  $f_{\text{ph}}$  удовлетворяет кинетическому уравнению [1,4]

$$\frac{\partial f_{\text{ph}}}{\partial t} + (\mathbf{C}\nabla)f_{\text{ph}} = J(f_{\text{ph}}, f). \quad (3)$$

Здесь  $\mathbf{C}$  — скорость фононов;  $J(f_{\text{ph}}, f)$  — интеграл столкновения, учитывающий рассеяние фононов на электронах, на дефектах решетки и межфононное рассеяние.

При конечной температуре в уравнении (2) в качестве равновесной функции распределения электронов вместо  $f_F^0$ , соответствующей нулевой температуре, должна присутствовать фермиевская функция распределения с некоторой эффективной температурой  $T_*$  и эффективным химическим потенциалом  $\mu^*$ . При этом кинетическое уравнение для электронов в  $\tau$ -приближении запишется в следующем виде

$$\frac{\partial f}{\partial t} + (\mathbf{v}\nabla)f + e_0\mathbf{E}\frac{\partial f}{\partial \mathbf{p}} = \frac{v}{l_0}(f_F^s - f). \quad (4)$$

Здесь  $f_F^s$  — функция распределения Ферми (фермиан);  $f_F^s = f_F(\mu^*, T_*)$ ;

$$f_F(\mu^*, T_*) = \left[ \exp\left(\frac{mv^2}{2k_0T_*} - \frac{\mu^*}{k_0T_*}\right) + 1 \right]^{-1},$$

$k_0$  — постоянная Больцмана.

Закон сохранения числа электронов приводит к равенству, следующему из уравнения (4),

$$\int v f d\Omega_F = \int v f_F^s d\Omega_F. \quad (5)$$

Здесь  $d\Omega_F = (2s + 1)(2\pi\hbar)^{-3} dp$ ,  $\hbar$  — постоянная Планка,  $s$  — спин-электрона. Интегрирование ведется по всему пространству скоростей. Для большинства металлов в переносе тепла доминирует вклад электронной подсистемы [4]. В дальнейшем будем рассматривать именно этот случай и будем пренебрегать вкладом фононов в перенос тепла.

Из кинетического уравнения (4) для электронов в стационарном случае вытекает следующее соотношение:

$$\nabla \mathbf{Q}_e = \frac{v}{l_0} \left( \int v \frac{m}{2} v^2 f_F^s d\Omega_F - \int v \frac{m}{2} v^2 f d\Omega_F \right). \quad (6)$$

Здесь  $\mathbf{Q}_e$  — поток тепла, переносимый электронами;  $m$  — эффективная масса электрона. В стационарном случае при отсутствии источников тепла полный поток тепла  $\mathbf{Q}$  сохраняется, т.е.  $\nabla \mathbf{Q} = 0$ . В случае, когда вкладом фононов в перенос тепла в металле можно пренебречь, согласно (6), и  $\nabla \mathbf{Q}_e = 0$ . Тогда из уравнения (5) вытекает следующее соотношение:

$$\int v \frac{m}{2} v^2 f d\Omega_F = \int v \frac{m}{2} v^2 f_F^s d\Omega_F. \quad (7)$$

Соотношения (5) и (7) определяют параметры  $T_*$ ,  $\mu^*$  кинетического уравнения (4).

Отметим, что в рассматриваемом приближении кинетическое уравнение для электронов (4) оказывается независимым от кинетического уравнения для фононов (3). При этом ряд тонких эффектов, например увлечение электронов фононами, оказываются неучтенными. Для их учета необходим выход за пределы  $\tau$ -приближения, рассмотрению которого посвящена данная работа. Будем считать, что массовая скорость много меньше скорости электронов, а возникающие характерные перепады температуры на длине  $l_0$  малы по сравнению с температурой электронного газа. В этих предположениях возможна линеаризация задачи. Будем искать функцию распределения в виде  $f = f_F^s + \varphi(t, \mathbf{r}, \mathbf{v})g$ . Здесь  $f_F^s = f_F(\mu_s, T_s)$ ;  $\varphi$  — новая неизвестная функция;  $\mu_s$  — химический потенциал электронов, рассеянных поверхностью;

$$g = -\frac{\partial}{\partial \varepsilon_s} f_F^s; \quad \varepsilon_s = \frac{mv^2}{2k_0T_s} - \frac{\mu_s}{k_0T_s}.$$

Введем обозначения

$$\mathbf{c} = \sqrt{\frac{m}{2k_0T_s}} \mathbf{v}, \quad \alpha = \frac{\mu_s}{k_0T_s}, \quad \varepsilon_* = \frac{mv^2}{2k_0T_*} - \frac{\mu_*}{k_0T_*}.$$

С учетом этих обозначений

$$f_F^*(\varepsilon_*) = \frac{1}{\exp(\varepsilon_*) + 1}, \quad f_F^s(c, \alpha) = \frac{1}{\exp(c^2 - \alpha) + 1},$$

$$g = g(c, \alpha) = \frac{\exp(c^2 - \alpha)}{[\exp(c^2 - \alpha) + 1]^2}.$$

Займемся линеаризацией локального фермиана  $f_F^*$ , переходя к безразмерным величинам. Заметим, что

$$\varepsilon_* = \frac{T_s}{T_*} \left[ \frac{m}{2k_0T_s} v^2 - \frac{\mu_*}{k_0T_s} \right] = \frac{T_s}{T_*} (c^2 - \alpha_*),$$

$$\alpha_* = \frac{\mu_*}{k_0T_s}.$$

Учитывая, что  $T_* = T_s + \delta T_s$ ,  $\alpha_* = \alpha + \delta \alpha_*$ , получаем

$$\varepsilon_* = c^2 - \alpha - \frac{\delta T_s}{T_s} (c^2 - \alpha) - \delta \alpha_*,$$

откуда

$$\delta \varepsilon_* = -\delta \alpha_* - (c^2 - \alpha) \frac{\delta T_s}{T_s},$$

где  $\delta \varepsilon_* = \varepsilon_* - \varepsilon_s$ ,  $\varepsilon_s = c^2 - \alpha$ .

Следовательно,

$$f_F^* = f_F^s + \left( \frac{\partial f_F^*}{\partial \varepsilon_*} \right)_{\varepsilon_* = \varepsilon_s} \delta \varepsilon_*$$

или

$$f_F^* = f_F^s + g \left[ \delta \alpha_* + (c^2 - \alpha) \frac{\delta T_*}{T_s} \right].$$

Введем безразмерные величины

$$\mathbf{e} = \frac{e_0 l_0}{k_0 T_s} \mathbf{E}, \quad t_* = t \sqrt{\frac{2k_0 T_s}{m l_0^2}}, \quad \mathbf{r}_* = \frac{\mathbf{r}}{l_0}.$$

Далее звездочки будем опускать. В безразмерных переменных уравнение (4) принимает вид

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + (\mathbf{c} \nabla) \varphi - \mathbf{c} \mathbf{e} = c \left[ \delta \alpha_* + (c^2 - \alpha) \frac{\delta T_*}{T_s} - \varphi \right]. \quad (8)$$

Параметры этого уравнения  $\delta \alpha_*$ ,  $\delta T_*$  находятся из законов сохранения (соотношения (5) и (7)), которые теперь принимают вид

$$\int \left[ \delta \alpha_* + (c^2 - \alpha) \frac{\delta T_*}{T_s} - \varphi \right] c g d^3 c = 0,$$

$$\int \left[ \delta \alpha_* + (c^2 - \alpha) \frac{\delta T_*}{T_s} - \varphi \right] c^3 g d^3 c = 0.$$

Из этой системы находим

$$\frac{\delta T_*}{T_s} = -\frac{r_1(\alpha)}{2\pi \Delta(\alpha)} \int \varphi c g d^3 c + \frac{l(\alpha)}{2\pi \Delta(\alpha)} \int \varphi c^3 g d^3 c,$$

$$\delta \alpha_* - \alpha \frac{\delta T_*}{T_s} = \frac{r_3(\alpha)}{2\pi \Delta(\alpha)} \int \varphi c g d^3 c - \frac{r_1(\alpha)}{2\pi \Delta(\alpha)} \int \varphi c^3 g d^3 c.$$

Здесь

$$r_1(\alpha) = 4 \int_0^\infty c \ln[1 + \exp(\alpha - c^2)] dc,$$

$$l(\alpha) = \ln(1 + e^\alpha),$$

$$r_3(\alpha) = 12 \int_0^\infty c^3 \ln[1 + \exp(\alpha - c^2)] dc,$$

$$\Delta(\alpha) = l(\alpha) r_3(\alpha) - r_1^2(\alpha).$$

Представим уравнение (8) в стандартной форме. С учетом приведенных выше формул для правой части уравнения (8) получаем

$$c^2 \frac{\delta T_*}{T_s} + (\delta \alpha_* - \alpha \frac{\delta T_*}{T_s}) = \frac{1}{2\pi} \int \left[ \frac{l^2(\alpha)}{\Delta(\alpha)} c^2 c'^2 - (c^2 + c'^2) \frac{r_1(\alpha) l(\alpha)}{\Delta(\alpha)} + \frac{r_3(\alpha) l(\alpha)}{\Delta(\alpha)} \right] \frac{g(c', \alpha) c'}{l(\alpha)} d^3 c'.$$

Заметим, что

$$\begin{aligned} & \frac{l^2(\alpha)}{\Delta(\alpha)} c^2 c'^2 - (c^2 + c'^2) \frac{r_1(\alpha) l(\alpha)}{\Delta(\alpha)} + \frac{r_3(\alpha) l(\alpha)}{\Delta(\alpha)} \\ &= 1 + \frac{l^2(\alpha)}{\Delta(\alpha)} \left( c^2 - \frac{r_1(\alpha)}{l(\alpha)} \right) \left( c'^2 - \frac{r_1(\alpha)}{l(\alpha)} \right). \end{aligned}$$

Обозначив теперь

$$k(c, c') = 1 + \frac{l^2(\alpha)}{\Delta(\alpha)} \left( c^2 - \frac{r_1(\alpha)}{l(\alpha)} \right) \left( c'^2 - \frac{r_1(\alpha)}{l(\alpha)} \right),$$

$$d\Omega(\alpha) = \frac{g(c', \alpha) c'}{l(\alpha)} d^3 c',$$

представим уравнение (8) в виде

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \varphi}{\partial t} + (\mathbf{c} \nabla) \varphi + c \varphi(t, \mathbf{r}, \mathbf{c}) - \mathbf{c} \mathbf{e}(\mathbf{r}) \\ &= \frac{c}{2\pi} \int k(c, c') \varphi(t, \mathbf{r}, \mathbf{c}) d\Omega(\alpha). \quad (9) \end{aligned}$$

## Постановка задачи

Пусть полупространство  $x > 0$  заполнено металлом, плоскость  $x=0$  совмещена с его границей. Предположим, что электроны отражаются от поверхности чисто диффузно [4]. Предположим, что существует поток тепла в металле, перпендикулярный поверхности. Тогда и электрическое поле, связанное с потоком тепла, будет перпендикулярно поверхности. При этом все параметры задачи будут зависеть только от координаты  $x$ .

Система уравнений, описывающих данную задачу, состоит из кинетического уравнения для электронов (9) (с учетом стационарности задачи) и уравнения для электрического поля. В безразмерном виде эти уравнения имеют вид

$$\begin{aligned} & \mu \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \varphi(x, \mu, c) - \mu e(x) \\ &= \frac{1}{l(\alpha)} \int_{-1}^1 \int_0^\infty k(c, c') \varphi(x, \mu', c') g(c') c'^3 d\mu' dc', \\ & e'(x) = a_0^2 \int_{-1}^1 \int_0^\infty \varphi(x, \mu, c) g(c) c^2 d\mu dc, \\ & a_0^2 = \frac{e_0^2 m^2 l_0^2}{\pi^2 \hbar^3 \varepsilon_0} \sqrt{\frac{2k_0 T_s}{m}}. \quad (10) \end{aligned}$$

Здесь  $\varepsilon_0$  — электрическая постоянная,  $\mu = c_x/c$ . Граничные условия, учитывающие диффузный характер рассеяния электронов на поверхности [4,5] и условия в объеме металла, имеют вид

$$\varphi(0, \mu, c) = A_0, \quad 0 < \mu < 1,$$

$$\begin{aligned} & \varphi(x, \mu, c) = \varphi_{as}(x, \mu, c) + o(1), \quad x \rightarrow +\infty, \quad -1 < \mu < 0, \\ & e(0) = 0, \quad e(x) = e_{as} + o(1), \quad x \rightarrow +\infty. \quad (11) \end{aligned}$$

Здесь

$$\varphi_{as} = \varepsilon_t \left( c^2 - \frac{r_0(\alpha)}{s(\alpha)} \right) + k_t(x-\mu) \left( c^2 - \frac{r_0(\alpha)}{s(\alpha)} \right) - h_0(\alpha) k_t \mu,$$

$$e_{as} = -k_t h_0(\alpha), \quad \Delta_0(\alpha) = r_0(\alpha) l(\alpha) - s(\alpha) r_1(\alpha),$$

$$h_0(\alpha) = \frac{\Delta_0(\alpha)}{s(\alpha) l(\alpha)},$$

$$r_0(\alpha) = \frac{3}{2} \int_0^\infty \int [1 + \exp(\alpha - c^2)] dc,$$

$$s(\alpha) = \int_0^\infty \frac{\exp(\alpha - c^2)}{1 + \exp(\alpha - c^2)} dc.$$

Функция  $\varphi_{as}$  описывает теплопроводность электронного газа в объеме металла. Процесс теплопроводности сопровождается появлением электрического поля  $e_{as}$  — так называемый термоэлектрический эффект [1]. Условие  $e(0) = 0$  связано с предположением об отсутствии электрического поля вне металла. Постоянная  $A_0$  заранее не задается, а определяется из решения задачи. Она связана с условием непротекания электронов через поверхность. В такой постановке ток равен нулю (везде при  $x > 0$ ), т.е.

$$\int (c\mu)\varphi(x, \mu, c)g(c)c^2 d\mu dc = 0.$$

Подчеркнем, что функции  $\varphi_{as}$ ,  $e_{as}$  являются решением системы (10).

## Декомпозиция задачи

Согласно структуре функции  $\varphi_{as}$ , ищем функцию  $\varphi$  в виде

$$\varphi(x, \mu, c) = h_1(x, \mu) + (c^2 - r_0(\alpha)/s(\alpha))h_2(x, \mu).$$

Подставим это выражение в уравнения (10). Вычислим правую часть первого из уравнений (10)

$$\begin{aligned} & \frac{1}{l(\alpha)} \int_{-1}^1 \int_0^\infty k(c, c')\varphi(x, \mu', c')g(c')c'^3 dc' d\mu' \\ &= \frac{1}{l(\alpha)} \int_{-1}^1 \int_0^\infty h_1(x, \mu')g(c')c'^3 dc' d\mu' \\ &+ \frac{1}{l(\alpha)} \int_{-1}^1 \int_0^\infty \left( c'^2 - \frac{r_0(\alpha)}{s(\alpha)} \right) h_2(x, \mu')g(c')c'^3 dc' d\mu' + \frac{l(\alpha)}{\Delta(\alpha)} \\ &\times \left( c^2 - \frac{r_1(\alpha)}{l(\alpha)} \right) \int_{-1}^1 \int_0^\infty \left( c'^2 - \frac{r_1(\alpha)}{l(\alpha)} \right) h_1(x, \mu')g(c')c'^3 dc' d\mu' \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &+ \frac{l(\alpha)}{\Delta(\alpha)} \left( c^2 - \frac{r_1(\alpha)}{l(\alpha)} \right) \\ &\times \int_{-1}^1 \int_0^\infty \left( c'^2 - \frac{r_1(\alpha)}{l(\alpha)} \right) \left( c'^2 - \frac{r_0(\alpha)}{s(\alpha)} \right) h_2(x, \mu')g(c')c'^3 dc' d\mu' \\ &= \frac{1}{2} \int_{-1}^1 h_1(x, \mu')d\mu' + \left( c^2 - \frac{r_0(\alpha)}{s(\alpha)} \right) \frac{1}{2} \int_{-1}^1 h_2(x, \mu')d\mu' \end{aligned}$$

(второй и третий интегралы обратились в нуль при интегрировании по  $c'$ ). Аналогично вычисляется правая часть второго из уравнений (10).

Получаем систему уравнений

$$\mu \frac{\partial h_1}{\partial x} + h_1(x, \mu) = \bar{h}_1(x) + \mu e(x); \quad (12)$$

$$\mu \frac{\partial h_2}{\partial x} + h_2(x, \mu) = \bar{h}_2(x);$$

$$\bar{h}_j(x) = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 h_j(x, \mu) d\mu; \quad j = 1, 2, \quad (13)$$

$$e'(x) = a^2(\alpha)\bar{h}_1(x); \quad a^2(\alpha) = a_0^2 s(\alpha). \quad (14)$$

Граничные условия (11) теперь имеют следующий вид:

$$h_1(0, \mu) = A_0, \quad 0 < \mu < 1,$$

$$h_1(x, \mu) = -h_0(\alpha)k_t\mu + o(1), \quad x \rightarrow +\infty, \quad -1 < \mu < 0; \quad (15)$$

$$h_2(0, \mu) = 0, \quad 0 < \mu < 1,$$

$$h_2(x, \mu) = \varepsilon_t + k_t(x - \mu) + o(1), \quad x \rightarrow +\infty, \quad 1 < \mu < 0; \quad (16)$$

$$e(0) = 0, \quad e(x) = e_{as} + o(1), \quad x \rightarrow +\infty. \quad (17)$$

Обратим внимание, что задача (10), (11) распадается на две задачи, связанные между собой только через граничные условия: задача о скачке температуры в металле — (13), (16) и задача о поведении электрического поля вблизи поверхности под действием градиента температуры  $k_t$  — (12), (14), (15), (17). Начнем с первой задачи.

## Задача о скачке температуры в металле

Будем рассматривать задачу (13), (16). Метод решения этой задачи разработан в [6]. Следуя [6], будем искать решение в виде  $h_{2\eta}(x, \mu) = \exp(-x/\eta)\Phi(\eta, \mu)$ . Получим характеристическое уравнение

$$(\eta - \mu)\Phi(\eta, \mu) = \eta \frac{1}{2} m(\eta), \quad m(\eta) = \int_{-1}^1 \Phi(\eta, \mu) d\mu. \quad (18)$$

В силу однородности уравнения (13) можно считать, что  $m(\eta) \equiv 1$ . Тогда из уравнения (18) при  $\eta \in \sigma_c$ ,  $\sigma_c = (-1, 0) \cup (0, 1)$  находим собственные функции Кейза, отвечающие непрерывному спектру  $\sigma_c$ ,

$$\Phi(\eta, \mu) = \frac{1}{2} \eta P \frac{1}{\eta - \mu} + \lambda(\eta) \delta(\eta - \mu).$$

Здесь символ  $Px^{-1}$  означает распределение — главное значение интеграла от  $x^{-1}$ ,  $\delta(x)$  — дельта-функция Дирака,  $\lambda(z)$  — дисперсионная функция Кейза [6],

$$\lambda(z) = 1 + \frac{z}{2} \int_{-1}^1 \frac{du}{u - z}.$$

Двойному нулю  $z = \infty$  функции  $\lambda(z)$  отвечают два решения уравнения (13):  $1, x - \mu$ . Решение задачи (13), (16) ищем в виде разложения по собственным решениям

$$h_2(x, \mu) = \varepsilon_t + k_t(x - \mu) + \int_0^1 \exp\left(-\frac{x}{\eta}\right) \Phi(\eta, \mu) m(\eta) d\eta. \quad (19)$$

В разложении (19) неизвестными являются скачок температуры  $\varepsilon_t$  и функция  $m(\eta)$ .

Используя граничные условия (16), перейдем от разложения (19) к сингулярному интегральному уравнению с ядром Коши

$$\varepsilon_t - k_t \mu + \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{\eta m(\eta)}{\eta - \mu} d\eta + \lambda(\mu) m(\mu) = 0. \quad (20)$$

Для решения уравнения (20) введем вспомогательную функцию

$$M(z) = \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{\eta m(\eta) d\eta}{\eta - z}, \quad (21)$$

аналитическую в комплексной плоскости с разрезом  $[0, 1]$ . Граничные значения  $M(z)$  сверху и снизу на этом разрезе связаны между собой формулами Сохоцкого [7]

$$M^+(\mu) - M^-(\mu) = \pi i \mu m(\mu), \quad 0 < \mu < 1, \\ \frac{1}{2} [M^+(\mu) + M^-(\mu)] = M(\mu), \quad (22)$$

где

$$M(\mu) = \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{\eta m(\eta) d\eta}{\eta - \mu}, \quad 0 < \mu < 1.$$

Нам понадобятся формулы Сохоцкого и для дисперсионной функции  $\lambda(z)$

$$\lambda^+(\mu) - \lambda^-(\mu) = \pi i \mu, \quad -1 < \mu < 1, \\ \frac{1}{2} [\lambda^+(\mu) + \lambda^-(\mu)] = \lambda(\mu),$$

где

$$\lambda(\mu) = 1 + \frac{\mu}{2} \ln \frac{1 - \mu}{1 + \mu}, \quad -1 < \mu < 1.$$

С помощью четырех последних равенств сведем уравнение (20) к неоднородной краевой задаче Римана [7,8]

$$\lambda^+(\mu) [M^+(\mu) + \varepsilon_t - k_t \mu] = \lambda^-(\mu) [M^-(\mu) + \varepsilon_t - k_t \mu], \quad 0 < \mu < 1.$$

Решим соответствующую однородную краевую задачу

$$\frac{X^+(\mu)}{X^-(\mu)} = \frac{\lambda^+(\mu)}{\lambda^-(\mu)}, \quad 0 < \mu < 1.$$

Заметим, что кривая  $z = \lambda^+(\mu)/\lambda^-(\mu) = \exp(2i\theta(\mu))$ ,  $0 \leq \mu \leq 1$ , где  $\theta(\mu) = \arg \lambda^+(\mu)$ , один раз пробегает единичную окружность в положительном направлении. Из семейства решений этих задач выберем так называемое каноническое решение (решение, порядок которого в бесконечности равен индексу задачи)

$$X(z) = \frac{1}{z} \exp V(z), \quad V(z) = \frac{1}{\pi} \int_0^1 \frac{\xi(u) du}{u - z},$$

$$\xi(u) = \theta(\mu) - \pi = -\frac{\pi}{2} - \arctg \frac{2\lambda(u)}{\pi u}.$$

Неоднородную краевую задачу с помощью однородной преобразуем к задаче определения аналитической функции по ее нулевому скачку на разрезе

$$X^+(\mu) [M^+(\mu) + \varepsilon_t - k_t \mu] = X^-(\mu) [M^-(\mu) + \varepsilon_t - k_t \mu], \quad 0 < \mu < 1.$$

Общее решение этой задачи содержит одну произвольную постоянную  $C$

$$M(z) = -\varepsilon_t + k_t z + C/X(z). \quad (23)$$

Потребуем, чтобы это решение можно было принять в качестве вспомогательной функции (21). Постоянную  $C$  выберем так, чтобы уничтожить полюс у решения (23) в точке  $z = \infty$ :  $C = -k_t$ . Величину  $\varepsilon_t$  находим теперь из условия  $M(\infty) = 0$ . Разлагая функцию  $1/X(z)$  в ряд Лорана в окрестности точки  $z = \infty$ , приравняем к нулю свободный член в правой части решения (23). Получим

$$\varepsilon_t = V_1 k_t, \quad V_1 = \frac{1}{\pi} \int_0^1 \xi(u) du = 0.71045 \dots \quad (24)$$

Формула представляет собой искомую величину температурного скачка в металле. Сравнивая формулы (24) и (1), находим величину коэффициента скачка температуры  $C_t = 0.71045$ . Отметим, что этот коэффициент не зависит от степени вырожденности электронного газа.

## Задача о поведении электрического поля в металле

Перейдем к решению задачи, состоящий из уравнений (12), (14) и граничных условий (15), (17). Решения уравнений (12), (14) будем искать в виде

$$h_{1\eta}(x, \mu) = \exp\left(-\frac{x}{\eta}\right) F(\eta, \mu),$$

$$e_{\eta}(x) = \exp\left(-\frac{x}{\eta}\right) E(\eta).$$

Приходим к характеристической системе

$$(\eta - \mu)F(\eta, \mu) = \frac{1}{2}(1 - a^2(\alpha)\eta\mu)\eta n(\eta), \quad (25)$$

$$E(\eta) = -\frac{1}{2}a^2(\alpha)\eta n(\eta), \quad n(\eta) = \int_{-1}^1 F(\eta, \mu) d\mu. \quad (26)$$

Считая, что  $\eta n(\eta) \equiv 1$ , возьмем при  $\eta \in (-1, 0) \cup (0, 1)$  решение уравнения (25) в пространстве обобщенных функций

$$F(\eta, \mu) = \frac{1}{2}a^2(\alpha) + \frac{1 - a^2(\alpha)\eta^2}{\eta} \Phi(\eta, \mu), \quad (27)$$

где  $\Phi$  — собственная функция Кейза, введенная ранее.

Дисперсионная функция этой задачи  $(1 - a^2(\alpha)z^2)\lambda(z)/z$  имеет три нуля:  $z = \infty$  и  $z = \pm 1/a(\alpha)$ . Этим нулям отвечают соответственно три решения уравнений (12), (14),  $\{h_1 = \mu, e = 1\}$  и  $\{h_1 = \exp(\mp a(\alpha)x), e = \mp a(\alpha) \exp(\mp a(\alpha)x)\}$ . Эти решения отвечают дискретному спектру, а непрерывному спектру отвечают собственные функции (27) и (26).

Теперь решение задачи будем искать в виде разложения по собственным решениям дискретного и непрерывного спектров

$$h_1(x, \mu) = -k_t h_0(\alpha)\mu + A_1 \exp(-a(\alpha)x) + \int_0^1 \exp\left(-\frac{x}{\eta}\right) F(\eta, \mu) n(\eta) d\eta, \quad (28)$$

$$e(x) = -k_t h_0(\alpha) - a(\alpha)A_1 \exp(-a(\alpha)x) - \frac{1}{2}a^2(\alpha) \int_0^1 \exp\left(-\frac{x}{\eta}\right) n(\eta) d\eta. \quad (29)$$

Неизвестными в разложениях (28) и (29) являются постоянные  $A_0, A_1$  и функция  $n(\eta)$ , причем постоянная  $A_0$  входит в граничное условие (15).

Заметим, что разложения (28), (29) автоматически удовлетворяют соответствующим граничным условиям

при  $x \rightarrow +\infty$ . Подстановка этих разложений в граничные условия при  $x = 0$  приводит к следующим уравнениям:

$$A_0 = -k_t h_0(\alpha)\mu + A_1 + A_2 + \frac{1}{2} \int_0^1 (1 - a^2(\alpha)\eta^2) \frac{n(\eta) d\eta}{\eta - \mu} + (1 - a^2(\alpha)\mu^2) \frac{\lambda(\mu)}{\mu},$$

$$A_2 = \frac{1}{2} a^2(\alpha) \int_0^1 \eta n(\eta) d\eta, \quad (30)$$

$$a(\alpha)A_1 = -k_t h_0(\alpha) - \frac{1}{2} a^2(\alpha) \int_0^1 n(\eta) d\eta. \quad (31)$$

Перейдем к решению уравнения (30). Введем вспомогательную функцию

$$N(z) = \frac{1}{2} \int_0^1 (1 - a^2(\alpha)\eta^2) \frac{n(\eta) d\eta}{\eta - z} \quad (32)$$

и, как и ранее, сведем уравнение (30) к краевой задаче Римана

$$X^+(\mu) [N^+(\mu) - A_0 + A_1 + A_2 - h_0(\alpha)k_t \mu] = X^-(\mu) [N^-(\mu) - A_0 + A_1 + A_2 - h_0(\alpha)k_t \mu],$$

$$0 < \mu < 1.$$

Эта задача имеет следующее решение:

$$N(z) = -A_1 + A_0 - A_2 + k_t h_0(\alpha)(z - 1/X(z)),$$

откуда находим последнюю неизвестную функцию  $n(\eta)$

$$\pi i (1 - a^2(\alpha)\eta^2) n(\eta) = -k_t h_0(\alpha) \left[ \frac{1}{X^+(\eta)} - \frac{1}{X^-(\eta)} \right] \quad (33)$$

и постоянную  $A_0$ :  $A_0 = -k_t h_0(\alpha) V_1 + A_1 + A_2$ . Интеграл  $A_2$  преобразуем согласно (33). Тогда

$$A_0 = A_1 - k_t h_0(\alpha) \times \left[ V_1 - \frac{1}{2\pi i} \int_0^1 \left( \frac{1}{X^+(\eta)} - \frac{1}{X^-(\eta)} \right) \frac{\eta d\eta}{\eta^2 - a^{-2}(\alpha)} \right]. \quad (34)$$

Вычислим интеграл из соотношения (34). Отметим, что для большинства металлов величина  $1/a(\alpha)$  принадлежит разрезу:  $1/a(\alpha) \in (0, 1)$ ; это значит, что интеграл из правой части (34) является особым. Значение этого особого интеграла обозначим через  $J(\mu)$

$$J(a) = \frac{1}{2\pi i} \int_0^1 \left[ \frac{1}{X^+(u)} - \frac{1}{X^-(u)} \right] \frac{u du}{u^2 - a^{-2}(\alpha)}.$$

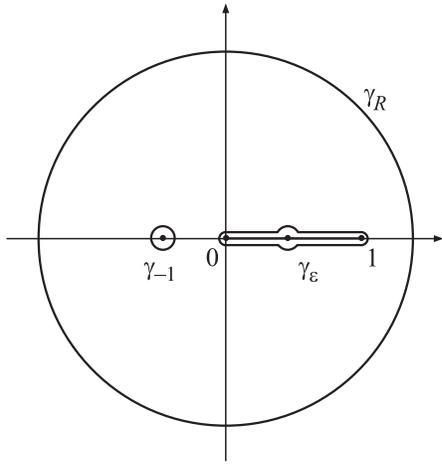


Рис. 1.

Образует функцию  $f(z) = z/[X(z)(z^2 - a^2(\alpha))]$ , аналитическую в комплексной плоскости, за исключением разреза  $[0,1]$  и простых полюсов в точках  $\pm 1/a(\alpha)$ . Возьмем сложный контур (рис. 1), состоящий из окружности  $\gamma_R$  достаточно большого радиуса  $R = 1/\varepsilon$ ,  $\varepsilon > 0$ , окружности  $\gamma_{-1}$ :  $|z + 1/a(\alpha)| = 2\varepsilon$  и контура  $\gamma_\varepsilon$ , охватывающего разрез  $[0,1]$ . Контур  $\gamma_\varepsilon$  ориентирован по часовой стрелке (в отличие от остальных контуров), отстоит от разреза на расстоянии  $\varepsilon$  и переходит в часть окружности  $\gamma_{+1}$ :  $|z - 1/a(\alpha)| = 2\varepsilon$ . По теореме Коши для многосвязных областей

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma_R} f(z) dz = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma_1} f(z) dz - \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma_\varepsilon} f(z) dz.$$

Переходя к пределу в этом равенстве при  $\varepsilon \rightarrow 0$ , получаем

$$J(a) = \operatorname{Res}_{\infty} f(z) + \operatorname{Res}_{-1/a} f(z) + \operatorname{Res}_{1/a} f(z).$$

Нетрудно видеть, что  $\operatorname{Res}_{\infty} f(z) = V_1$ ,  $\operatorname{Res}_{1/a} f(z) = 1/[2X(-1/a)]$ . Учитывая, что точка  $1/a$  лежит на разрезе, имеем

$$\operatorname{Res}_{1/a} f(z) = \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{2X^+(1/a)} + \frac{1}{2X^-(1/a)} \right] = \frac{\cos \xi(1/a)}{2X(1/a)}.$$

Таким образом,

$$J(a) = V_1 + \frac{1}{2} \left[ \frac{\cos \xi(1/a)}{X(1/a)} + \frac{1}{X(-1/a)} \right].$$

Следовательно, согласно (34),

$$A_0 = A_1 + k_t h_0(\alpha) \frac{1}{2} \left[ \frac{\cos \xi(1/a)}{X(1/a)} + \frac{1}{X(-1/a)} \right].$$

Вернемся к уравнению (31) и перепишем его, согласно (26) и (33), в виде

$$a(\alpha)A_1 = -k_t h_0(\alpha) \times \left[ 1 + \frac{1}{2\pi i} \int_0^1 \left( \frac{1}{X^+(u)} - \frac{1}{X^-(u)} \right) \frac{du}{u^2 - a^{-2}(\alpha)} \right].$$

Интеграл в этом равенстве также является особым. Используя изложенный выше метод вычисления особого интеграла, имеем

$$a(\alpha)A_1 = -k_t h_0(\alpha) \times \left[ 1 + \left( \operatorname{Res}_{\infty} + \operatorname{Res}_{-1/a} + \operatorname{Res}_{1/a} \right) \frac{1}{X(z)(z^2 - a^{-2}(\alpha))} \right].$$

Найдем эти вычеты

$$\operatorname{Res}_{\infty} \frac{1}{X(z)(z^2 - a^{-2}(\alpha))} = -1,$$

$$\operatorname{Res}_{-1/a} \frac{1}{X(z)(z^2 - a^{-2}(\alpha))} = -\frac{a}{2X(-1/a)},$$

$$\operatorname{Res}_{1/a} \frac{1}{X(z)(z^2 - a^{-2}(\alpha))} = \frac{a \cos \xi(1/a)}{2X(1/a)}.$$

Следовательно,

$$A_1 = -k_t h_0(\alpha) \frac{1}{2} \left[ \frac{\cos \xi(1/a)}{X(1/a)} - \frac{1}{X(-1/a)} \right].$$

Теперь выражение для  $A_0$  упрощается  $A_0 = k_t h_0(\alpha)/X(-1/a)$ . Таким образом, все неизвестные постоянные и функции разложений (28) и (29) найдены. Тем самым задача (12), (14), (15), (17) решена. Найденные коэффициенты разложений с помощью равенства (22) позволяют в явном виде построить функцию распределения электронов на поверхности металла

$$\varphi(0, \mu, c) = k_t \left[ \frac{h_0(\alpha)}{X(-1/a)} - \frac{\theta_+(-\mu)}{X(\mu)} \left( c^2 - \frac{r_1(\alpha)}{l(\alpha)} \right) \cos \theta(\mu) \right],$$

$$\theta_+(\mu) = 1, \mu > 0; \theta_+(\mu) = 0, \mu < 0.$$

Из этого выражения видно, что  $\varphi(0, \mu, c) = A_0$ ,  $0 < \mu < 1$ , это в точности совпадает с первым граничным условием из (15).

Построим теперь в явном виде профиль электрического поля в полупространстве. Согласно (28) и (33),

имеем

$$e(x) = k_t h_0(\alpha) \left[ -1 + \frac{1}{2} a(\alpha) \left( \frac{f_0(a)}{X(1/a)} - \frac{1}{X(-1/a)} \right) \right. \\ \times \exp(-a(\alpha)x) - \frac{1}{2\pi i} \int_0^1 \exp\left(-\frac{x}{u}\right) \\ \times \left. \left( \frac{1}{X^+(u)} - \frac{1}{X^-(u)} \right) \frac{du}{u^2 - a^{-2}(\alpha)} \right]. \quad (35)$$

Условие  $e(0) = 0$ , очевидно, выполняется, ибо при вычислении  $A_1$  было показано, что

$$\frac{1}{2\pi i} \int_0^1 \left[ \frac{1}{X^+(u)} - \frac{1}{X^-(u)} \right] \frac{du}{u^2 - a^{-2}(\alpha)} \\ = \frac{1}{2} a(\alpha) \left[ \frac{\cos \xi(1/a)}{X(1/a)} - \frac{1}{X(-1/a)} \right] - 1.$$

## Профиль электрического поля

Рассмотрим случай (типичные металлы), когда величина химического потенциала  $\alpha \gg 1$ . Для оценки интегралов, входящих в (35), воспользуемся известной асимптотикой [9, с. 191, формула (58.1)]

$$\int_0^\infty \frac{f(x) dx}{e^{x-\alpha} + 1} \\ = \int_0^\alpha f(x) dx + \frac{\pi^2}{6} f'(\alpha) + \frac{7\pi^2}{360} f'''(\alpha) + \dots, \quad \alpha \gg 1.$$

При  $\alpha \gg 1$  имеем

$$r_0(\alpha) = \alpha^{3/2} + \frac{\pi^2}{8} \alpha^{-1/2} + \dots, \quad r_1(\alpha) = \alpha^2 + \frac{\pi^2}{3} + \dots,$$

$$s(\alpha) = \alpha^{1/2} - \frac{\pi^2}{24} \alpha^{-1/2} + \dots, \quad l(\alpha) = \alpha + \dots$$

Следовательно, при  $\alpha \gg 1$

$$a(\alpha) = a_0 \sqrt[4]{\alpha}, \quad h_0(\alpha) \sim -\pi^2/6\alpha$$

и выражение для электрического поля принимает вид

$$e(x) = -k_t \frac{\pi^2}{6\alpha} \left[ -1 + \frac{1}{2} a_0 \sqrt[4]{\alpha} \exp(-a_0 \sqrt[4]{\alpha} x) \right. \\ \times \left( \frac{\cos \xi(1/a)}{X(1/a)} - \frac{1}{X(-1/a)} \right) - \frac{1}{2} \int_0^1 \exp\left(-\frac{x}{\eta} - V(\eta)\right) \\ \times \left. \frac{\eta^2}{\sqrt{\lambda^2(\eta) + (\pi\eta/2)^2}} \frac{d\eta}{\eta^2 - 1/a_0^2 \sqrt{\alpha}} \right], \\ a = a(\alpha) = a_0 \sqrt[4]{\alpha}.$$

Величина  $a$  определяется как  $a = 3\omega_p^2 l_0^2 v_F^{-2}$ , где  $\omega_p$  — плазменная частота,  $\omega_p^2 = e_0^2 n / m \epsilon_0$ ,  $n$  — концентрация электронов. Тогда

$$e(x) = -k_t \frac{\pi^2}{6\alpha} \left[ -1 + \frac{1}{2} a \exp(-ax) \right. \\ \times \left( \frac{\cos \xi(1/a)}{X(1/a)} - \frac{1}{X(-1/a)} \right) - \frac{1}{2} \int_0^1 \exp(-x/\eta - V(\eta)) \\ \times \left. \frac{\eta}{\sqrt{\lambda^2(\eta) + (\pi\eta/2)^2}} \frac{d\eta}{\eta^2 - a^{-2}} \right]. \quad (36)$$

На рис. 2–4 представлены зависимости приведенного электрического поля  $e_*(x)$  ( $e_*(x) = -\frac{1}{4}\alpha e(x)$ ) от расстояния  $x$  до поверхности при различных значениях величины  $a$ : (случай  $a = 5$  показан на рис. 2, случай  $a = 10$  — на рис. 3, случай  $a = 100$  — на рис. 4). Физический смысл величины  $a$  — отношение длины свободного пробега электронов к дебаевскому радиусу экранирования ( $a \sim l_0/r_D$ ). Для сравнения

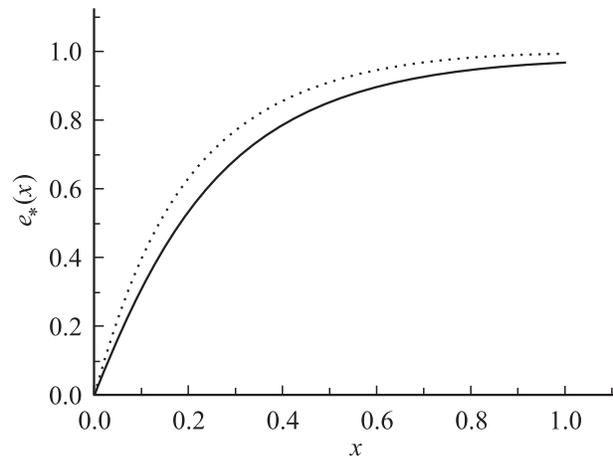


Рис. 2.

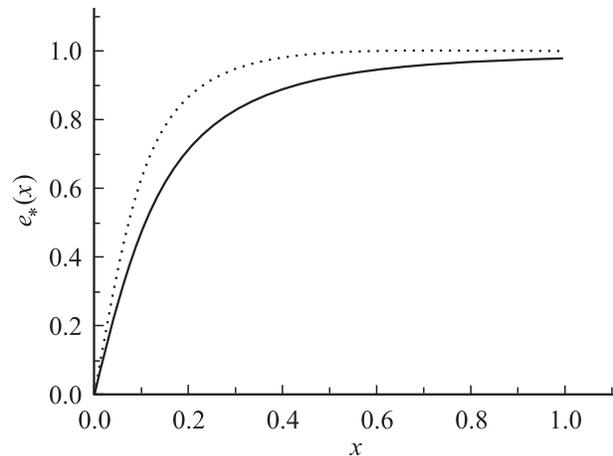


Рис. 3.

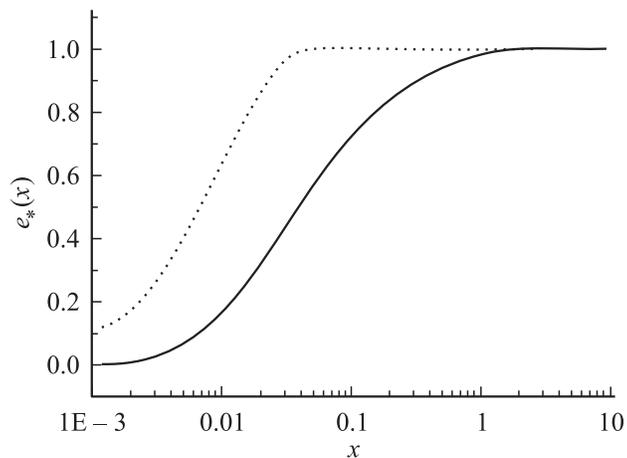


Рис. 4.

наряду с графиками электрического поля (сплошные кривые) приведены профили, соответствующие дебаевскому экранированию (точечные кривые). Все кривые нормированы на величину поля вдали от поверхности.

Из приведенных рисунков видно, что по мере роста параметра  $a$  (т.е. с ростом длины свободного пробега электронов) растет различие между поведением поля вблизи поверхности, соответствующего точному полученному решению (36), и случаем чисто дебаевского экранирования. При  $a = 100$  это различие весьма существенно. Подобное поведение поля связано с влиянием кинетических эффектов на поведение электронов вблизи поверхности. Если дебаевское экранирование локализовано в области порядка  $r_D$ , то кинетические эффекты сказываются на расстояниях порядка длины свободного пробега от стенки (слой Кнудсена). В безразмерных координатах слой Кнудсена имеет размер  $x \sim 1$ .

## Заключение

В настоящей работе впервые аналитически решена задача о нахождении скачка температуры в металле, который обусловлен потоком тепла к поверхности или от нее. Найдено точное выражение для электрического поля, генерируемого тепловыми процессами. В явном виде построена функция распределения электронов вблизи поверхности металла. Рассмотрен предельный случай — случай типичных металлов. Исследована зависимость величины электрического поля от расстояния до поверхности при различных значениях отношения длины свободного пробега электронов к дебаевскому радиусу экранирования.

Выявлено различие между поведением поля, соответствующего точному решению, и чисто дебаевским экранированием. Анализ результатов показывает, что кинетические эффекты сказываются на расстояниях порядка длины свободного пробега электронов. Для типичных металлов это расстояние существенно превышает дебаевский радиус экранирования. Таким образом, влияние

поверхности металла сказывается на поведении электрического поля на расстояниях, существенно больших классического радиуса экранирования.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ (№ 03-01-00281).

## Список литературы

- [1] Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Физическая кинетика. М.: Наука, 1979. 528 с.
- [2] Латышев А.В., Юшканов А.А. // ФТТ. 2001. Т. 43. Вып. 10. С. 1744.
- [3] Абрикосов А.А. Введение в теорию нормальных металлов. М.: Наука, 1972. 288 с.
- [4] Займан Дж. Электроны и фононы. М.: ИЛ, 1962. 488 с.
- [5] Владимирова В.С. Обобщенные функции в математической физике. М.: Наука, 1976. 280 с.
- [6] Кейз К, Цвайфель П. Линейная теория переноса. М.: Мир, 1972. 384 с.
- [7] Гахов Ф.Д. Краевые задачи. М.: Наука, 1977. 640 с.
- [8] Латышев А.В., Юшканов А.А. // ЖВМ и МФ. 2001. Т. 41. № 8. С. 1239.
- [9] Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Статистическая физика. М.: Наука, 1976. 584 с.